第 11 卷 第 3 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 3
1985 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1985

复杂系统可靠度最优配置

何 敬 业
(太 原 工 学 院)

摘　　要

本文研究复杂系统可靠度的最优配置问题. 本文用路径跟踪计算两端点之间的最短路集合的方法，将一个复杂网络简化为一个等效串并网络，然后按照串并网络可靠度最优配置方法进行配置. 文中给出了一个定理及实例.

文献 [1] 提出的迭代算法,可用电子计算机搜索可靠度最优配置. 但当系统结构复杂,系统中的环节数 n 很大时，即使用高速计算机，这种方法也是不可取的. 因为这时要通过比较 $n!$ 个可靠度方程式的值才能确定最优解. 用穷举法进行比较并求解,同样不可取.

本文给出了一般可循的简化法则，提供了一个适用于一般复杂系统的算法. 理论研究证明，对于最优配置等效唯一的系统和非等效唯一的系统都可以获得最优配置. 本文中的“约束”是指某些环节在系统中的位置不能随意配置，有时仅可配置在指定的部位. 本文暂不研究环节配置受约束的各种原因.

一、系统可靠度的表示方法

设 S 是一个系统，并代表系统正常这一事件. 当环节 x_i, $i=\overline{1,n}$ 的可靠度 p_i 给定后,研究 p_i 在 S 中如何配置为最优. 为了简明起见,假定环节只可能有两种状态,即正常或失效;所有环节失效是随机独立的,并对时间具有同一分布.

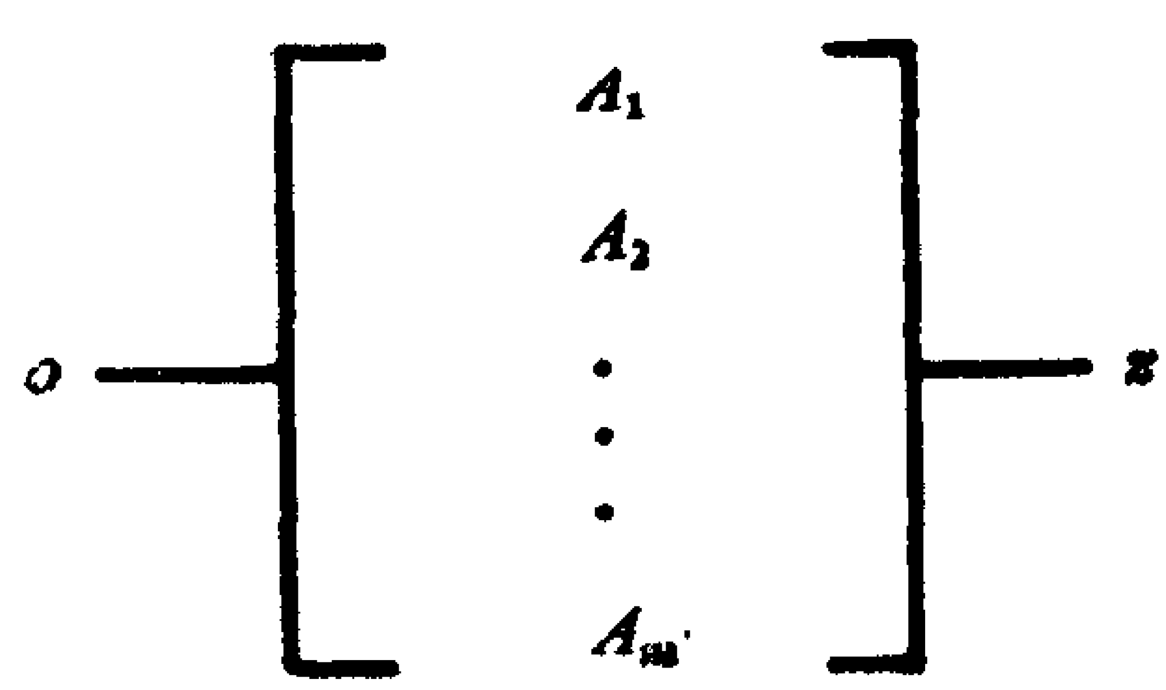

图 1　m 路串并系统

设系统 S 的结点 o 和结点 z 之间有 m 条路，记作 A_j, $j=\overline{1,m}$, 如图 1 所示. 用 $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$ 表示

$$A_j,\ j=\overline{1,m}$$

中至少有一条路畅通,则系统 S 正常可表示为

$$S=\bigcup_{j=1}^{m} A_j. \tag{1}$$

系统 S 的可靠度 R 为

$$R=P\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \tag{2}$$

本文于 1982 年 9 月 7 日收到,曾于 1982 年 11 月在全国可靠性数学第一届学术年会上宣读.

其相应的描述串并结构可靠度的数学模型为

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - S_j) \tag{3}$$

式中 S_j 表示路 A_j 畅通的概率. 路 A_j 由 n_j 个环节串联组成,即路长为 n_j. 在任意配置情况下,有

$$S_j = \prod_{\substack{i \\ A_j, \binom{n}{n_j}}} p_{ji}, \quad i = \overline{\sum_{j=1}^{j-1} n_j + 1, \ \sum_{j=1}^{j} n_j}. \tag{4}$$

上式表示在 $p_i, i = \overline{1,n}$ 中任取 n_j 个连乘,且配置在路 A_j 相应的环节上.

二、有约束最优配置

用路径跟踪计算两端点之间的最短路集合的方法，将一个复杂网络简化为一个等效的串并网络时[2,3]，同一环节可能在不同的通路中重复出现. 这样的配置称为约束配置. 为了简明起见,定义能确定等效串并结构可靠度配置的最少通路数(即含有配置环节的通路数)为基本通路,记为 $\sum_j A_j$, $j = \overline{1, t}$. 其余通路记为 $\sum_j A_j$, $j = \overline{t+1, m}$. 显然,只要基本通路的可靠度配置确定后,整个系统的可靠度配置就确定了. 在基本通路中,路 A_j 按次序出现的约束部分可靠度记作 S'_j, 其相应的路长记作 n'_j, 按次序配置部分的可靠度记作 S''_j, 其相应的路长记作 n''_j. 路 A_j 的路长为 $n_j = n'_j + n''_j$, 可靠度为 $S_j = S'_j S''_j$. 由此,有等效串并结构的可靠度最优配置定理如下:

定理. 有 m 路等效串并系统 S, 路 A_j 的可靠度为 S_j, 系统可靠度为

$$R = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}. \tag{5}$$

路长 $n_j \leqslant n_{j+1}$, 环节可靠度 $p_i \geqslant p_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$, 重复出现的环节可靠度 $p'_i \geqslant p'_{i+1}$, 则系统可靠度最优配置为

$$R^* = \max \left[1 - \prod_j (1 - S_j) \right], \quad j = 1, m \tag{6}$$

的充要条件是将 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 依大小次序分别配置在路 $A_1, A_2 \cdots, A_t$ 环节上,且将

$$p'_1, p'_2, \cdots, p'_n$$

依大小次序分别配置在路 $A_2, A_3, \cdots, A_m$ 环节上.

证. 因为 $n_j \leqslant n_{j+1}$, 且 $p_i \geqslant p_{i+1}$, $p'_i \geqslant p'_{i+1}$, 所以

$$S_{1\max} \geqslant S_{2\max} \geqslant \cdots \geqslant S_{t\max} \geqslant \cdots \geqslant S_{m\max} \tag{7}$$

在基本通路中，若 $S_{j\max}$ 和 $S_{(j+1)\max}$ 按规定配置，则

$$S_{j\max} = \underset{A_j,\binom{n}{n'_j}}{S'_{j\max}} \prod_{\substack{i \\ A_j,\binom{n}{n''_j}}} p_{ji} = p'_{j\min}p_{j\min} \underset{A_j,\binom{n}{n'_j-1}}{S'_j} \prod_{\substack{i \\ A_j,\binom{n}{n''_j-1}}} p_{ji} \tag{8}$$

$$S_{(j+1)\max} = \underset{A_{j+1},\binom{n}{n'_{j+1}}}{S'_{(j+1)\max}} \prod_{\substack{i \\ A_{j+1},\binom{n}{n''_{j+1}}}} p_{(j+1)i} = p'_{(j+1)\max}p_{(j+1)\max} \underset{A_{j+1},\binom{n}{n'_{j+1}-1}}{S'_{(j+1)}} \prod_{\substack{i \\ A_{j+1},\binom{n}{n''_{j+1}-1}}} p_{(j+1)i}. \tag{9}$$

式中 $p'_{j\min}$ 和 $p_{j\min}$ 分别为路 A_j 中约束部分和配置部分的可靠度最小者；$p'_{(j+1)\max}$ 和 $p_{(j+1)\max}$ 分别为路 A_{j+1} 中约束部分和配置部分的可靠度最大者。当 $p'_{j\min}$ 和 $p'_{(j+1)\max}$ 以及 $p_{j\min}$ 和 $p_{(j+1)\max}$ 分别互换位置后，得

$$S_j = p'_{(j+1)\max}p_{(j+1)\max} \underset{A_j,\binom{n}{n'_j-1}}{S'_j} \prod_{\substack{i \\ A_j,\binom{n}{n''_j-1}}} p_{ji}, \tag{10}$$

$$S_{j+1} = p'_{j\min}p_{j\min} \underset{A_{j+1},\binom{n}{n'_{j+1}-1}}{S'_{(j+1)}} \prod_{\substack{i \\ A_{j+1},\binom{n}{n''_{j+1}-1}}} p_{(j+1)i}, \tag{11}$$

$$(p'_{j\min}p_{j\min} - p'_{(j+1)\max}p_{(j+1)\max}) \underset{A_j,\binom{n}{n'_j-1}}{S'_j} \prod_{\substack{i \\ A_j,\binom{n}{n''_j-1}}} p_{ji}$$

$$\geqslant (p'_{j\min}p_{j\min} - p'_{(j+1)\max}p_{(j+1)\max}) \underset{A_{j+1},\binom{n}{n'_{j+1}-1}}{S'_{j+1}} \prod_{\substack{i \\ A_{j+1},\binom{n}{n''_{j+1}-1}}} p_{(j+1)i}. \tag{12}$$

因为 $p_{j\min} \geqslant p_{(j+1)\max}$，$p'_{j\min} \geqslant p'_{(j+1)\max}$，$n_j \leqslant n_{j+1}$，所以上式成立。这就证明了

$$S_{j\max} - S_j \geqslant S_{j+1} - S_{(j+1)\max}. \tag{13}$$

上式说明，如两条路按规定配置时，式(13)成立，系统可靠度最优。

设有两条路 A_j 和 A_k 任意配置时的可靠度记作 $\begin{bmatrix} S_j \\ S_k \end{bmatrix}$，最优配置时的可靠度记作

$$\begin{bmatrix} S_j \\ S_k \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} S_j^* \\ S_k^* \end{bmatrix},$$

根据相关系统可靠度单调增函数的性质，存在下式

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} S_j \\ S_k \end{bmatrix}^* \\ \vdots \\ S_t \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} S_j \\ S_k \end{bmatrix} \\ \vdots \\ S_t \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

设基本通路为 t 路的串并系统不按规定配置时记作 $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix}$，按规定配置时记作 $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix}^*$，并有

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} S_1^{(t-1)*} \\ S_2^{(t-1)*} \\ \vdots \\ S_t^{(t-1)*} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

且路长 $n_j \leqslant n_{j+1}$，$j = \overline{1, t}$. 式中 $(t-1)*$ 表示进行 $(t-1)$ 次优选配置，即 S_j 分别与 S_{j+r}，$r = \overline{1, t-j}$，$j = \overline{1, t-1}$ 按次序优选配置. 因为满足条件 $a_{ij} = 0$ $(i > j$，a_{ij} 表示矩阵 A 中第 i 行，第 j 列的一个元素)，所以上述关系可用上三角形矩阵 A 表示：

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^* & \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \end{bmatrix}^* & \cdots & \begin{bmatrix} S_1 \\ S_t \end{bmatrix}^* \\ & \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}^* & \cdots & \begin{bmatrix} S_2 \\ S_t \end{bmatrix}^* \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \begin{bmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{bmatrix}^* \end{bmatrix}. \tag{16}$$

根据相关系统可靠度的单调增函数性质及两条路按规定配置时可靠度最优的证明，则有

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix}^* \geqslant \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix}, \tag{17}$$

即环节的可靠度 p_i，$i = \overline{1,n}$ 依大小次序分别配置在路 A_1，A_2，$\cdots$，A_t 的环节上，且将 p_i' 依大小次序分别配置在路 A_2，A_3，$\cdots$，A_t 环节上，则系统可靠度最优，有

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix}^* \geqslant \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_t \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} \tag{18}$$

定理证毕.

三、举 例

有一双桥式系统如图 2 所示，它由环节 x_i，$i = \overline{1,7}$ 构成，且 $p_i \geqslant p_{i+1}$，试对该系统进行可靠度最优配置.

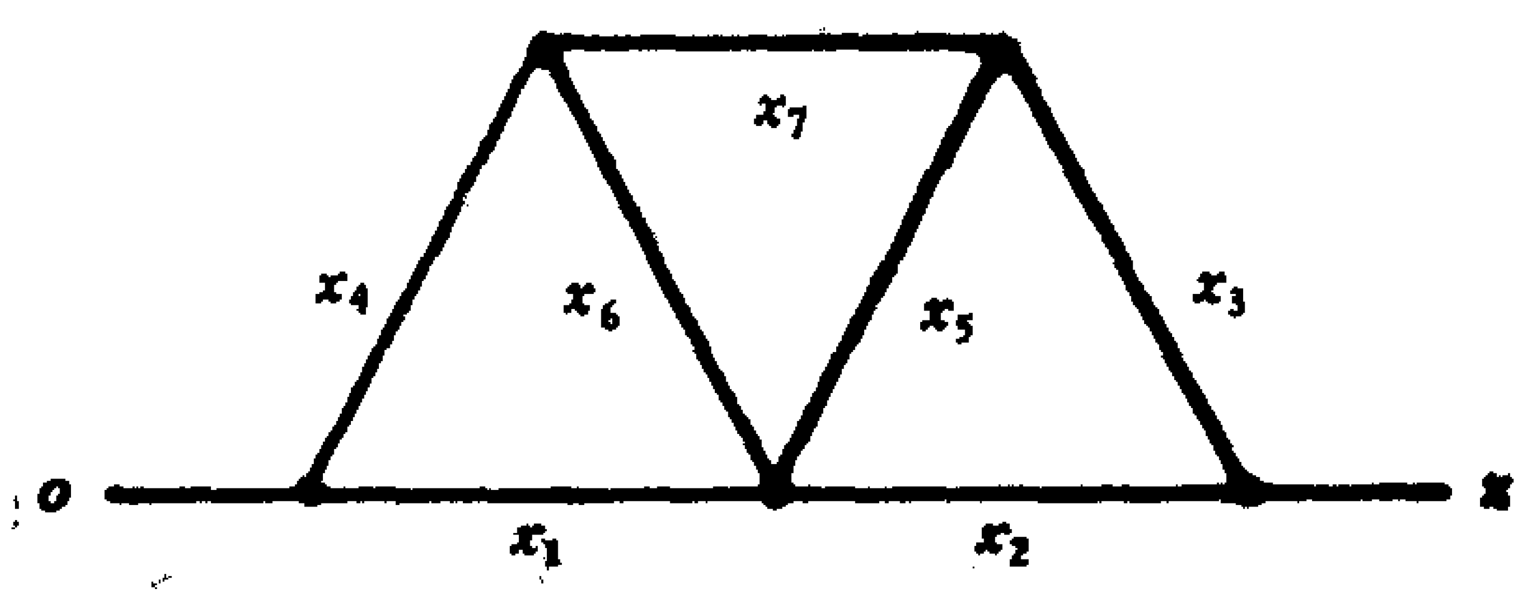

图 2　双桥式系统

配置过程如下：

$$S=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\\A_6\\A_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\ x_2\\x_1\ x_3\ x_5\\x_2\ x_4\ x_6\\x_3\ x_4\ x_7\\x_2\ x_4\ x_5\ x_7\\x_1\ x_3\ x_6\ x_7\\x_3\ x_4\ x_5\ x_6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}p_1\ p_2\\p_1\ x_3\ x_5\\p_2\ x_4\ x_6\\x_3\ x_4\ x_7\\p_2\ x_4\ x_5\ x_7\\p_1\ x_3\ x_6\ x_7\\x_3\ x_4\ x_5\ x_6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}p_1\ p_2\\p_1\ p_3\ p_4\\p_2\ x_4\ x_6\\p_3\ x_4\ x_7\\p_2\ x_4\ p_4\ x_7\\p_1\ p_3\ x_6\ x_7\\p_3\ x_4\ p_4\ x_6\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}p_1\ p_2\\p_1\ p_3\ p_4\\p_2\ p_5\ p_6\\p_3\ p_5\ x_7\\p_2\ p_5\ p_4\ x_7\\p_1\ p_3\ p_6\ x_7\\p_3\ p_5\ p_4\ p_6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}p_1\ p_2\\p_1\ p_3\ p_4\\p_2\ p_5\ p_6\\p_3\ p_5\ p_7\\p_2\ p_5\ p_4\ p_7\\p_1\ p_3\ p_6\ p_7\\p_3\ p_5\ p_4\ p_6\end{bmatrix}=R^*.$$

图 3 为该系统的一种最优配置图

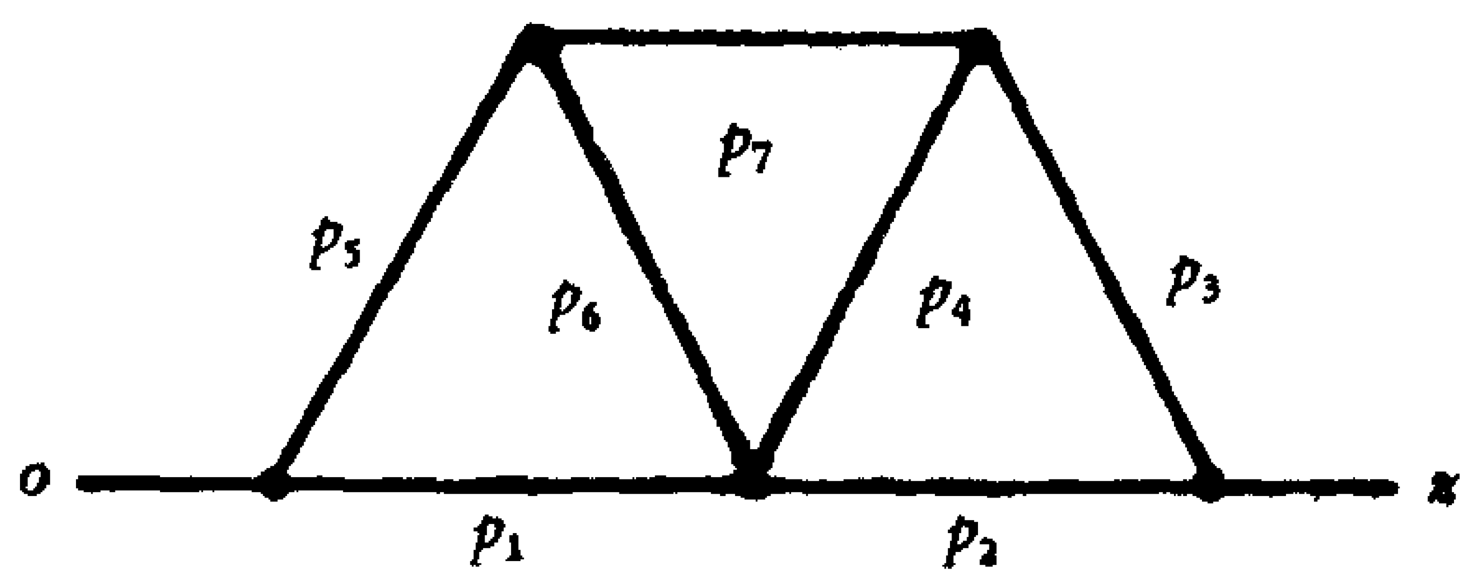

图 3　双桥式系统的最优配置

从本例的配置过程可见，用本方法进行配置一个由七个环节组成，有 $7!=5040$ 种不同的可靠度配置方案的双桥式系统，可很快得到一种可靠度最优的配置方案．应当指出，有约束的最优配置，有时并非等效唯一，但用本方法进行配置时，一定能得到一种最优配置方案．

参　考　文　献

[1] Kontoleon J. M., Optimum Link Allocation of Fixed Topology Network, *IEEE Trans. Reliability*, R-28 (1979), 145—147.

[2] Norman H. Roberts, Mathematical Methods in Reliability Engineering, McGraw-Hill Press. New York, (1964), 97—107.
[3] 盐见弘著,彭乃学、赵 清、赵秀芹译,可靠性工程基础,科学出版社,1982年,149—151.

OPTIMUM ALLOCATION OF COMPLEX SYSTEM RELIABILITY

HE JINGYE
(Taiyuan College of Engineering)

ABSTRACT

In this paper the problem on reliability optimum allocation of complex system is studied. A complex network is simplified to a equivalent series-parallel network, and then allocation is carried out according to the method of optimum allocation of series-parallel network reliability. Finally a theorem is given and the use of this theorem are illustrated by example.