第11卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1985

求解释结构模型骨架阵的一种算法

黄志同　魏　谷　熊焕新
(华 东 工 程 学 院)

摘　　要

本文利用文献[1]提出的等可达类、基本元素、导出元素的概念,改进了文献[1]中求骨架阵的算法。新算法具有程序简单、存贮单元少、计算速度快等特点。

一、基 本 定 理

定理. 若M是可达阵,非对角线上某元素 $m_{ij}=1$. N为如下矩阵,除 $n_{ij}=0$ 外,其它元素与M的对应元素相同,即

$$n_{pq}=m_{pq}\quad(p\neq i\text{ 或 }q\neq j),\ n_{ij}=0,\tag{1}$$

则有 $N^2=M$, 或 $N^2=N$, 两者必居其一.

证. 因M是可达阵,故有 $M=M^2$,即

$$m_{pq}=\bigvee_r(m_{pr}\wedge m_{rq}).\tag{2}$$

令 $M'=N^2$, 则

$$m'_{pq}=\bigvee_r(n_{pr}\wedge n_{rq}).\tag{3}$$

1) 在 $p\neq i$ 且 $q\neq j$ 时,由式(3),(1),(2)知:

$$m'_{pq}=\bigvee_r(m_{pr}\wedge m_{rq})=m_{pq}.\tag{4}$$

2) 在 $p=i$ 但 $q\neq j$ 时,由式(3),(1)知:

$$\begin{aligned}m'_{iq}&=\bigvee_r(n_{ir}\wedge n_{rq})=\left[\bigvee_{r\neq j}(n_{ir}\wedge n_{rq})\right]\vee[n_{ij}\wedge n_{jq}]\\&=\bigvee_{r\neq j}(n_{ir}\wedge n_{rq})=\bigvee_{r\neq j}(m_{ir}\wedge m_{rq}).\end{aligned}\tag{5}$$

在M中,m_{iq}非0即1. 下面分两种情况:

a) 如果 $m_{iq}=1$, 则由式(5)

$$\begin{aligned}m'_{iq}&=\left[\bigvee_{r\neq j,\,r\neq q}(m_{ir}\wedge m_{rq})\right]\vee(m_{iq}\wedge m_{qq})\\&=\left[\bigvee_{r\neq j,\,r\neq q}(m_{ir}\wedge m_{rq})\right]\vee(1\wedge 1)=1=m_{iq};\end{aligned}\tag{6}$$

本文于1983年7月19日收到.

b) 如果 $m_{iq}=0$，由(2)式 $m_{iq}=\bigvee_r(m_{ir}\wedge m_{rq})=0$，即 $\forall r$ 有 $(m_{ir}\wedge m_{rq})=0$，代入(5)式有

$$m'_{iq}=0=m_{iq}. \tag{7}$$

结合(6),(7)两式,知在 $p=i$ 但 $q\neq j$ 时,恒有

$$m'_{iq}=m_{iq}. \tag{8}$$

3) 在 $p\neq i$ 但 $q=j$ 时,同上可得

$$m'_{pj}=m_{pj}. \tag{9}$$

结合(4),(8),(9)式可得 $m'_{pq}=m_{pq}(p\neq i$ 或 $q\neq j)$,即M'与M两矩阵中,除第 i 行第 j 列交叉的那个元素外,其它元素对应相同。

但 M' 是布尔阵,m'_{ij} 非 0 即 1. $m'_{ij}=1$ 时,有 $M'=N^2=M$;$m'_{ij}=0$ 时,有 $M'=N^2=N$. 证毕.

系 1. 若 $N^2=M$,则 $N\in[M]$;若 $N^2=N$,则 $N\notin[M]$.

证. 若 $N^2=M$,则 $N^4=N^2\cdot N^2=M\cdot M=M$, $N^8=N^4$. $N^4=M$,……. 即 $T_r(N)=M$,$N\in[M]$. 若 $N^2=N$,则N本身是一可达阵. 而 $N\neq M$,故 $N\notin[M]$. 证毕.

系 2. $N^2=M\Longleftrightarrow m_{ij}=1$ 是导出元素;

$N^2=N\Longleftrightarrow m_{ij}=1$ 是基本元素.

证. 由系 1 及定理,此结论是显然的. 证毕.

综合上述结论可知,$m'_{ij}=1$ 时,有 $N^2=M$,m_{ij} 是导出元素;$m'_{ij}=0$ 时,有 $N^2=N$,m_{ij} 是基本元素. 因此判断可达阵M中 $m_{ij}=1$ 是导出元素还是基本元素时,只要计算 $n^2_{ij}=m'_{ij}=\bigvee_k(n_{ik}\wedge n_{kj})$ 一项即可,勿需计算整个 N^2.

考虑到骨架阵的求取是在级划分后进行的,若节点的次序按级排列将可达阵转化成文献[2]中的标准形,则主对角线左下方的元素均为0,见图 1. 有如下推论.

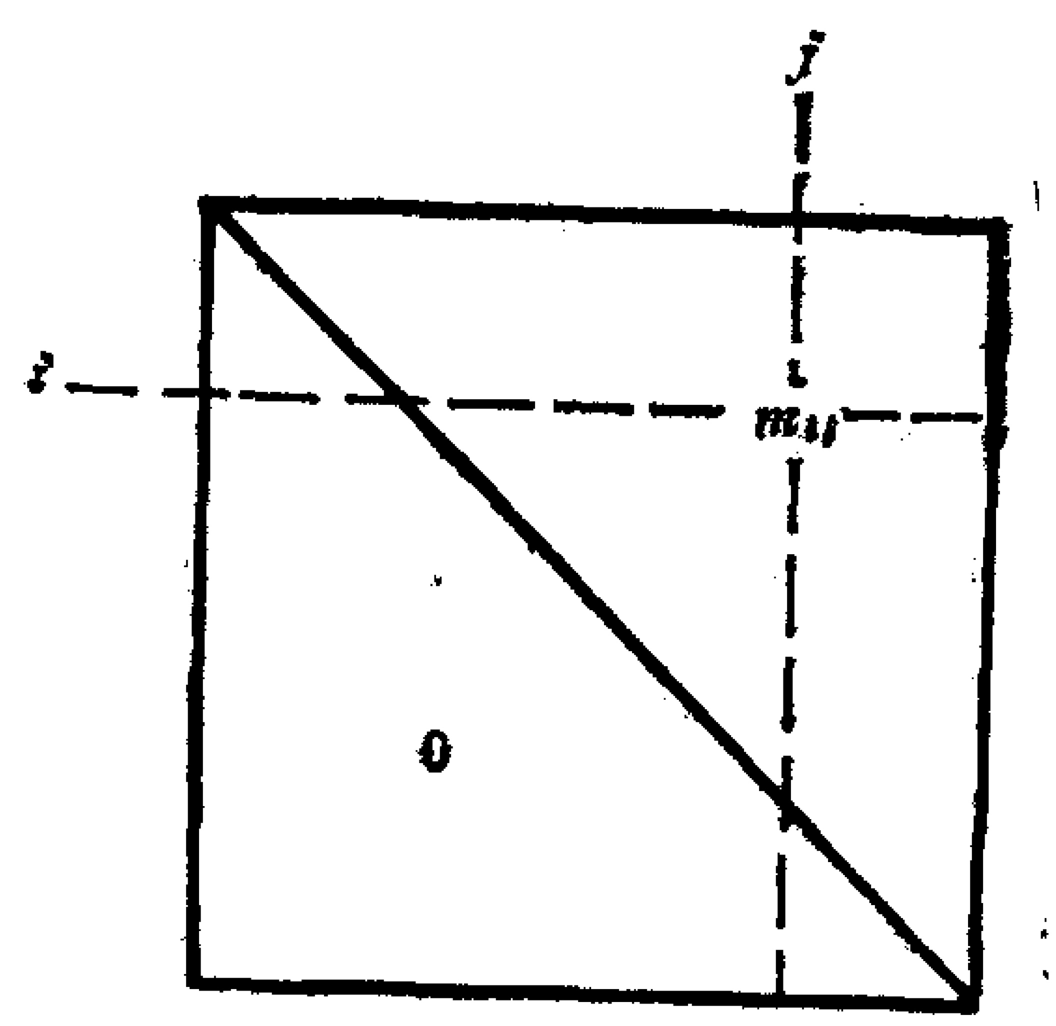

图 1

二、求骨架阵的算法

推论 1. 对标准型可达阵,有

$$n^2_{ij}=\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(m_{ik}\vee m_{kj}).$$

证. 因M,N矩阵主对角线左下方元素为 0,即 $n_{pq}=0\ (p>q)$,判断中,只需考虑 N^2 右上角元素 $(i<j)$ 即可. 而

$$\begin{aligned} n^2_{ij}&=\bigvee_{k=1}^{n}(n_{ik}\wedge n_{kj})=\left[\bigvee_{k=1}^{i-1}(n_{ik}\wedge n_{kj})\right]\vee\left[\bigvee_{k=i}^{j}(n_{ik}\wedge n_{kj})\right]\vee\left[\bigvee_{k=j+1}^{n}(n_{ik}\wedge n_{kj})\right]\\ &=0\vee\left[\bigvee_{k=i}^{j}(n_{ik}\wedge n_{kj})\right]\vee 0=\bigvee_{k=i}^{j}(n_{ik}\wedge n_{kj}). \end{aligned} \tag{10}$$

从(10)式知，对M阵中$m_{ij}=1$是基本元素还是导出元素的判断，只依赖于N阵中n_{ii}，$n_{ii+1},\cdots,n_{ij},n_{i+1j},\cdots,n_{jj}$这几个元素，而与$N$中其它元素无关．考虑到$n_{ij}=0$及$N$与$M$阵中只有一个元素不同，(10)式又可改写为

$$n_{ij}^2=\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(n_{ik}\wedge n_{kj})=\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(m_{ik}\wedge m_{kj}).\quad 证毕.$$

由上推论可得求骨架阵的算法框图(图2).

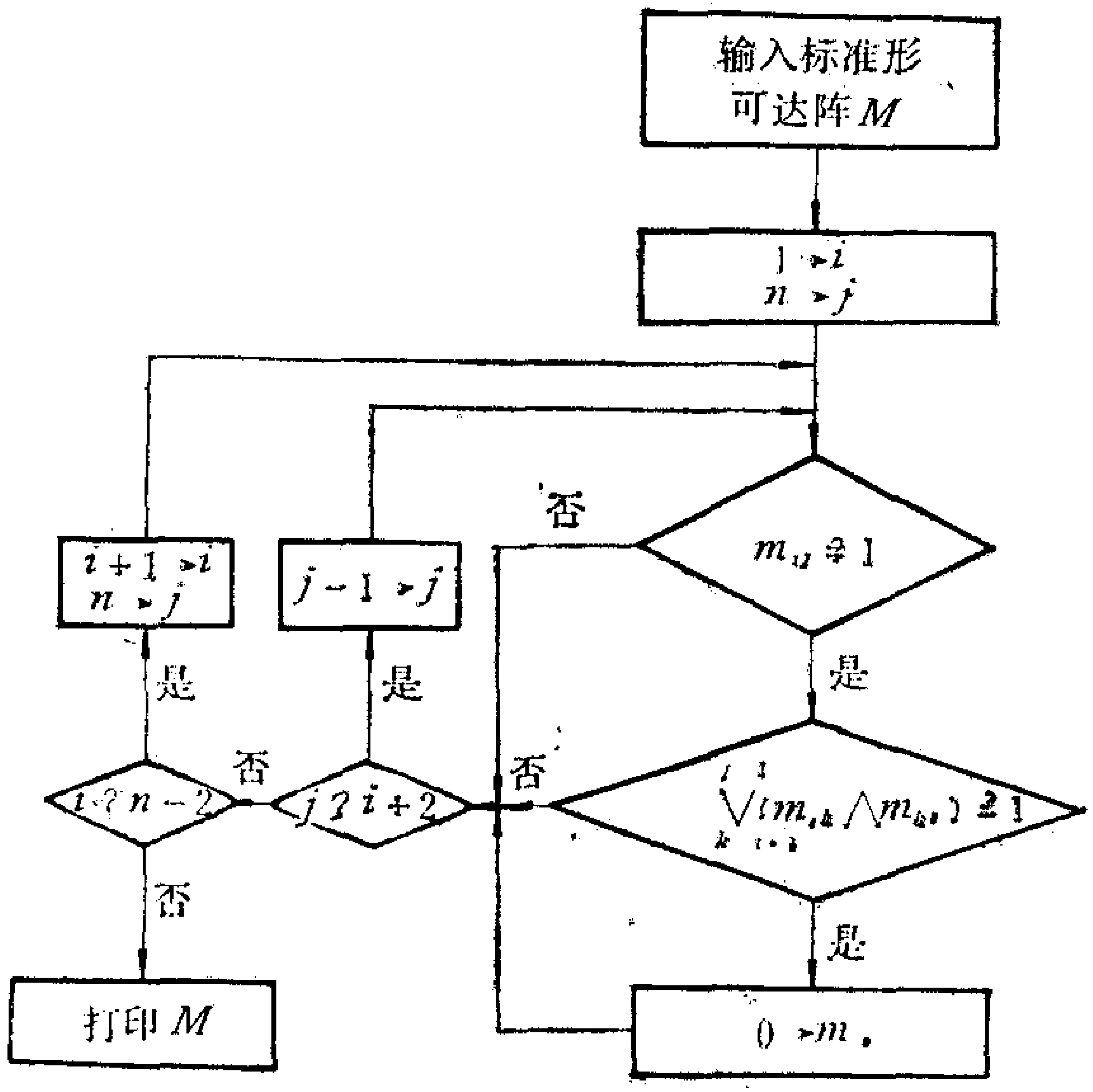

图 2

按本算法对可达阵中"1"元素判断时，行的顺序为$i=1、2、\cdots\cdots、n-2$，列的顺序为$j=n、n-1、\cdots\cdots、i+2$．在判断过程中，计算机对M阵的"1"元素逐个检查，如果$\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(m_{ik}\wedge m_{kj})=1$，则$m_{ij}$是导出元素，计算机将它从$M$阵中"划掉"；否则，$m_{ij}$是基本元素，保留在$M$阵中．程序执行完毕打印的$M$就是骨架阵$S_M$．应注意，在判断过程中，计算机中存贮的$M$阵，既非可达阵，也非骨架阵．在判断$m_{ij}=1$时，计算机已"划掉"可达阵中第$i$行以上及第$i$行里第$j$列以右的导出元素，参看图3．但这不影响本次判断的正确性，因M阵中$m_{kj},m_{ik}(k=i+1、i+2、\cdots\cdots、j-1)$未破坏．若$m_{ii+1}=1$，则它的跨度是1，必是基本元素，不需判断．

推论2. 如果将判断顺序改为$i=1,2,\cdots\cdots,n-2$，$j=i+2,i+3,\cdots,n$(见算法框图4)，结果仍是正确的．

证．记M为标准形可达阵，M''为计算机运行过程中存贮的M阵．计算机判断$m_{ij}=1$时，M与M''的差别仅在于在M''中已"划掉"第i行以上及第i行里第j列以左的导出元素，因此

$$a\triangleq\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(m_{ik}\wedge m_{kj})\geqslant\bigvee_{k=i+1}^{j-1}(m''_{ik}\wedge m''_{kj})\triangleq b.\tag{11}$$

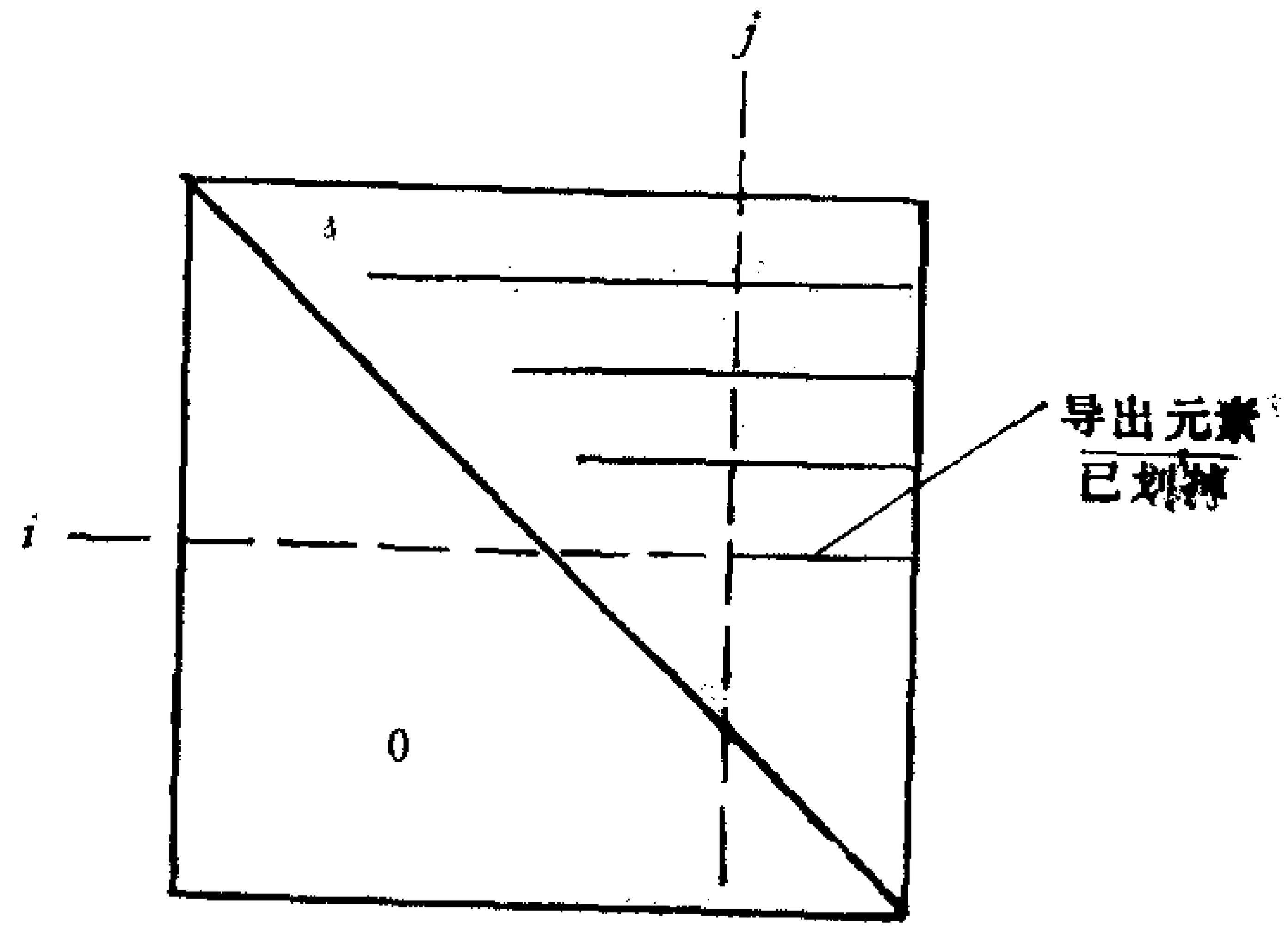

图 3

下面证明 $a = b$.

a）如果 $a = 1$，则 $m_{ij} = 1$ 是导出元素．从而在M的有向图中必有由两条或两条以上基本边组成的 $i \to j$ 的通路．设这通路是由基本边 $i \to r_1 \to r_2 \cdots r_s \to j$ 组成．节点序号已按级划分排列，且同级节点间无通路，故有

$$i < r_1 < r_2 \cdots r_s < j, \quad s \geqslant 1. \tag{12}$$

边 $i \to r_1$ 是基本边，$m_{ir_1} = 1$ 是基本元素，故在 M'' 中仍保留

$$m''_{ir_1} = 1. \tag{13}$$

又在M图中存在 $r_1 \to r_2 \to \cdots \to r_s \to j$ 的通路，故 $m_{r_1 j} = 1$．由(12)式知 $i < r_1 < j$，此"1"元素在 M'' 中未被破坏，即有

$$m''_{r_1 j} = 1. \tag{14}$$

由(11)，(13)，(14)式可得：

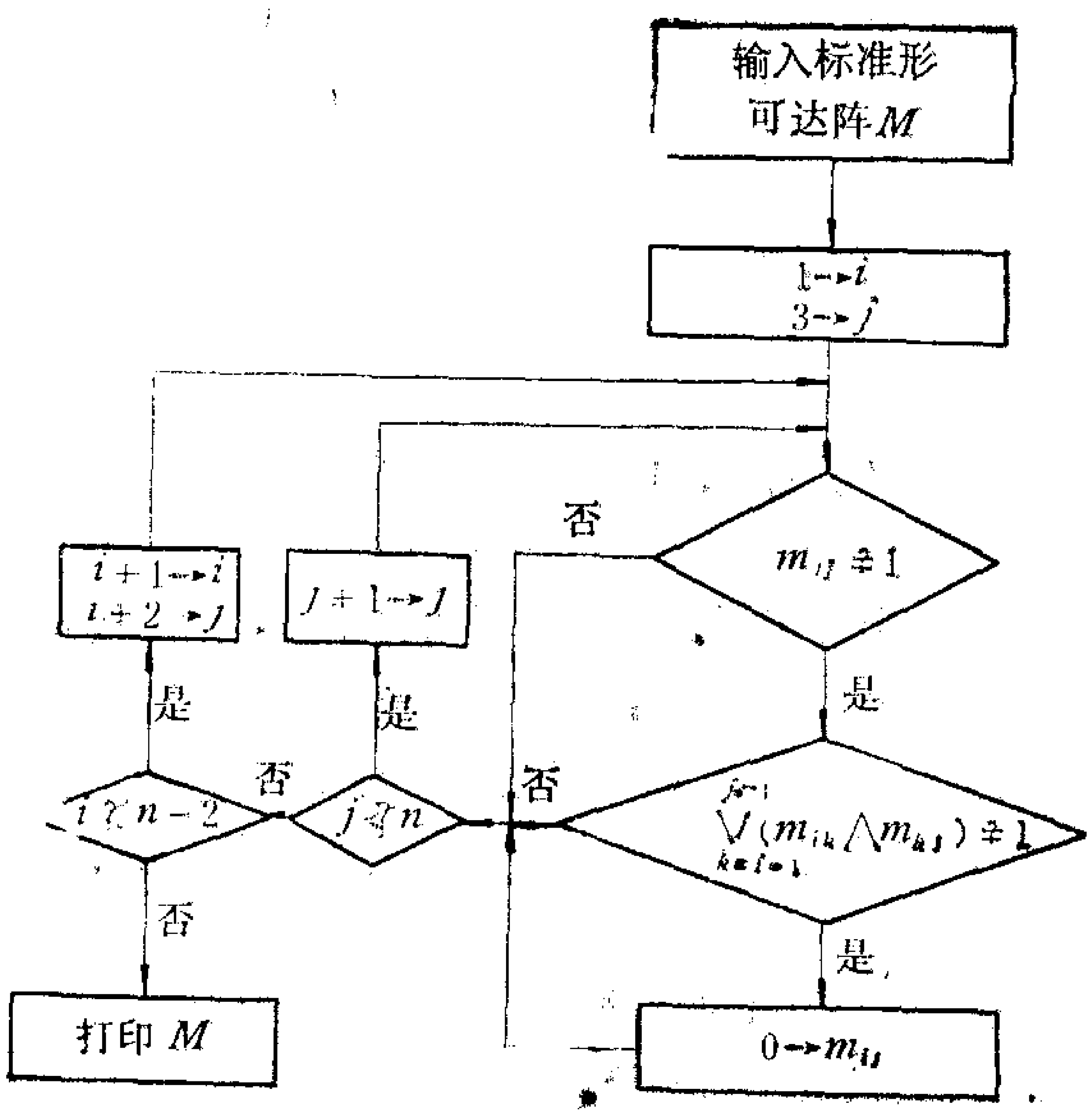

图 4

$$b = \bigvee_{k=i+1}^{j-1} (m''_{ik} \wedge m''_{kj}) = (m''_{ir_1} \wedge m''_{r_1 j}) \vee \left[\bigvee_{k=i+1, k \neq r_1}^{j-1} (m''_{ik} \wedge m''_{kj}) \right] = 1.$$

由此证得 $a = 1 \Rightarrow b = 1$.

b) 如果 $b = 1$, 由 (11) 式知 $a = 1$, 即 $b = 1 \Rightarrow a = 1$. a 和 b 都是布尔数，因此 $a = b$. 这说明，在判断 $m_{ij} = 1$ 是基本元素还是导出元素时，用 a 和 b 的结果是一致的. 证毕.

参 考 文 献

[1] 黄志同，解释结构模型中的级划分和骨架阵，华东工程学院学报，1982 年第四期，93—102.

[2] Warfield, J. N., Toward Interpretation of Complex Structural Models, *IEEE Trans. Syst. Man. and Cybern.*, 1974, 405—417.

[3] Lendaris, G. G., Structural Modeling—— A Tutorial Guide, *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.*, 1980, 807—840.

[4] Waller, R. J., Contextual Relations and Mathematical Relations in Interpretive Structural Modeling, *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.*, 1980, 143—144.

AN ALGORITHM FOR FINDING SKELETON MATRICES IN INTERPRETIVE STRUCTURAL MODELING

Huang Zhitong Wei Gu Xiong Huanxin

(East China Institute of Technology)

Abstract

Based on the concepts of equi-reachability class and basic entries, induced entries introduced in [1], a new algorithm for finding the skeleton matrices in interpretive structural modeling is given in this paper. The new algorithm has the advantages of simpler program, less memory space and faster computing speed.

(上接第 363 页)

业环境中的专家系统、部级决策专家系统等. 10)人工智能在经济模型与分析中的应用. 包括经济政策的辅助设计、经济模型中的模式识别方法，自然语言分析在经济模型中的应用、知识库在建立经济模型中的应用等. 11) 人工智能在商业中的应用. 包括信用估计系统，预测技术扩散范围的专家系统、新产品引进及服务专家系统、制造加工系统综合问题求解等. 12) 人工智能在法律方面的应用，包括政府机关的专家咨询系统，法律顾问专家系统等. 13) 策略分析与多级判定. 包括多目标优化方法与产生式系统、人工智能与多目标决策、市场竞争的经验估计、银行财政与会计、政策分析中人工智能的应用等.

这次会议反映了人工智能研究与应用的新动向，以及经济与管理问题研究的新方法. 也反映了人工智能、运筹学、经济与管理学科交叉发展的趋势.

中国自动化学会常务理事涂序彦同志参加了这次国际学术会议，宣读了论文“大系统的智能控制与管理”，并担任会议的执行主席之一.