第11卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 4
1985 年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1985

“冻结系数法”应用范围的新结果

徐 道 义
(四川绵阳师范专科学校)

摘 要

本文给出了一类时变线性系统稳定性的判定准则，从而指出了一类具体的时变线性系统应用“冻结系数法”的可靠性，文中的方法适用于线性高阶微分方程描述的系统，且判据简洁，易于应用.

一、一般时变线性系统

工程问题中常常遇到如下线性时变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态向量，$A(t)$ 是关于变量 t 的 n 阶连续函数矩阵. 为了确定这种系统的性能，首先要判定其稳定性. 在变系数系统的设计工作中常用“冻结系数法”，即在系统(1)中，由固定 t 而得的任意线性定常系统的稳定性来推测系统(1)的稳定性的方法[1]. 文献[1](p.113)希望研究此法的适用界限及某些特殊系统使用此法的正确性. 基于此，本文利用 Ляпунов 矩阵方程，构造二次型 Ляпунов 函数，得到了“冻结系数法”应用范围的一些新结果.

定理 1. 在系统(1)中，$A(t)$是关于变量 t 的连续可微矩阵，设 $C(t)$ 是实对称矩阵且其特征根均大于某一确定的正常数，$\lambda_i(t)$是由矩阵方程

$$A^T(t)B(t)+B(t)A(t)=-C(t) \tag{2}$$

确定的矩阵 $B(t)$ 的特征根，且 $\mathrm{Re}\lambda_i(t)\geqslant\eta(i=1,2,\cdots,n;\eta>0;\forall t>0)$. 则

1) 若矩阵 $D(t)\triangleq\dot{B}(t)-C(t)$ 常负，则系统(1)的平衡态是稳定的;

2) 若 $D(t)$ 的特征根 $\alpha_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$均满足 $\mathrm{Re}\alpha_i(t)\leqslant-\delta$ $(\forall t>0,\delta>0)$，则系统(1)的平衡态是渐近稳定的.

证明. 取系统(1)的Ляпунов 函数为 $V(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}^TB(t)\boldsymbol{x}$，显然 $V(\boldsymbol{x},t)$是正定的，沿着系统(1)对 $V(\boldsymbol{x},t)$ 求关于变量 t 的导数得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x},t)&=\dot{\boldsymbol{x}}^TB(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\dot{B}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TB(t)\dot{\boldsymbol{x}}\\&=(A(t)\boldsymbol{x})^TB(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\dot{B}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TB(t)A(t)\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^TA^T(t)B(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\dot{B}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TB(t)A(t)\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^T[A^T(t)B(t)+B(t)A(t)+\dot{B}(t)]\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

本文于1983年9月23日收到.

由条件(2)，得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}^T[\dot{B}(t) - C(t)]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T D(t)\boldsymbol{x}.$$

当 $D(t)$ 满足 2)的条件时，

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}^T D(t)\boldsymbol{x} \leqslant -\delta \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x},$$

即 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$是负定的．同理，当 $D(t)$ 满足 1)的条件时，$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是常负的，由 Ляпунов 稳定性的有关定理[2]，可得到定理 1 的全部结论．证毕．

注 1. 在 Ляпунов 矩阵方程

$$A^T B + BA = -C \tag{3}$$

中，若矩阵 B, C 对称正定，则矩阵 B 必稳定，故定理 1 的条件保证了对于任何固定的 t，矩阵 $A(t)$ 的特征根具有负实部．也就是说，满足定理 1 条件的时变线性系统，其稳定性与"冻结系数法"获得的结论一致．

注 2. 从 Ляпунов 矩阵方程(2)求解矩阵 $B(t)$ 已有较深入的研究[3]．故定理 1 易于实现．

二、高阶线性时变系统

引理 1[4]. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 是由方程(3)决定的矩阵 B 的特征根，则

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \geqslant \frac{\det C}{2^n|\det A|}.$$

引理 2. 设 x_0 为复系数多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n (a_0 \neq 0)$ 的任一复根，则

$$|x_0| < 1 + \frac{1}{|a_0|}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_i|\}.$$

先考查时变系统

$$\ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + \beta(t)y = 0, \tag{4}$$

其中 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是关于变量 t 的可微函数．

令 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 将方程(4)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \text{其中 } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(t) & -\alpha(t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

设 $B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{12}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix}$，将(5)式中的 $A(t)$ 代入方程(2)，并取(2)式中的

$$C(t) = \begin{pmatrix} 2\beta(t) & 0 \\ 0 & 2\alpha(t) \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} -2\beta b_{12} & b_{11} - \alpha b_{12} - \beta b_{22} \\ b_{11} - \alpha b_{12} - \beta b_{22} & 2b_{12} - 2\alpha b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

比较两边的对应元素得

$$b_{12} = 1;\ b_{22} = 1 + \frac{1}{\alpha};\ b_{11} = \alpha + \beta + \frac{\beta}{\alpha}. \tag{6}$$

由定理 1，得

定理 2. 在系统(4)中，若存在正常数 M_1, M_2, N_1, N_2 使得 $M_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant N_1$, $M_2 \leqslant \beta(t) \leqslant N_2$，且存在充分小的正数 ε 使得

$$\dot{\alpha} + \dot{\beta} + \frac{\dot{\beta}\alpha - \dot{\alpha}\beta}{\alpha^2} - 2\beta < -\varepsilon \text{ 及 } -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} - 2\alpha < -\varepsilon, \tag{7}$$

则系统(4)的平衡态是渐近稳定的.

证明. 由(6)式及定理 2 的条件知矩阵 $B(t)$ 的特征多项式的系数有界，根据引理 2 知其特征根 α_1, α_2 有界，设它们的一个上界为 M，于是由引理 1 得

$$\alpha_1 \geqslant \frac{\det C}{4\alpha_2 |\det A|} = \frac{\alpha(t)\beta(t)}{\alpha_2\beta(t)} \geqslant \frac{M_1}{M} > 0; \quad \alpha_2 \geqslant \frac{M_1}{M} > 0,$$

又

$$\dot{B}(t) - C(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \frac{\dot{\beta}\alpha - \dot{\alpha}\beta}{\alpha^2} - 2\beta & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} - 2\alpha \end{pmatrix},$$

由条件(7)知矩阵 $D(t) = \dot{B}(t) - C(t)$ 满足定理 1 中 2)的条件，故系统(4)的平衡态是渐近稳定的. 证毕.

例 1. 容易验证系统 $\ddot{y} + (1.5 + \sin t)\dot{y} + y = 0$ 满足定理 2 的一切条件，故其平衡态是渐近稳定的.

当系统(4)中的 $\alpha(t)$ 为正常数时，有

推论. 若在系统(4)中 $\alpha > 0$ 为常数，$M_2 \leqslant \beta(t) \leqslant N_2$，且 $\dot{\beta}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - 2\beta < -\varepsilon < 0$，则系统(4)的平衡态渐近稳定.

例 2. 系统 $\ddot{y} + \dot{y} + \mathrm{arctg}\, t\, y = 0$ 中 $\alpha = 1$, $\beta(t) = \mathrm{arctg}\, t$，有

$$\dot{\beta}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - 2\beta = \frac{2}{1 + t^2} - 2\mathrm{arctg}\, t,$$

当 $t > 1$ 时其值小于负数 $-\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$，故此系统的平衡态是渐近稳定的.

注. 文献[5]也研究了系统(4)的稳定性（文中定理 2），但其中的判据对上面两例皆失效.

对于一般的高阶方程

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \tag{8}$$

可以化为一阶方程组

$$\dot{x} = A(t)x, \text{ 其中 } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \cdots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

由文献[6]的定理 2 容易得到:

引理 3. 若矩阵 $A(t)$ 的特征根均小于某一负常数，则其特征多项式的 Hurwitz 行列

式$\Delta(t) \geqslant \delta > 0$($\delta$ 为一确定的常数).

引理 4. 在系统 (9)中，若 $A(t)$ 的元素有界且对于所有的 t 其特征根均小于某一负常数，则此时(2)式中$B(t)$的所有特征根必大于某一正常数.

证明. 当 t 固定时，若取(2)式中的 $-C(t)$ 为 Барбашин 公式[2] 中二次型 w 的矩阵，则由 (2) 式决定的矩阵 $B(t)$ 的元素 b_{ij} 应与 Барбашин 公式中的 v_{ij} 相等，且 Барбашин 公式中$\triangle$与矩阵 $A(t)$ 的特征多项式的 Hurwitz 行列式的绝对值相等. 这后一事实，可以 $n=3$ 证明，对于一般的 n 同理可证.

当 $n=3$ 时，且 $A(t)$ 由(9)式确定，此时 Барбашин 公式中的$\triangle$为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_2 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_2 & -a_3 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & a_1 \end{vmatrix} = A(t) \text{ 的特征多项式的 Hurwitz 行列式.}$$

由引理 3 知 $\Delta \geqslant \delta > 0$，故 $b_{ij} = v_{ij}$ 有界. 再由引理 2 及引理 1，仿定理 2 的证明可知 $B(t)$ 的所有特征根必大于某一正常数.

由引理 4 立即可得:

定理 3. 若系统(8)的系数有界，且矩阵 $A(t)$ 与 $D(t) \triangleq \dot{B}(t) - C(t)$ (其定义同定理 1)的特征根均小于某一确定的负常数，则系统(8)的平衡态是渐近稳定的.

感谢宋健教授，王联、王慕秋副研究员的指导及单位领导和同志们的支持与帮助.

参　考　文　献

[1] 钱学森、宋　健，工程控制论，科学出版社，1980.
[2] 秦元勋、王联、王慕秋，运动稳定性与应用，科学出版社，1981，139—172.
[3] 王子才等，Lyapunov 矩阵方程的解法，哈尔滨工业大学学报，第 1 期(1983).
[4] S. Bialas, On the Lyapunov Matrix Equation, *IEEE* AC-**25** (1980), 813—814.
[5] F. Nakajima, A Stability Criterion of Diagonal Dominance Type, *SIAM J. Math. Anal.*5(1978), 815—824,
[6] 徐道义，华中师院学报，1982 年第 2 期.

A NEW RESULT FOR THE RANGE OF "FROZEN COEFFICIENT METHOD"

XU DAOYI
(*Mianyang Techer's College, Sichuan*)

ABSTRACT

In this paper, stability criterion for a class of linear time varying systems is given, and the reliability of the "frozen coefficient method" in application is also pointed out. The criterion can be used in systems described by linear high order differential equations. This is liable to be done in a simple way.

(上接第448页)

Title	1986	Place	Further Information
IFAC Workshop Modelling, Decisions and Games with Applications to Social Phenomena	August 11—15	Beijing, PRC	Prof. Zhang Si-Ying Dept. of Automatic Control Northeast Inst. of Technology Shenyang, Liaoning Province, PRC
IFAC Symposium Automation in Aquaculture	August 18—20	Trondheim, N	Prof. J. G. Balchen Norwegian Inst. of Technology N-7034 Trondheim NTH, Norway
5th IFAC Symposium Automation in Mining, Mineral and Metal Processing	August 24—28	Tokio, J	Prof. Y. Yoshitani Technological University of Nagaoka Dept. of Control Engineering Kamitomioka Nagaoka 949-54, Japan
4th IFAC/IFORS Symposium Large Scale Systems: Theory and Applications	August 26—29	Zurich, CH	Prof. M. Mansour IFAC/IFORS Symposium ETH Zentrum CH-8092 Zurich, Switzerland
IFAC/IFIP/IFORS Symposium Economics and Artificial Intelligence	September 2—4	Aix-en- Provence	Ms. E. Fayola & Ms. C. Frachon AFCET 156 Bd. Péreire F-75017 Paris, France
2nd IFAC Workshop Modelling and Control of Electric Power Plants	September 16—18	Philadelphia PA, USA	Dr. H. G. Kwatny, Prof. of Systems Engineering Drexel University Dept. of Mechan. Engg. & Mechanics Philadelphia, PA 19104, USA