第 11 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1985

积分约束下多方线性微分对策的追捕问题

阎 仰 奎
（山 西 大 学）

摘　　要

本文给出了多方线性微分追捕对策中完成追捕的充分条件．从推论可以得到文献 [1] 的结果．

设微分对策用方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{v},\ i = 1, 2, \cdots, m \tag{1}$$

描述，其中 $\boldsymbol{x}_i \in R^n$．R^n 是 n 维欧几里德空间；A_i 是常阵；$\boldsymbol{u}_i$ 是追捕者的控制参数；$\boldsymbol{v}$ 是躲避者的控制参数．参数 $\boldsymbol{u}_i$ 从以空间 $L_{2[0,\infty)}$ 的原点为中心，ρ_i 为半径的闭球 $S(\rho_i)$ 里的函数 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i(\cdot)$ 中选取，参数 $\boldsymbol{v}$ 从球 $S(\sigma)\subset L_{2[0,\infty)}$ 里的函数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\cdot)$ 中选取．如果对于某一个 i，有 $\boldsymbol{x}_i = 0$，则认为对策(1)结束．

定义． 给定 $\boldsymbol{x}^0 = \{\boldsymbol{x}_{10}, \boldsymbol{x}_{20}, \cdots, \boldsymbol{x}_{m0}\}$，如果对任意函数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\cdot)$，$\boldsymbol{v}(\cdot) \in S(\sigma)$，都可以构造函数 $u_1 = u_1(\cdot)$，$u_2 = u_2(\cdot)$，$\cdots$，$u_m = u_m(\cdot)$，$u_1(\cdot) \in S(\rho_1)$，$u_2(\cdot) \in S(\rho_2)$，$\cdots$，$u_m(\cdot) \in S(\rho_m)$，使得对于标码 i 的某一个值 j，方程 $\dot{x}_j = A_jx_j - u_j(t) + v(t)$，$x_j(0) = x_{j0}$ 的解 $x_j = x_j(t)$，$0 \leqslant t < \infty$，在不超过数 $T(x^0)$ 的时间内落到原点 0：$x_j(\tau) = 0$，$\tau \in [0, T(x^0)]$，则称从初始状态 x^0 开始的对策 (1) 可以在时间 $T(x^0)$ 内完成追捕．求参数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 在每一时刻 $t \geqslant 0$ 的值 $u_1(t)$，$u_2(t)$，$\cdots$，$u_m(t)$ 的时候，可以使用状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 在同一时刻 $t \geqslant 0$ 的值 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$ 和函数 $v(s)$，$0 \leqslant s \leqslant t$．

用 $\boldsymbol{z}_1^i(t), \boldsymbol{z}_2^i(t), \cdots, \boldsymbol{z}_n^i(t), t \in [0, \infty)$ 表示函数阵 e^{-A_it}，$i = 1, 2, \cdots, m$ 的行向量．

定理． 设

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m} \rho_i \tag{2}$$

且

$$(\rho_1 - \varepsilon_0)^2 + (\rho_2 - \varepsilon_0)^2 + \cdots + (\rho_m - \varepsilon_0)^2 \geqslant \sigma^2, \tag{3}$$

则当

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{v},\ v(\cdot) \in S(\sigma),$$
$$\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{x}_{i0}$$

的可达集合 G_i 中的非零点 $\bar{x}_i \in G_i$ 皆满足条件

$$\frac{1}{\min\limits_{\sum_{k=1}^{n} g_i^k \bar{x}_i^k = 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} g_i^k \boldsymbol{z}_k^i(\cdot) \right\|_{L_{2[0,T(\boldsymbol{x}^0)]}}} \leqslant \varepsilon_0,\ i = 1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

时，从点 $\boldsymbol{x}^0$ 开始的对策(1)可以在时间 $mT(\boldsymbol{x}^0)$ 内完成追捕．

本文于 1983 年 6 月 30 日收到．

为了证明定理，先给出一个引理.

研究用方程

$$\dot{x} = Ax - w \tag{5}$$

描述的控制系统，其中 $x \in R^n$，A 是常阵，w 是控制参数，设 $w = w(\cdot) \in S(\varepsilon) \subset L_{2[0,\infty)}$，$\varepsilon > 0$，系统(5)的终止集合是空间 R^n 的原点.

对于系统(5)，下面研究在有限时间内，把状态 x 从初始状态 x_0 转移到原点 0 的问题(能控性问题).

用 $z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t), t \in [0,\infty)$ 表示函数阵 e^{-At} 的行向量.

引理. 如果

$$\frac{1}{\min\limits_{\sum_{k=1}^{n} g^k x_0^k = 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} g^k z_k(\cdot) \right\|_{L_{2[0,T(x_0)]}}} \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

则系统(5)可以在时间 $T(x_0)$ 内把状态 x 从初始状态 x_0 转移到原点 0.

根据引理容易得到定理的证明.

推论 1. 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均为三角形常阵，其对角线上的元素 $a_{11}^{(i)}, a_{22}^{(i)}, \cdots, a_{nn}^{(i)}$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 皆非正. 则当

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_m^2 > \sigma^2$$

时，从任意初始状态 $x^0 = \{x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}\}$ 开始的对策(1)都可以在某一个时间 $T(x^0)$ 内完成追捕.

推论 2. 如果存在正常数 $d > 0$，使得对任意 $i, i = 1, 2, \cdots, m$ 和数 $t > 0$，皆有

$$\|e^{A_i t}\| \leqslant d,$$

则当

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_m^2 > \sigma^2$$

时，从任意初始状态 $x^0 = \{x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}\}$ 开始的对策(1)都可以在某一个时间 $T(x^0)$ 内完成追捕.

参 考 文 献

[1] Сатимов н., Рихсиев Б. Б., Хамдамов А. А., О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями, Математический сборник, Новая серия, Том **118**, № 4 (8), 1982.

ON THE PURSUIT FOR LINEAR DIFFERENTIAL GAMES OF MANY FACES WITH INTEGRAL RESTRICTION

YAN YANGKUI

(Shanxi University, Taiyuan, Shanxi)

ABSTRACT

In this paper, a sufficient condition to possibly complete the pursuit for linear differential games of many faces is obtained. It may serve as an inference to deduct the results in [1].