第 11 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1985

分散能控系统的最小输入向量数与最小观测向量数[1)]

陈 兆 宽
（山 东 大 学）

摘　　要

线性系统的最小输入向量数与最小输出向量数是系统结构综合的重要问题，本文利用在分散信息结构下系统分散能控的结构条件，讨论分散能控系统的最小输入向量数与最小输出向量数.

一、问题的提出

文献 [1] 提出了线性系统的最经济结构综合问题，其指导思想是在满足给定的技术约束条件下，综合控制系统，使某经济目标函数为最小. 本文以分散信息结构下的分散能控性作为技术约束条件，以输入向量数或输出向量数作为经济目标函数.

设有如下两个站的分散控制系统：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{u} + B_2\boldsymbol{u}, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y}_1 = C_1\boldsymbol{x}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = C_2\boldsymbol{x}, \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维状态矢量，A 是 $n \times n$ 阶矩阵，B_1 和 B_2 分别是两个站的控制矩阵，C_1 和 C_2 分别是两个站的观测矩阵. 下面分为两个问题叙述：

问题 1. 设状态矩阵 A 已知，两个站的观测矩阵 C_1 和 C_2 也已知，要求综合出两个站的控制矩阵 B_1 和 B_2，使系统在分散信息结构下能控(以下简称分散能控)，且 B_1 和 B_2 列向量的总数为最少.

问题 2. 设状态矩阵 A 已知，两个站的控制矩阵 B_1 和 B_2 也已知，要求综合出两个站的观测矩阵 C_1 和 C_2，使这个系统是分散能控的，且使 C_1 和 C_2 的行向量总数为最少.

这两个问题的提法有对偶性，本文重点解决问题 1. 为此先讨论分散能控的结构条件.

文献 [2] 给出了分散能控性的定义和分散能控性的充要条件. 该文首先引入了站 j 能传送信息到站 i 的概念，用符号“$j \to i$”表示. 得到了如下的结果：

本文于 1983 年 2 月 28 日收到.
1) 中国科学院科学基金资助的课题.

$j \to i$ 的充要条件是

$$K_i \not\supseteq R_j, (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

这里 R_j 是 (A, B_j) 的能控子空间

$$R_j = \langle A | \mathrm{Im} B_j \rangle = \mathrm{Im} B_j + \cdots\cdots + A^{n-1} \mathrm{Im} B_j,$$

K_i 是 (C_i, A) 的不可观测子空间,

$$K_i = \bigcap_{r=1}^{n} Ker(C_i A^{r-1}).$$

在此基础上,文献 [2] 得到了分散能控的充要条件

$$X_1 + X_2 = R^n. \tag{1.4}$$

这里 X_1 和 X_2 是这样定义的: 令

$$\begin{aligned} B_i^* &= [B_i \vdots B_j], && \text{当 } i \to j \text{ 时}, \\ &= B_i; && \text{当 } i \not\to j \text{ 时}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} C_i^* &= \begin{bmatrix} C_i \\ \cdots \\ C_j \end{bmatrix}, && \text{当 } j \to i \text{ 时}, \\ &= C_i; && \text{当 } j \not\to i \text{ 时}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$R_i^* = \langle A | Im B_i^* \rangle, \qquad K_i^* = \bigcap_{r=1}^{n} Ker(C_i^* A^{r-1}), \tag{1.7}$$

$$X_i = R_i^* \cap K_i^{*\perp}, \qquad (i = 1, 2). \tag{1.8}$$

这里 $K_i^{*\perp}$ 是 K_i^* 在 R^n 中的正交余空间,考虑到关系式"$\longrightarrow$", 可以从 (1.4) 式得到分散能控系统的如下几种结构条件:

(i) $\{1 \to 2, 2 \to 1\}$ 得

$$K_1 \cap K_2 = 0, \ R_1 + R_2 = R^n, \ R_1 \not\subseteq K_2, \ R_2 \not\subseteq K_1; \tag{1.9}$$

(ii) $\{1 \to 2, 2 \not\to 1\}$ 得

$$R_2 = K_1, \ R_1 + R_2 = R^n, \ K_1 \cap K_2 = 0, \ K_2 \not\supseteq R_1; \tag{1.10}$$

(iii) $\{1 \not\to 2, 2 \to 1\}$ 得

$$R_1 = K_2, \ R_1 + R_2 = R^n, \ K_1 \cap K_2 = 0, \ K_1 \not\supseteq R_2; \tag{1.11}$$

(iv) $\{1 \not\to 2, 2 \not\to 1\}$ 得

$$K_1 = R_2, \ K_2 = R_1, \ K_1 \perp K_2, \ K_1 \oplus K_2 = R^n. \tag{1.12}$$

证明见附录 1.

二、问 题 的 解

分四种情形进行讨论.

定理 2.1. 设已知状态矩阵 A 及两个站的观测矩阵 C_1 和 C_2, 使得 $\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ \cdots \\ C_2 \end{bmatrix}, A\right)$ 构成完全能观对,为了构造具有 $\{1\to2, 2\to1\}$ 性能的分散能控系统,则两个站的控制输入向量的总数的最小值应等于矩阵 A 的循环指数 t.

证明. 由 (1.9) 式及文献 [3] 中的结论可知, 要使 $(A, [B_1 \vdots B_2])$ 构成完全能控对,

$[B_1 \vdots B_2]$ 的向量最少个数应等于矩阵 A 的循环指数，也即存在 t 个向量，

$$B=[b_1, b_2, \cdots\cdots, b_t], \tag{2.1}$$

使能控子空间 $\langle A|\mathrm{Im}B\rangle=R^n$．由于要实现分散能控，而且具有 $\{1\to2, 2\to1\}$，故 K_1 和 K_2 都不能为全空间．因此 (2.1) 式中至少存在一个向量．例如 b_1，使 $\langle A|\mathrm{Im}b_1\rangle \not\subseteq K_1$．下面分析 (2.1) 式中的其余 $(t-1)$ 个向量：

$$B'=[b_2, b_3, \cdots\cdots, b_t],$$

若其中至少存在一个向量 $b_j\in B'$，使

$$\langle A|\mathrm{Im}b_j\rangle \not\subseteq K_2, \tag{2.2}$$

则可令 $b_1\in B_2$，$b_j\in B_1$，(2.1) 式中其余的向量可以以任何方式分属于 B_1 和 B_2．这时必有 $R_1\not\subseteq K_2$，$R_2\not\subseteq K_1$．若 B' 中不存在满足 (2.2) 式的任何向量，则能控子空间 $\langle A|\mathrm{Im}B'\rangle$ 满足

$$\langle A|\mathrm{Im}B'\rangle\subseteq K_2. \tag{2.3}$$

这时必有

$$\langle A|\mathrm{Im}b_1\rangle \not\subseteq K_2. \tag{2.4}$$

由于 $K_1\cap K_2=0$，故这时可令 $b_2\in B_2$，$b_1\in B_1$，(2.1) 式中的其余向量可以以任何方式分属于 B_1 和 B_2．考虑到 (2.3) 和 (2.4) 式，这时必有

$$\langle A|\mathrm{Im}b_2\rangle \not\subseteq K_1, \qquad \langle A|\mathrm{Im}b_1\rangle \not\subseteq K_2.$$

所以，$R_1\not\subseteq K_2$，$R_2\not\subseteq K_1$，而且 $R_1+R_2=R^n$，$K_1\cap K_2=0$．

定理 2.1 证毕．

引理 2.1. 设 V 是矩阵 A 的不变子空间，令 $A|V$ 是 A 在 V 上的限制，设 $A|V$ 的循环指数是 k，则一定存在控制矩阵 B，使能控子空间 $\langle A|\mathrm{Im}B\rangle$ 满足

$$\langle A|\mathrm{Im}B\rangle=V, \tag{2.5}$$

而且满足 (2.5) 式的 B 的最少向量个数等于 k．

证．本引理的证明，与文献 [3] 定理 1.2 的证明相类似．故从略．

引理 2.2. 已知线性系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax+B_1u_1+B_2u_2, \tag{2.6}$$

令能控子空间 $R_1=\langle A|\mathrm{Im}B_1\rangle$，又设 $\mathscr{X}$ 是商空间 R^n/R_1，令 P 为 $R^n\to\mathscr{X}$ 的标准投影 (Canonical Projection)，则系统 (2.6) 作为集中控制系统完全能控的充要条件是在商空间中的系统

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}_2u_2 \tag{2.7}$$

为完全能控，这里 $\bar{A}$ 是 A 在 $\mathscr{X}$ 中的诱导映象．$\bar{x}=Px$，$\bar{B}_2=PB_2$．

证明．本引理的证明与文献 [3] 中命题 1.3 的证明相类似，故从略．

定理 2.2. 设已知状态矩阵 A 及两个站的观测矩阵 C_1 和 C_2，使得 $K_1\cap K_2=0$，令 $A|K_1$ 为 A 在 K_1 上的限制，$A|K_1$ 的循环指数为 t_1，设 $\bar{A}$ 为 A 在商空间 $\mathscr{X}=R^n/K_1$ 中的诱导映象．又令 $\bar{A}$ 在商空间 $\mathscr{X}$ 上的循环指数为 t_2．为了构造具有 $\{1\to2, 2\to1\}$ 性能的分散能控系统，则两个站的控制输入向量总数的最小值为 t_1+t_2．

证明. 由情形 (ii) 的分散能控的结构条件 (1.10) 知，$R_2 = K_1$，因此矩阵 B_2 的最小输入向量数应等于 t_1. 下面研究 B_1 矩阵的最少列数.

设 B_2^0 为某 t_1 列矩阵

$$B_2^0 = [b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{t_1}], \tag{2.8}$$

使得 $\langle A|\mathrm{Im}B_2^0\rangle = K_1$. 令 P_1 为 $R^n \to \mathscr{X} = R^n/K_1$ 的标准投影，因为 $PB_2^0 = 0$, $PA = \bar{A}P$, 又令 $Px = \bar{x}$, $\bar{x}$ 是商空间 $\mathscr{X}$ 中的状态，现将分散系统的状态方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1u_1 + B_2^0u_2 \tag{2.9}$$

作标准投影，即得

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}_1u_1, \tag{2.10}$$

这里 $\bar{B}_1 = PB_1$, 其列数与 B_1 的相同. 故在商空间的状态方程中，u_2 已不再存在. 由式 (1.10) 知 $R_1 + R_2 = R^n$. 即原状态方程作为集中控制系统考虑是完全能控的. 由引理 2.2 知，商空间的状态方程 (2.10) 必须完全能控，从方程 (2.10) 可知，u_1 的最小输入数不能小于诱导映象 $\bar{A}$ 在商空间 $\mathscr{X}$ 上的循环指数 t_2. 下面证明却好可以选取 $t_1 + t_2$ 个向量作为 B_1 和 B_2 的列向量，使系统 (1.1), (1.2), (1.3) 在情形 (ii) 下分散能控. 分两种情形进行讨论.

(a) 当 $K_1 \oplus K_2 \neq R^n$, 则取某 t_2 个向量组成 B_1^0, 将其代入 (2.10) 式，使 (2.10) 式成为完全能控. 于是

$$R_2 = \langle A|\mathrm{Im}B_2^0\rangle, \qquad R_1 = \langle A|\mathrm{Im}B_1^0\rangle, \tag{2.11}$$

由引理 2.2 知，原状态方程必完全能控，从而

$$R_1 + R_2 = R^n. \tag{2.12}$$

故这时必有

$$R_1 \not\subseteq K_2. \tag{2.13}$$

由 (2.11), (2.12) 及 (2.13) 式可知，这样选取的 B_1^0 和 B_2^0 满足情形 (ii) 的分散能控的结构条件 (2.10) 式. B_1^0 和 B_2^0 的向量总数正好是 $t_1 + t_2$, 而且不能再小于这个数. 于是情形 (a) 证明了本定理.

(b) 当 $K_1 \oplus K_2 = R^n$. 由于 K_1 和 K_2 都是 A 的不变子空间. 由线性空间的几何理论知，这时子空间 K_2 与商空间 $\mathscr{X} = R^n/R_1$ 代数同构. 于是 $A|K_2$ 的循环指数为 t_2. 由定理的条件知 $A|K_1$ 的循环指数是 t_1. 于是空间 K_1与K_2 各自可以分解为 t_1 个与 t_2 个循环不变子空间的直和，即

$$K_1 = K_{11} \oplus K_{12} \oplus \cdots\cdots \oplus K_{1t_1}, \tag{2.14}$$

$$K_2 = K_{21} \oplus K_{22} \oplus \cdots\cdots \oplus K_{2t_2}. \tag{2.15}$$

令 b_{2i} 为生成 K_{1i} 的循环向量 ($i = 1, 2, \cdots\cdots, t_1$), b_{1i} 为生成 K_{2i} 的循环向量 ($i = 1, 2, \cdots\cdots, t_2$), 则 $K_{1i} = \langle A|\mathrm{Im}b_{2i}\rangle$, $K_{2i} = \langle A|\mathrm{Im}b_{1i}\rangle$, 且

$$R^n = \left(\bigoplus_{i=1}^{t_1} \langle A|\mathrm{Im}b_{2i}\rangle \oplus \bigoplus_{j=1}^{t_2} \langle A|\mathrm{Im}b_{1j}\rangle\right).$$

现在令 $e_{1i} = b_{1i} + b_{2i}$, ($i = 1, 2, \cdots\cdots, t_2$), 则可以利用初等变换不改变向量组所构

成矩阵的秩的方法证明

$$R^n = \left(\sum_{i=1}^{t_1} \langle A|\mathrm{Im} b_{2i}\rangle\right) + \left(\sum_{j=1}^{t_2} \langle A|\mathrm{Im} e_{1j}\rangle\right). \tag{2.16}$$

现在选择 B_1^0 和 B_2^0 矩阵，令

$$B_1^0 = [e_{11}, e_{12}, \cdots\cdots, e_{1t_2}], \tag{2.17}$$

$$B_2^0 = [b_{21}, b_{22}, \cdots\cdots, b_{2t_1}], \tag{2.18}$$

于是

$$R_1 = \sum_{j=1}^{t_2} \langle A|\mathrm{Im} e_{1j}\rangle, \tag{2.19}$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{t_2} \langle A|\mathrm{Im} b_{2i}\rangle. \tag{2.20}$$

由作法知

$$R_2 = K_1,\ R_1 \supseteq K_2,\ R_1 + R_2 = R^n,\ K_1 \cap K_2 = 0, \tag{2.21}$$

由 (2.21) 式可知，这样选取的 B_1^0 和 B_2^0 满足情形 (ii) 下的结构条件 (1.10) 式，B_1^0 和 B_2^0 的向量总数正好是 $t_1 + t_2$，而且不能再比这个数少了．于是情形 (b) 证明了本定理．

定理 2.2 证毕．

对于情形 (iii) 也有类似于情形 (ii) 的定理，只要将标号 "1" 与 "2" 互换即可，兹不赘述．

定理 2.3. 设已知状态矩阵 A 及两个站的观测矩阵 C_1 和 C_2，使 $K_1 \perp K_2$，$K_1 \oplus K_2 = R^n$． 令 $A|K_1$ 为 A 在其不变子空间 K_1 上的限制，$A|K_2$ 为 A 在其不变子空间 K_2 上的限制．设 $A|K_1$ 的循环指数为 t_1，$A|K_2$ 的循环指数为 t_2，为了构造具有 $\{1 \nrightarrow 2, 2 \nrightarrow\}$ 性能的分散能控系统，则两个站的输入向量的总数的最小值应等于 $t_1 + t_2$．

证明．只要引用引理 2.1 和情形 (iv) 的结构条件 (1.12) 式就立即可证．

例． 设有两个站的分散系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2, \tag{2.22}$$

$$y_1 = C_1x, \qquad y_2 = C_2x, \tag{2.23}$$

这里

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} C_1 &= [1, 0, 2] \\ C_2 &= [0, 1, 0] \end{aligned} \tag{2.24}$$

矩阵 B_1 和 B_2 待综合，使系统分别在情形 (i) 和情形 (ii) 下是分散能控的，而且使两个站 B_1 和 B_2 的向量总数为最小．

解．先讨论情形 (i)．经计算

$$K_1 = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

容易看出 $K_1 \cap K_2 = 0$，$K_1 \oplus K_2 = R^3$． 由于 A 的 Jordan 标准形及其满秩相似阵为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix},\tag{2.25}$$

故 A 的循环指数为 2，于是 B_1 和 B_2 的最少输入向量总数应为 2. 例如令 $B_2=[1,0,-2]^T$，$B_1=[-2,0,1]^T$. 则可以验证 $R_1+R_2=R^3$，$R_1\not\subseteq K_2$，$R_2\not\subseteq K_1$，$K_1\cap K_2=0$. 故上述确定的 B_1 和 B_2 就是在情形 (i) 下的一组解.

其次讨论情形 (ii)，$A|K_1$ 的循环指数为 1，例如生成这个循环不变子空间的循环向量可以取 $[-2,0,1]^T$. 由 $K_1\oplus K_2=R^3$ 知，K_2 与商空间 R^3/K_1 代数同构，$A|K_2$ 的循环指数为 1，生成这个子空间的循环向量为 $[1,0,-2]^T$，故按定理 2.2，情形 (ii) 下综合解 B_1 和 B_2 的向量总数应为 2，例如按定理 2.2 的证明中所指出的方法可以取

$$B_2=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}-2 & +1\\ 0 & +0\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}.\tag{2.26}$$

容易证明这时必有

$R_2=K_1$，$R_1\not\subseteq K_2$，$R_1+R_2=R^3$，$K_1\cap K_2=0$，故式 (2.26) 就是在情形 (ii) 下的一组综合解.

后 记

本文可以看作在分散系统中最经济结构的一种提法. 与文献[1]中的提法略有差别，本文以输入向量的总数为结构的经济目标函数. 当然也可以模仿文献 [1] 所引入的结构的经济目标函数作进一步讨论.

张荣祥同志对本文的写作提出了宝贵的意见，在此表示感谢.

附 录 1

关于分散能控性的四种结构条件的证明.

对于情形 (i)，由于 $1\to 2$，$2\to 1$，所以 $K_2\not\supseteq R_1$，$K_1\not\supseteq R_2$，$R_1^*=\langle A|\mathrm{Im}[B_1 ⋮ B_2]\rangle$，

$$R_2^*=\langle A|\mathrm{Im}[B_2 ⋮ B_1]\rangle,\tag{附 1}$$

$$K_1^*=\bigcap_{r=1}^{n}K_{er}\left(\begin{bmatrix}C_1\\ \cdots\\ C_2\end{bmatrix}A^{r-1}\right),\quad K_2^*=\bigcap_{r=1}^{n}K_{er}\left(\begin{bmatrix}C_2\\ \cdots\\ C_1\end{bmatrix}A^{r-1}\right),\tag{附 2}$$

$$\therefore\quad X_1=X_2=R^n.\tag{附 3}$$

由(附 3) 式可知，在情形 (i) 下分散能控的充要条件除 $K_2\not\supseteq R_1$，$K_1\not\supseteq R_2$ 外，尚需

$$R_1^*=R_2^*=R^n,\tag{附 4}$$

$$K_1^{*\perp}=K_2^{*\perp}=R^n.\tag{附 5}$$

即矩阵对 $(A,[B_1 ⋮ B_2])$ 构成完全能控对，矩阵 $\left(\begin{bmatrix}C_1\\ \cdots\\ C_2\end{bmatrix},A\right)$ 构成完全能观对. 但由于 $\left(\begin{bmatrix}C_1\\ \cdots\\ C_2\end{bmatrix},A\right)$ 构成完全能观对的充要条件是 $K_1\cap K_2=0$；$(A,[B_1 ⋮ B_2])$ 构成完全能控对的充要条件是 $R_1+R_2=R^n$. 于是在情形 (i) 下的分散能控的充要条件为

$$K_1\cap K_2=0,\quad R_1+R_2=R^n,\quad R_1\not\subseteq K_2\quad R_2\not\subseteq K_1.\tag{附 6}$$

对于情形 (ii)，由于 $1\to 2$，$2\not\to 1$，所以

$$K_2 \not\supseteq R_1,\ K_1 \not\supseteq R_2, \tag{附 7}$$

$$R_2^* = R_2,\ K_1^* = K_1, \tag{附 8}$$

$$R^n = X_1 + X_2 = R_1^* \cap K_1^\perp + R_2 \cap K_2^{*\perp}. \tag{附 9}$$

由(附 7) 式可知　　$R_2 \perp K_1^\perp,\ [R_1^* \cap K_1^\perp] \perp [R_2 \cap K_2^{*\perp}],$　　(附 10)

故(附 9) 式中的“+”号实际上是直和．由于

$$K_1^\perp \oplus K_1 = R^n,\ (R_1^* \cap K_1^\perp) \subseteq K_1^\perp,\ (R_2 \cap K_2^{*\perp}) \subseteq K_1, \tag{附 11}$$

故在情形 (ii) 下分散能控的充要条件是：

$$R_2 = K_1,\ R_1 + R_2 = R^n,\ K_2^{*\perp} \supseteq R_2 = K_1,\ K_2 \not\supseteq R_1. \tag{附 12}$$

但是由于　　$K_2^* = K_1 \cap K_2,$　　(附 13)

要使 $K_2^{*\perp} \supseteq K_1$，当且仅当 $K_1 \cap K_2 = 0$，因此(附 12) 式等价于

$$R_2 = K_1,\ R_1 + R_2 = R^n,\ K_1 \cap K_2 = 0,\ K_2 \not\supseteq R_1, \tag{附 14}$$

(附 14) 式就是在情形 (ii) 下分散能控的结构条件．

对于情形 (iii)，可以模仿情形 (ii) 得到分散能控的结构条件为

$$R_1 = K_2,\ R_1 + R_2 = R^n,\ K_1 \cap K_2 = 0,\ K_1 \not\supseteq R_2. \tag{附 15}$$

对于情形 (iv)，由于 $1 \not\to 2,\ 2 \not\to 1$，所以

$$K_2 \supseteq R_1,\ K_1 \supseteq R_2. \tag{附 16}$$

$$K_1^* = K_1,\ K_2^* = K_2,\ R_1^* = R_1,\ R_2^* = R_2, \tag{附 17}$$

$$R^n = X_1 + X_2 = R_1 \cap K_1^\perp + R_2 \cap K_2^\perp. \tag{附 18}$$

由(附 16) 式知

$$R_1 \perp K_2^\perp,\ R_2 \perp K_1^\perp, \tag{附 19}$$

因此 (附 18) 式中的“+”号实际上是直和．而且由于

$$K_1 \oplus K_2 = R^n,\ K_2 \oplus K_2^\perp = R^n, \tag{附 20}$$

由 (附 20) 式及(附 18) 式可以推出情形 (iv) 下分散能控的结构条件为

$$K_1 = R_2,\ K_2 = R_1,\ K_1 \perp K_2,\ K_1 \oplus K_2 = R^n. \tag{附 21}$$

参　考　文　献

[1] 涂序彦，控制系统的最经济结构综合，自动化学报，第 8 卷第 2 期，1982 年，103—111 页.
[2] Kobayashi, H. Hanafusa, H. and Yoshikawa, T. Controllability Under Decentralized Information Structure, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23, 182—188.
[3] Wonham, W. M., Linear multivarialbe control,, Springer-Verlag, 1974.

MINIMAL NUMBER OF INPUTS OR OUTPUTS FOR DECENTRALIZED CONTROLLABLE SYSTEM

CHEN ZHAOKUAN
(Shandong University)

ABSTRACT

The minimal number of inputs or outputs for linear system is an important problem in structure synthesis of the system. In this paper the problem of minimal total number of inputs or outputs for decentralized controllable system is discussed, by using the structural condition of controllability under deentralized information structure.