第11卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1985

线性系统的结构经济控制

霍 伟
(北京航空学院)

摘 要

本文定义了线性系统结构经济控制的概念，给出了结构经济控制阵的构造方法，得到了一个结构阵是结构经济控制阵的充要条件，叙述了用结构经济控制的概念求线性定常系统的最经济控制阵的方法.

一、线性系统结构经济控制的定义

1974 年文献 [1] 提出了结构可控性的概念. 若一个 $k \times l$ 阶矩阵M中的元或者是固定的零元，或者是可彼此独立地取任意实数值的变元，则称M为 $k \times l$ 阶结构阵，记为 $M \in \boldsymbol{S}^{k\times l}$. M中变元的个数记为 $N(M)$. 当M中所有变元均取确定的实数值后所得到的矩阵 $\bar{M} \in \boldsymbol{R}^{k\times l}$ 称为M的一个实现. 对线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

式中 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$, $B \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$, 若存在 $\{A, B\}$ 的实现 $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 是可控的(即 rank $[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \cdots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = n$)，则称结构阵组 $\{A, B\}$ (或结构系统(1))是结构可控的.

1979 年文献[2]提出了最经济控制阵的概念. 对线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{A}\boldsymbol{x}(t) + \bar{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{2}$$

式中 $\bar{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\bar{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, 给定 $\bar{A}$, 若能确定 $\bar{B}$, 使 $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 可控且 $\bar{B}$ 中非零元个数最少，则称 $\bar{B}$ 为 $\bar{A}$ 的一个最经济控制阵. 文献 [3] 研究了利用 $\bar{A}$ 的 Jordan 标准型 $\bar{J} = X^{-1}\bar{A}X$ 及变换阵 X^{-1} 构造 $\bar{A}$ 的最经济控制阵 $\bar{B}$ 的方法.

本文所定义的结构经济控制的概念如下:

定义 1. 给定 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$, 若能确定 $B \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$, 使 $\{A, B\}$ 结构可控且B中变元个数 $N(B)$ 最少，则称B为A的一个结构经济控制阵，记为 $B \in \boldsymbol{B}(A)$.

二、预 备 知 识

设矩阵 $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若$P$经有限次行列互换后可化为$n$阶单位阵，则称$P$为$n$阶置换阵，记为 $P \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$. 对结构系统 (1) 若存在 $P_1 \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$ 使

本文于 1983 年 12 月 10 日收到.

$$P_1AP_1^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad (P_1^T \text{ 为 } P_1 \text{ 的转置}),$$

则称A是可约的，式中 $A_3 \in \boldsymbol{S}^{n_1\times n_1}(1 \leqslant n_1 < n)$. 若存在 $P_2 \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$ 使

$$[P_2AP_2^T, P_2B] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \vdots & B_1 \\ 0 & A_3 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

则称 $\{A, B\}$ 是可约的,式中 $A_3 \in \boldsymbol{S}^{n_2\times n_2}(1 \leqslant n_2 \leqslant n)$.

设 $M \in \boldsymbol{S}^{k\times l}$, M的所有实现所能达到的最大秩称为M的通秩 (Generic Rank)，记为 $\rho_g(M)$. M中任意一组彼此不同行不同列的变元称为M的一个独立元组，M的含变元个数最多的独立元组称为其最大独立元组，记为 $S_m(M)$. $S_m(M)$ 中元的个数记为 $|S_m(M)|$.

引理 1[5]. $\rho_g(M) = |S_m(M)|$.

定理 1[5]. 设 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$, $B \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$, 则

$$\{A, B\}\text{结构可控} \Longleftrightarrow \begin{cases} \{A, B\} \text{ 不可约}, \\ \rho_g([A, B]) = n. \end{cases}$$

除此之外,还需要以下图论知识.

有向图 $D = \{V, E\}$ 由顶点集 V 和有向边集 $E = \{(v, w) | v, w \in V\}$ 组成，其中有向边 (v, w) 表示从顶点 v 到顶点 w 的有方向的连线，称 $v(w)$ 为其起(终)点. 有向图 $D_s = \{V_1, E_1 | V_1 \subset V, E_1 \subset E\}$ 称为D的子图,若 D_s 是D的子图且 D_s 与D不相同，则称 D_s 是D的真子图.

若从有向图D的顶点 v 出发沿有向边的指向可达到顶点 w，则称w是从 v 可达的. 若D中任意两顶点间都彼此可达，则称D为强连通图. 仅有一个顶点的有向图也定义为强连通图. 若 D_s 是D的一个强连通子图，且在D中不能找到另一个强连通子图 D_s'，使 D_s 是 D_s' 的真子图，则称 D_s 为D的一个强支. 显然D中每个顶点均属于D的某个强支且各强支无公共顶点. 设D中共有 k 个强支 $D_{s1}, D_{s2}, \cdots, D_{sk}$, D的凝聚 D^* 是以D的强支为顶点， 用以下方法得到的有向图: 当且仅当D中至少有一条有向边从 D_{si} 的一个顶点到 D_{sj} 的一个顶点时，D^* 中有一条从顶点 D_{si} 到顶点 D_{sj} 的有向边. D中以顶点 v 为终点的有向边的条数称为 v 的入度. D^* 中入度为零的顶点所对应的强支称为D的第 I 类强支,其余顶点所对应的强支称为D的第 II 类强支.

对有向图 $D = \{V, E\}$，令 $V_1 \subset V$, $\Gamma(V_1) \triangleq \{v | (v, w) \in E, w \in V_1, v \in V\}$，记 V_1 和 $\Gamma(V_1)$ 中顶点个数为 $|V_1|$ 和 $|\Gamma(V_1)|$，则当存在 V_1 使 $|V_1| > |\Gamma(V_1)|$ 时，称D中有膨胀 (Dilation). 有向图D中顶点个数称为图的阶. 若给D中各顶点以确定的标号，则称其为标定有向图. n 阶标定有向图D与结构阵 $M = (m_{ij}) \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$ 按以下规律一一对应:

D中存在有向边 $(v_j, v_i) \Longleftrightarrow m_{ij}$ 是变元. M称为D的邻接矩阵. 对结构系统 (1)，$G(A)$ 定义为以 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为顶点,以A为邻接矩阵的 n 阶标定有向图; $G(A, B)$ 定义为以 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 为顶点，以$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{S}^{(n+m)\times(n+m)}$ 为邻接矩阵的 $n+m$ 阶标定有向图.

引理 2[1,5]. 若 n 阶标定有向图 D 的邻接矩阵为 M，则

D 是强连通图 $\Longleftrightarrow M$ 不可约；

D 中有膨胀 $\Longleftrightarrow \rho_g(M) < n$.

引理 3. 对结构系统 (1)，

1) $\{A, B\}$ 不可约 $\Longleftrightarrow G(A, B)$ 中每个顶点 x_i 都从某个顶点 u_j 可达.

2) 存在 $P \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$，使

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1r} & A_{1,r+1} \cdots A_{1s} & A_{1,s+1} \cdots A_{1k} \\ \ddots \quad \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ A_{rr} & A_{r,r+1} \cdots A_{rs} & A_{r,s+1} \cdots A_{rk} \\ & A_{r+1,r+1} \qquad & \\ & \ddots \qquad & \\ & \qquad A_{ss} & \\ & & A_{s+1,s+1} \qquad \\ & & \ddots \qquad \\ & & \qquad A_{kk} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

式中 $1 \leqslant k \leqslant n$，$0 \leqslant r < k$，$r \leqslant s \leqslant k$；$\forall i \in \underline{k}$，$A_{ii} \in \boldsymbol{S}^{n_i\times n_i}$ 不可约；$\forall i \in \underline{r}$，$N([A_{i,i+1}, \cdots, A_{ik}]) \neq 0$；$\forall i \in \{r+1, \cdots, s\}$，$\rho_g(A_{ii}) < n_i$；$\forall i \in \{s+1, \cdots, k\}$，$\rho_g(A_{ii}) = n_i$.

3) 对 2) 中的 P，若记

$$[PAP^T, PB] = \left[\begin{array}{ccc:c} A_{11} \cdots A_{1r} & A_{1,r+1} \cdots A_{1s} & A_{1,s+1} \cdots A_{1k} & B_1 \\ \ddots \quad \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ A_{rr} & A_{r,r+1} \cdots A_{rs} & A_{r,s+1} \cdots A_{rk} & B_r \\ & A_{r+1,r+1} \qquad & & B_{r+1} \\ & \ddots \qquad & & \vdots \\ & \qquad A_{ss} & & B_s \\ & & A_{s+1,s+1} \qquad & B_{s+1} \\ & & \ddots \qquad & \vdots \\ & & \qquad A_{kk} & B_k \end{array}\right], \tag{4}$$

则 $\{A, B\}$ 可约 $\Longleftrightarrow$ 存在 $t \in \{r+1, \cdots, k\}$，使 $N(B_t) = 0$.

证. 1) 见文献 [1].

2) 将 $G(A)$ 的顶点适当重新标定后，可使其第 II 类强支的邻接矩阵为 $A_{11}, \cdots, A_{rr}$；使有膨胀的第 I 类强支的邻接矩阵为 $A_{r+1,r+1}, \cdots, A_{ss}$；使无膨胀的第 I 类强支的邻接矩阵为 $A_{s+1,s+1}, \cdots, A_{kk}$. 再由邻接矩阵定义及引理 2 即知 $G(A)$ 的邻接矩阵从 A 变为 (3) 式.

3) 由 1) 及 $G(A, B)$ 的定义立即得证.

三、列最少结构经济控制阵的求法

给定 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，$B \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$. 若 $B \in \boldsymbol{B}(A)$，则由定理 1 知 $m \geqslant m_0 \triangleq \max\{n - \rho_g(A), 1\}$. 显然这时 $N(B) \geqslant m_0$.

定义 2. 给定 $A\in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，在 $B_0\in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$ 的前提下，若 $\{A, B_0\}$ 结构可控且 $N(B_0)$ 最少，则称 B_0 为 A 的一个列最少结构经济控制阵，记为 $B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$.

命题 1. 给定 $A\in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，$\forall B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$，$\forall B\in \boldsymbol{B}(A)$，则 $N(B_0)=N(B)$.

证. 由定理 1 易得证，故从略. ‖

命题 1 说明，A 的列最少结构经济控制阵是 A 的结构经济控制阵中列数最少者.

给定 $A\in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，共有四种情况：

情况 I. A 不可约且 $\rho_g(A)=n$ (此时 $m_0=1$).

命题 2. 若 A 不可约且 $\rho_g(A)=n$，$b_0\in \boldsymbol{S}^{n\times 1}$，则 $b_0\in \boldsymbol{B}_0(A)\Longleftrightarrow N(b_0)=1$.

证. 由引理 3 的 3) 及定理 1 立即得证.

情况 II. A 不可约且 $\rho_g(A)<n$ (此时 $m_0=n-\rho_g(A)$).

记 $\rho_g(A)=t$，由引理 1 知任取一个 $S_m(A)$，均有 $|S_m(A)|=t$. 设 $Sm(A)$ 中各元的行标为 $i_1,\cdots,i_t$，令 $\{i_{t+1},\cdots,i_n\}=\{1,\cdots,n\}-\{i_1,\cdots,i_t\}$，构造 $B_0=(b_{ij})\in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，使 $b_{i_{t+1},1}$, $b_{i_{t+2},2}$, $\cdots$, b_{i_n,m_0} 为变元，其余各元均为固定零元. 显然 $\rho_g([A, B_0])=|S_m([A, B_0])|=t+m_0=n$. 又因 $N(B_0)=m_0>0$，由引理 3 知 $\{A, B_0\}$ 不可约，故 $\{A, B_0\}$ 结构可控. 因 $B_0\in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$ 且 $N(B_0)=m_0$，故 $B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$. 由此可得

命题 3. 若 A 不可约且 $\rho_g(A)<n$，$B_0\in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，则

$$B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)\Longleftrightarrow\begin{cases}\rho_g([A, B_0])=n,\\ N(B_0)=m_0=n-\rho_g(A).\end{cases}$$

情况 III. A 可约且 $\rho_g(A)=n$ (此时 $m_0=1$)，

这时 $\forall b\in \boldsymbol{B}_0(A)$，由引理 3 知存在 $P\in \boldsymbol{P}^{n\times n}$，使

$$[PAP^T, Pb]=\left[\begin{array}{ccccccc:c} A_{11} & \cdots & A_{1r} & A_{1,r+1} & \cdots & A_{1k} & & b_1\\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ & & A_{rr} & A_{r,r+1} & \cdots & A_{rk} & & b_r\\ & & & A_{r+1,r+1} & & & & b_{r+1}\\ & & & & \ddots & & & \vdots\\ & & & & & A_{kk} & & b_k\end{array}\right]$$

具有 (4) 式的形式. 因 $\{A, b\}$ 不可约，故 $\forall i\in\{r+1,\cdots,k\}$，均有 $N(b_i)\geqslant 1$，从而 $N(b)\geqslant k-r$.

定义 $b_i^{(1)}\in \boldsymbol{S}^{n_i\times 1}$ 且使 $N(b_i^{(1)})=1(i=r+1,\cdots,k)$. 令

$$b_1\triangleq\begin{bmatrix}0\\ b_{r+1}^{(1)}\\ \vdots\\ b_k^{(1)}\end{bmatrix}\in \boldsymbol{S}^{n\times 1},\quad b_0\triangleq P^Tb_1,$$

由引理 3 知 $\{A, b_0\}$ 不可约. 又有 $\rho_g([A, b_0])=\rho_g(A)=n$，故 $\{A, b_0\}$ 结构可控. 因 $b_0\in \boldsymbol{S}^{n\times 1}$ 且 $N(b_0)=k-r$，故 $b_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$. 由此可得：

命题 4. 若 A 可约且 $\rho_g(A)=n$，$b_0\in \boldsymbol{S}^{n\times 1}$，记 $G(A)$ 中第 I 类强支的个数为 p_1，则

$$b_0\in \boldsymbol{B}_0(A)\Longleftrightarrow\begin{cases}\{A, b_0\}\ \text{不可约};\\ N(b_0)=p_1.\end{cases}$$

情况 IV. A 可约且 $\rho_g(A)<n$（此时 $m_0=n-\rho_g(A)$）.

定义 3. 设 n 阶标定有向图 D 的邻接矩阵为 A，由引理 3 知存在 $P\in \boldsymbol{P}^{n\times n}$，使 PAP^T 具有 (3) 式的形式：

$$PAP^T=\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{1r}A_{1,r+1}\cdots A_{1s}A_{1,s+1}\cdots A_{1k} \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{rr}A_{r,r+1}\cdots A_{rs}A_{r,s+1}\cdots A_{rk} \\ A_{r+1,r+1} \\ \ddots \\ A_{ss} \\ A_{s+1,s+1} \\ \ddots \\ A_{kk}\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix} A^{(1)}A^{(2)}_{s+1}\cdots A^{(2)}_k \\ A_{s+1,s+1} \\ \ddots \\ A_{kk}\end{bmatrix}. \tag{5}$$

记 $\rho_g(A^{(1)})=t_1$，显然在 $[A^{(1)}A^{(2)}_{s+1}\cdots A^{(2)}_k]$ 中可选出独立元组使其中含有 $A^{(1)}$ 中 t_1 个变元. 设在 $[A^{(1)}A^{(2)}_{s+1}\cdots A^{(2)}_k]$ 中共可选出 w 个具有上述性质的独立元组 $S_1, S_2,\cdots,S_w$（显然 w 为有限数），$\forall i\in \underline{w}$，$S_i$ 中有 t_1 个变元在 $A^{(1)}$ 中，其余变元分属于 $A^{(2)}_{s+1},\cdots,A^{(2)}_k$ 中的 q_i 个矩阵. 定义 $q_0=\max\{q_1,\cdots,q_w\}$，称 q_0 为 $G(A)$ 的最大分散数.

因为若不计对角块的排列顺序及各对角块中行列的排列顺序，(3) 式是唯一的，故易证 q_0 由 A 唯一确定.

由 q_0 的定义知在 $[A^{(1)}A^{(2)}_{s+1}\cdots A^{(2)}_k]$ 中可选出一个独立元组 S'，使 S' 中有 t_1 个元在 $A^{(1)}$ 中且其余元（设为 t_2 个）分属于 $A^{(2)}_{s+1},\cdots,A^{(2)}_k$ 中 q_0 个矩阵，记为 $a_{k_1},l_1,\cdots,a_{kt_2},l_{t_2}$. 因 $\forall i\in\{s+1,\cdots,k\}$，$\rho_g(A_{ii})=n_i$，故在 $A_{s+1,s+1},\cdots,A_{kk}$ 中共可选出 $\sum\limits_{i=s+1}^{k}n_i$ 个彼此不同行不同列的变元，从中去掉与 $a_{k_1},l_1,\cdots,a_{kt_2},l_{t_2}$ 同列的 t_2 个元，则剩下的变元和 S' 中的变元一起构成 PAP^T 的一个独立元组 S_0，S_0 中共有 $t_1+\sum\limits_{i=s+1}^{k}n_i$ 个元. 又由(5)式易知

$$\rho_g(PAP^T)=\rho_g(A^{(1)})+\sum_{i=s+1}^{k}\rho_g(A_{ii})=t_1+\sum_{i=s+1}^{k}n_i, \tag{6}$$

故 S_0 是 PAP^T 的最大独立元组. 与情况 II 一样可构造 $B_1\in\boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，使 $\rho_g([PAP^T,B_1])=n$ 且 $N(B_1)=n-\rho_g(A)$. 这时对

$$[PAP^T,B_1]=\left[\begin{array}{c:c} A^{(1)}\quad A^{(2)}_{s+1}\cdots A^{(2)}_k & B^{(1)} \\ A_{s+1,s+1} & B^{(2)}_{s+1} \\ \ddots & \vdots \\ A_k & B^{(2)}_k\end{array}\right]$$

不难证明：对 $i\in\{s+1,\cdots,k\}$，$N(B^{(2)}_i)\geqslant 1\Longleftrightarrow A^{(2)}_i$ 中有变元在 S_0 中. 考虑到 $A^{(2)}_{s+1},\cdots,A^{(2)}_k$ 中共有 q_0 个矩阵有变元在 S_0 中，故 $B^{(2)}_{s+1},\cdots,B^{(2)}_k$ 中共有 q_0 个矩阵含有变元. 再在 $B^{(2)}_{s+1},\cdots,B^{(2)}_k$ 中不含变元的 $(k-s)-q_0$ 个矩阵中各任意加入一个变元，这样 $N(B_1)=n-\rho_g(A)+(k-s)-q_0$. 定义 $B_0=P^TB_1$，显然 $\rho_g([A,B_0])=\rho_g([PAP^T,B_1])=n$. 把 $[PAP^T,B_1]$ 分块为

$$[PAP^T, B_1] = \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1r} & A_{1,r+1} \cdots A_{1s} & A_{1,s+1} \cdots A_{kk} & \vdots & B_1^{(1)} \\ \ddots \quad \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{rr} & A_{r,r+1} \cdots A_{rs} & A_{r,s+1} \cdots A_{rk} & \vdots & B_r^{(1)} \\ & A_{r+1,r+1} & & \vdots & B_{r+1}^{(1)} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & A_{ss} & & \vdots & B_s^{(1)} \\ & & A_{s+1,s+1} & \vdots & B_{s+1}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & A_{kk} & \vdots & B_k^{(2)} \end{bmatrix},$$

由 $\rho_g([PAP^T, B_1]) = n$ 知，$\forall i \in \{r+1, \cdots, s\}$，$\rho_g([A_{ii}, B_i^{(1)}]) = n_i$，而 $\rho_g(A_{ii}) < n$，故 $N(B_i^{(1)}) \geqslant 1$。又由 B_1 的构造知 $\forall i \in \{s+1, \cdots, k\}$，$N(B_i^{(2)}) \geqslant 1$，故 $\{A, B_0\}$ 不可约，从而知 $\{A, B_0\}$ 结构可控。又 $\forall \widetilde{B} \in \boldsymbol{B}_0(A)$，由 $\rho_g([A, \widetilde{B}]) = n$ 易知任取 $[PAP^T, P\widetilde{B}]$ 的一个最大独立元组 $\widetilde{S}$，则 $\widetilde{S}$ 中有 $\rho_g(A)$ 个元在 PAP^T 中，有 $n - \rho_g(A)$ 个元在 $P\widetilde{B}$ 中。又由(6)式知 $A^{(1)}$ 中有 t_1 个元在 $\widetilde{S}$ 中且除 $A^{(1)}$ 所在的列外，PAP^T 的每列均有一变元在 $\widetilde{S}$ 中。把 $[PAP^T, P\widetilde{B}]$ 分块为

$$[PAP^T, P\widetilde{B}] = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A_{s+1}^{(2)} \cdots A_k^{(2)} & \vdots & \widetilde{B}^{(1)} \\ & A_{s+1,s+1} & \vdots & \widetilde{B}_{s+1}^{(2)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & A_{kk} & \vdots & \widetilde{B}_k^{(2)} \end{bmatrix}.$$

$\forall i \in \{s+1, \cdots, k\}$，若 $\widetilde{B}_i^{(2)}$ 有变元在 $\widetilde{S}$ 中，则 A_{ii} 中最多有 $n_i - 1$ 个变元在 $\widetilde{S}$ 中，而 $\begin{bmatrix} A_i^{(2)} \\ A_{ii} \end{bmatrix}$ 每列均有变元在 $\widetilde{S}$ 中，故 $A_i^{(2)}$ 一定有变元在 $\widetilde{S}$ 中，从而由 q_0 的定义知 $\widetilde{B}_{s+1}^{(2)}, \cdots, \widetilde{B}_k^{(2)}$ 中最多有 q_0 个矩阵有变元在 $\widetilde{S}$ 中。而 $\widetilde{B}_{s+1}^{(2)}, \cdots, \widetilde{B}_k^{(2)}$ 中没有变元在 $\widetilde{S}$ 中的矩阵（这种矩阵至少有 $(k-s)-q_0$ 个）只要有一个不含变元，则 $\{A, \widetilde{B}\}$ 可约，导出矛盾。故 $N(\widetilde{B}) \geqslant n - \rho_g(A) + (k-s) - q_0$. 现 $\{A, B_0\}$ 结构可控，$B_0 \in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，$N(B_0) = n - \rho_g(A) + (k-s) - q_0$，故 $B_0 \in \boldsymbol{B}_0(A)$。由此可得：

命题 5. 若 A 可约，$\rho_g(A) < n$，记 $G(A)$ 中无膨胀的第 I 类强支的个数为 p，$G(A)$ 的最大分散数为 q_0，$B_0 \in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，则

$$B_0 \in \boldsymbol{B}_0(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{A, B_0\} \text{ 结构可控}, \\ N(B_0) = n - \rho_g(A) + p - q_0. \end{cases}$$

由 q_0 的定义立即可知命题 2—5 可归结为一个统一的命题，再利用命题 1 即可得到一个结构阵是结构经济控制阵的充要条件如下：

定理 2（主要结果）. 设 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，$B \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$，则

$$B \in \boldsymbol{B}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{A, B\} \text{ 结构可控}; \\ N(B) = n - \rho_g(A) + p - q_0. \end{cases}$$

式中 p 为 $G(A)$ 中无膨胀的第 I 类强支的个数，q_0 为 $G(A)$ 的最大分散数.

若 $G(A)$ 是不连通图，则可用以下定理进一步简化列最少结构经济控制阵的求法.

定理 3. 设 $A \in \boldsymbol{S}^{n\times n}$，若 $G(A)$ 是不连通图，存在 $P \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$，使

$$PAP^{T}=\begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{k_1,k_1} & & & \\ & & & A_{k_1+1,k_1+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{k_2k_2} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

式中 $2\leqslant k_2\leqslant n$；$\forall i\in \underline{k_2}$，$A_{ii}\in \boldsymbol{S}^{n_i\times n_i}$，$G(A_{ii})$ 是连通图；$\forall i\in \underline{k_1}$，$\rho_g(A_{ii})=n_i$；$\forall i\in \{k_1+1,\cdots,k_2\}$，$\rho_g(A_{ii})<n_i$.

对 $i\in \underline{k_1}$，记 $b_i\in \boldsymbol{B}_0(A_{ii})$；对 $i\in\{k_1+1,\cdots,k_2\}$，记 $B_i\in \boldsymbol{B}_0(A_{ii})$，令

$$B_0=\begin{cases} P^T\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_{k_1}\end{bmatrix}, & (\text{当 } k_1=k_2) \\ P^T\left[\begin{array}{ccc} & B_1 & \\ \hdashline & \vdots & \\ \hdashline & B_{k_1} & \\ \hdashline B_{k_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{k_2} \end{array}\right], & (\text{当 } k_1<k_2) \end{cases}$$

式中 $\forall i\in \underline{k_1}$，$B_i\triangleq[b_i,0]$，则 $B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$.

定理 3 的证明从略.

四、一般结构经济控制阵的求法

由定理 2 知，$\forall B\in \boldsymbol{B}(A)$，均有 $N(B)=n-\rho_g(A)+p-q_0\triangleq m_1\geqslant m_0$. 又显然可不失一般性地设 B 没有全为零的列，故 B 的列数 m 满足 $m_0\leqslant m\leqslant m_1$. 当 $m_1>m_0$ 时，$\forall m\in\{m_0,m_0+1,\cdots,m_1\}$，均可立即由任一 $B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$ 求出 A 的列数为 m 的结构经济控制阵 B. 其方法如下：

因 $m_1>m_0$，故 $\forall B_0\in \boldsymbol{B}_0(A)$，$B_0$ 中至少有一列不止一个变元，去掉这列中任意一个变元，得到 $B_0'\in \boldsymbol{S}^{n\times m_0}$，构造 $b\in \boldsymbol{S}^{n\times 1}$，使 $N(b)=1$ 且 b 中变元与去掉的那个变元同行. 定义 $B_1=[B_0',b_1]\in \boldsymbol{S}^{n\times(m_0+1)}$，因 B_1 中含变元的行标与 B_0 相同，由引理 3 知 $\{A,B_1\}$ 不可约. 又由引理 1 易知 $\rho_g([A,B_1])\geqslant \rho_g([A,B_0])=n$，故 $\{A,B_1\}$ 结构可控. 又 $N(B_1)=N(B_0)$，从而 $B_1\in \boldsymbol{B}(A)$.

若 $m>m_0+1$，则 B_1 中也至少有一列不止一个变元. 用与前面同样方法可构造 $B_2\in \boldsymbol{S}^{n\times(m_0+2)}$，使 $B_2\in \boldsymbol{B}(A)$. 如此不断做下去即可求得所要求的 B.

五、利用结构经济控制阵求 $\bar{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 的最经济控制阵 $\bar{B}$

利用结构经济控制阵求 $\bar{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 的最经济控制阵 $\bar{B}$ 的方法是：

1）将 $\bar{A}$ 中所有非零元改为变元，得到相应的结构阵 A；

2）用前面所述方法求出结构阵 $B \in \boldsymbol{B}(A)$；

3）令 B 中所有变元均任取一非零值，得到 B 的实现 $\bar{B}$. 若 $\operatorname{rank}[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \cdots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = n$，则由结构经济控制定义知 $\bar{B}$ 是 $\bar{A}$ 的最经济控制阵.

当 $\{A, B\}$ 结构可控时，$\{A, B\}$ 的几乎所有实现 $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 都是可控的[5]，故几乎所有的 $\bar{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 都可用此法求出其最经济控制阵. 因这种方法不用求 $\bar{A}$ 的 Jordan 标准型，也不需要作任何复杂计算，故是简单易行的.

本文在导师高为炳教授指导下完成，对他的热情帮助，笔者表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Lin Ching-tai, Structural Controllability, *IEEE* AC-**19** (1974), 201—208.
[2] 涂序彦，可控性可观测性的实用价值与"最经济结构"综合问题，全国控制理论及应用学术报告会论文集，科学出版社，1979 年.
[3] 陈兆宽、张荣祥，线性控制系统最经济结构综合的代数方法，自动化学报，**7**(1981)，171—178.
[4] 黄琳，生成元，经济控制与线性多变量控制系统，北京大学学报，No. 1 (1981)，25—36.
[5] R. W. Shields and J. B., Pearson Structural Controllability of Multiinput Linear Systems, *IEEE* AC-**21** (1976), 203—212.

STRUCTURAL ECONOMIC CONTROL OF LINEAR SYSTEMS

Huo Wei

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, the concept of "structural economic control" is defined, the method to construct the structural economic control matrices is given, a necessary and sufficient condition for a structural matrix to be the structural economic control matrix is obtained. The application of the concept of structural economic control to determining the most economic control matrices of a linear time-invariant system is stated.