第 11 卷 第 4 期　　自　动　化　学　报　　Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1985

求解非线性控制系统最优控制的罚函数方法

陈 祖 浩
(山 东 大 学)

摘　　要

本文在文献 [3, 4] 的基础上，研究了控制系统是非线性的情形下，带外(内)罚函数的非受限最优控制问题 $A_{k_0}(A_k)$ 趋于受限最优控制问题 A 的充分条件和必要条件.

一、引言及基本定理

考察受控过程

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.1}$$

$$x(a_u) = x_0 \in S_0, \quad x(b_u) = x_1 \in S_1, \tag{1.2}$$

此处 $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \cdots, f_n(\cdot))$: $\boldsymbol{R}^1 \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$. 记模

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad |u| = \sum_{i=1}^{m} |u_i|, \quad |f| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|.$$

设 $f(\cdot)$, $(t, x, u) \in I \times D \times U$, 对任意给定的 $t \in I$ 关于 (x, u) 连续,而对任意给定的 (x,u) 关于 t 为 L 可测,且有

$$|f(t, x, u)| \leqslant m(t), \tag{1.3}$$

$$|f(t, x, u) - f(t, \bar{x}, \bar{u})| \leqslant l(t)[|x - \bar{x}| + |u - \bar{u}|]. \tag{1.4}$$

此处 $m(t)$ 和 $l(t)$, $t \in I$, 是 L 可积; $I = [a, b]$ 长度有限但不为 0; D 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内有非空内部 $\mathring{D}$ 的集; U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 内的非空紧致集; S_0 和 S_1 是 $\mathring{D}$ 内的紧致子集，且 $S_0 \cap S_1 = \phi$. 于是对任意取定的值域在 U 的可测函数 $u(t)$, $t \in I$, 据 Carathèodary 定理, $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ 有满足 $x(a_u) = x_0 \in S_0$ 的唯一的绝对连续解 $x(t) \in \mathring{D}$, $t \in I_u = [a_u, b_u] \subset I$. 称 $\Delta[D] \triangleq \{u(t) | u(t) \in U$, $t \in I_u$, L 可测，对应的方程 (1.1) 的解 $x(t) \in D$, $t \in I_u$, $x(a_u) = x_0 \in S_0$, $x(b_u) = x_1 \in S_1\}$ 为容许控制类. $(u(t), x(t))$ 或 (x, u) 称为容许对[1]. 以后恒设 $\Delta[D]$ 非空. 从 S_0 紧致及 $m(t)$ 为 L 可积即知方程 (1.1) 对于 $u \in \Delta[D]$ 的解一致有界.

记 $\|u\| \triangleq \int_a^b |u(t)| dt$, 则所有 $\|u\| < +\infty$ 的可测函数 $u(t)$, $t \in I$, 构成 $L_1[I]$ 空间.

本文于 1982 年 7 月 29 日收到. 本文曾在 1982 年第三次全国控制理论及其应用学术交流会上宣读.

1) 也可取常见的逐段连续函数类来定义容许控制类(显然这是本文的特殊情形),后面的各定理仍将成立.

现对 $u\in\Delta[D]$，拓展为

$$\bar{u}(t)=\begin{cases}u(a_u), & a\leqslant t\leqslant a_u,\\ u(t), & a_u\leqslant t\leqslant b_u,\\ u(b_u), & b_u<t\leqslant b,\end{cases}\tag{1.5}$$

且认为 $\bar{u}\in\Delta[D]$，则 $\Delta[D]\subset L_1[I]$。仍记 $\bar{u}$ 为 u，其定义域表示为 I_u 或 I，后者按 (1.5) 式理解。又取 $L_1[I]$ 内某列紧集[1)]，记 $M[D]=M\cap\Delta[D]$，当 $u\in M[D]$ 时分别称 u 和相应的 (u,x) 为关于 $M[D]$ 的容许控制和容许对。有下面的基本定理：

定理 1.1. 设 $M[D]$ 非空和 $\{(u^k,x^k)\}$，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$，是关于 $M[D]$ 的容许对序列，则存在子序列，仍记 $\{(u^k,x^k)\}$，及函数对 (u,x)，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$，致使

1° $a_k\to a_u$，$b_k\to b$，a_u 和 $b_u\in I$；　(1.6)

$x^k(a_k)\to x(a_u)\in S_0$，$x^k(b_k)\to x(b_u)\in S_1$；　(1.7)

$u^k\to u$，按空间 $L_1[I]$ 内收敛的意义；　(1.8)

$$\lim_{k\to+\infty}\max_{t\in I_u}|x^k(t)-x(t)|=0.\tag{1.9}$$

2° 若 D 是闭集或 $D=\boldsymbol{R}^n$ 或 D 不等于 $\boldsymbol{R}^n$ 但 $x(t)\in D$，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$，则 (u,x) 是关于 $M[D]$ 的容许对.

3° 对任意给定的函数 $h(t,x,u)$，$(t,x,u)\in I\times D\times U$，关于 t 可测，$|h(\cdot)|\leqslant m_0(t)$ 及

$$|h(t,x,u)-h(t,\bar{x},\bar{u})|\leqslant l_0(t)[|x-\bar{x}|+|u-\bar{u}|].$$

此处 $m_0(t)$ 和 $l_0(t)$ 均 L 可积，则必有

$$\lim_{k\to+\infty}\left\{g(a_k,x^k(a_k);b_k,x^k(b_k))+\int_{a_k}^{b_k}h(t,x^k(t),u^k(t))dt\right\}$$
$$=g(a_u,x(a_u);b_u,x(b_u))+\int_{a_u}^{b_u}h(t,x(t),u(t))dt,$$

此处 $g(t,x;\bar{t},\bar{x})\in C$，$(t,x;\bar{t},\bar{x})\in I\times D\times I\times D$.

证. 首先，注意到 I，S_0，S_1 是紧集，$u^k\in M$，即得 (1.6)—(1.8) 式成立. 从数学理论知，相应于 $u(t)$，$t\in I$ 的方程 (1.1) 满足初值 $x(a_u)=x_0$ 的解 $x(t)$，$t\in[a_u,b_u]\subset[a_k,b_k]$ 唯一地存在；又顾及 $(x^k(t),u^k(t))$ 是容许对，应用 Bellman 不等式得

$$\max_{t\in I_u}|x^k(t)-x^j(t)|\leqslant\left\{|x^k(a_k)-x^j(a_j)|+\int_{a_k}^{a_u}m(\tau)d\tau+\int_{a_j}^{a_u}m(\tau)d\tau\right.$$
$$\left.+\int_{a_u}^{b_u}l(\tau)|u^k(\tau)-u^j(\tau)|d\tau\right\}\exp\left[\int_{a_u}^{b_u}l(\tau)d\tau\right].$$

由此可见 $\{x^k(t)\}$，$t\in I_u$ 一致收敛；又从极限的唯一性及微分方程解的唯一性即得 $\{x^k(t)\}$ 的极限就是 $x(t)$，$t\in I_u$. 结论 1° 得证.

其次，若 D 是闭集或 $D=\boldsymbol{R}^n$，则从 $x^k(t)\in D$，$t\in I_u$，得 $u\in\Delta[D]$；若 $x(t)\in D$，$t\in I_u$，则自然地 $u\in\Delta[D]$，又在 1° 中已知 $u\in M$，从而 $u\in M[D]$，故结论 2° 成立. 最后，从

1) 对任一序列 $\{u^k\}\subset M$，存在 $\{u^k\}$ 的一个子序列，仍记为 $\{u^k\}$ 和 $u_*\in M$，使在 $L_1[I]$ 内 $u^k\to u_*$，就称 M 是 $L_1[I]$ 内的列紧集.

$$\left|\int_{a_k}^{b_k} h(t, x^k(t), u^k(t))dt - \int_{a_u}^{b_u} h(t, x(t), u(t))dt\right| \leqslant \left|\int_{a_k}^{a_u} m_0(t)dt\right| + \left|\int_{b_u}^{b_k} m_0(t)dt\right| + \int_{a_u}^{b_u} l_0(t)[|x^k(t) - x(t)| + |u^k(t) - u(t)|]dt$$

及 $g(\cdot)$ 的连续性即得结论 3°. 定理得证.

从现在起,特别地取 $D = O$: $\boldsymbol{R}^n$ 内的开集或 $\boldsymbol{R}^n$ 本身, 或 $D = B$: O 内的闭集, 或 $D = \mathring{B}$: B 的内部;且 $S_i \subset \mathring{B}$, $i = 0, 1$. 引入泛函

$$J[u] = g(a_u, x(a_u); b_u, x(b_u)) + \int_{a_u}^{b_u} f_o(t, x(t), u(t))dt, \tag{1.10}$$

此处 $g(t, x; \bar{t}, \bar{x}) \in C$, $(t, x; \bar{t}, \bar{x}) \in I \times O \times I \times O$; $f_o(\cdot)$ 与 $h(\cdot)$ 具相同性质. 记 $J_* \triangleq \inf\{J(u) | u \in M[B]\}$, $\mathring{J}_* \triangleq \inf\{J(u) | u \in M[\mathring{B}]\}$, $J_o \triangleq \inf\{J(u) | u \in M[O]\}$.

定义 1. 求 $u_* \in M[B]$ 使 $J[u_*] = J_*$, 称为受限最优控制问题 A, (u_*, x_*) 称为问题 A 的解;若还有 $u_* \in M[\mathring{B}]$ 则称 (u_*, x_*) 为问题 A 的非受限解.

在 $M[B]$ 非空下,从定理 1.1 知问题 A 有解. 但求解是复杂的, 故引入罚函数方法, 用非受限最优控制问题之解来逼近问题 A 的解. 下面的罚函数概念较文献 [4] 稍作调整.

定义 2. 若函数列 $\{p_k(t, x, u)\}$ 具有下列三个性质时, 称为关于集 B 的外(内)罚函数列1):

1° 在 $I \times O \times U(I \times \mathring{B} \times U)$ 上, $p_k(\cdot)$ 关于 t 可测及存在 L 可积函数 $m_k(t)$ 和 $l_k(t)$ 使 $0 \leqslant p_k(\cdot) \leqslant m_k(t)$, 且

$$|p_k(t, x, u) - p_k(t, \bar{x}, \bar{u})| \leqslant l_k(t)[|x - \bar{x}| + |u - \bar{u}|].$$

2° 对任定的紧集 $D \subset \mathring{B}$, 有

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{(u,x)} \int_{a_1}^{b_1} p_k(t, x, u)dt = 0,$$

此处 $(u, x) \in M \times \hat{C}[D]$, u 和 x 的定义域为 $[a_1, b_1] \subset I$, $\hat{C}[D] \triangleq \{x(t) | x(t), a_1 \leqslant t \leqslant b_1$ 为绝对连续函数,值域在 D 内且 $x(a_1) \in S_0\}$.

3° 存在闭集序列 $\{B_k\}$, $B_k = B(B_k \subset \mathring{B})$, $B_k \downarrow B(\uparrow B)$, 使有

$$\int_{a_1}^{c} p_k(t, x(t), u(t))dt \geqslant \mathring{J}_* - J_o + \rho(\mathring{J}_* - J_* + \rho), \tag{1.11}$$

此处 $(u, x) \in M \times \hat{C}[B_k]$, $a_1 \leqslant t \leqslant c$; 且 $x(t) \in \mathring{B}_k$, $a_1 \leqslant t < c$, 而 $x(c) \in \partial B_k$, ρ 是某个正数.

又内罚型外罚函数列、弱内罚型外罚函数(弱内罚函数)列和强外罚函数列等概念,除按本文理解外(内)罚函数概念及用 M 代替 $\triangle$ 之外, 完全与文献 [4] 中定义 4 一样. 现引入泛函和记号

$$J_k[u] = J[u] + \int_{a_u}^{b_u} p_k(\cdot)dt, \quad J_{ko} = \inf_{u\in M[O]} J_k[u], \quad J_{k*} = \inf_{u\in M[B]} J_k[u].$$

定义 3. 求 $u_*^k \in M[O](M[B])$ 使 $J_k[u_*^k] = J_{ko}(J_{k*})$ 称为问题 $A_{ko}(A_k)$, (u_*^k, x_*^k) 称为问题 $A_{ko}(A_k)$ 的解; 若 $u_*^k \in M[O](M[\mathring{B}])$, 则 (u_*^k, x_*^k) 称为问题 $A_{ko}(A_k)$ 的非受

1) 今后凡遇圆括号时,括号前的和括号内的文字或符号分别对应,其余的文字或符号的叙述则共用.

限解.

类似文献 [4] 中定理 2.1 和定理 2.3 可得

引理 1.1. 设 $M[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 满足定义 2 中性质 1° 和 2°，则存在某常数 $\bar{M}>0$，使

$$-\bar{M}\leqslant J_0(J_*)\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*})\leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*})\leqslant \mathring{J}_*\leqslant \bar{M}.$$

引理 1.2. 若 $M[B]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$满足定义 2 中性质 1° 和对 $D=B$ 时也成立的性质 2°，则

$$J_o(J_*)\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*})\leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*})\leqslant J_*.$$

二、问题 $A_{ko}(A_k)$ 的解的存在性和收敛性

定理 2.1. 设 $M[O]$ ($M[\mathring{B}]$) 非空[1)]，$\{p_k(\cdot)\}$ 是关于 B 的外(内)罚函数列，则存在 $N>0$，当 $k>N$时，问题 $A_{ko}(A_k)$ 存在非受限解 (u_*^k, x_*^k)，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$，$x_*^k(t)\in B_k\subset O(\mathring{B})$，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$.

证. 从定义知，对任定的 k，存在关于 $M[O](M[B])$ 的容许序列 $\{(u_j^k, x_j^k)\}$，$a_{kj}\leqslant t\leqslant b_{kj}$，使

$$J_k[u_j^k]\to J_{ko}(J_{k*}),\quad 当\quad j\to+\infty. \tag{2.1}$$

据定理 1.1，存在(u_*^k, x_*^k)，$u_*^k\in M$，$t\in I_k=[a_k, b_k]$，使在空间 $L_1[I]$ 内当 $j\to+\infty$ 时，$u_j^k\to u_*^k$ 及

$$x_j^k(t)\to x_*^k(t),\quad 关于\ t\in I_k\ 一致. \tag{2.2}$$

可证 (u_*^k, x_*^k)，$t\in I_k$，是问题 $A_{ko}(A_k)$ 的解. 事实上，据引理 1.1 和 (2.1) 式，存在 $N_1(\rho)>0$ 和 $N_2(k)>0$，当 $k>N_1(\rho)$，$j>N_2(k)$ 时 $J_k[u_j^k]<\mathring{J}_*+\rho$，由此可得出 $x_j^k(t)\in\mathring{B}_k$. 否则，有 c_{kj} 使 $x_j^k(t)\in\mathring{B}_k$，$a_{kj}\leqslant t<c_{kj}$，$x_j^k(c_{kj})\in\partial B_k$，从定义 2 得

$$J_k[u_j^k]\geqslant J_o(J_*)+\int_{a_{kj}}^{c_{kj}} p_k(t, x_j^k, u_j^k)dt\geqslant \mathring{J}_*+\rho,$$

这是矛盾的，故得证 $x_j^k(t)\in\mathring{B}_k$，$a_{kj}\leqslant t\leqslant b_{kj}$. 再取极限就得 $x_*^k(t)\in B_k\subset O(\mathring{B})$，$t\in I_k$，即 (u_*^k, x_*^k) 是关于 $M[O](M[\mathring{B}])$ 的容许对. 又在定理 1.1 中取 $h(\cdot)=f_o(\cdot)+p_k(\cdot)$，$D$ 取$O(\mathring{B})$ 并联系到 (2.1) 式，即知 (u_*^k, x_*^k) 是问题 $A_{ko}(A_k)$ 的非受限解.

推论 2.1. 设 $M[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列，则问题 A_{ko} 和 A_k 都有非受限解.

定理 2.2. 设 $M[O](M[\mathring{B}])$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外(内)罚函数列，(u_*^k, x_*^k) 是问题 $A_{ko}(A_k)$ 的解，则 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 中存在收敛子序列，其极限 (u_*, x_*) 具有下列性质：1° $(u_*,$

---

1) $M[O]$ ($M[\mathring{B}]$) 或 $M[B]$ 等的"非空"假设，其实质是，设存在控制 $u(t)$，$t\in I_u$，使 $x(t)$ 从点 x_0 运动到点 x_1，且始终保持在域 $O(\mathring{B})$ 或 B 内. 因此，这是可控性问题，属于专门研究的课题. 例见 E. B. Lee & L. Markus, Optimal control for nonlinear processes. Arch. Rational Mech. Anal., 8(1961) & Boltyunskii. A. V., Some forms of local controllability (Russian), English translation: Differential Equations 17 (1981), No. 2, pp. 137—141.

x_*) 是关于 $M[O](M[B])$ 的容许对；2°. $J[u_*^k]\to J[u_*]$；3° $x_*(t)\in B$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，即 $u_*\in M[B]$.

证. 取 $D=B_1(B)$，$h(\cdot)=f_0(\cdot)$，则可从定理 1.1 推得结论 1° 和 2°. 注意到 $B_k\downarrow(\uparrow)B$ 和定理 2.1 知，对任定的 $k>N$ 和 $t\in[a_*,b_*]$ 有 $x_*^{k+p}(t)\in B_k(B)$，$p=1,2,\cdots$. 因此 $\{x_*^k(t)\}$ 的极限 $x_*(t)\in B_k(B)$，$k=N+1,\cdots$，从而 $x_*(t)\in\bigcap B_k(\bigcap B)=B$，$t\in[a_*,b_*]$.

三、主要结果

本节提供当 $k\to+\infty$ 时问题 $A_{ko}(A_k)$ 趋于问题 A 的若干充分和必要条件. 容许对序列 $\{(\hat{u}^k,\hat{x}^k)\}$，"能从 $M[\mathring{B}]$ 内或 $\mathring{B}$ 内趋于问题 A 的解"的概念与文献 [4] 定义 6 所不同的仅是把 "$\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$" 和 "$\hat{u}_j\rightharpoonup\hat{u}$ (weakly)" 分别换成 "$\hat{u}^j\in M[\mathring{B}]$" 和 "$\hat{u}^j\to\hat{u}$ (在 $L_1[I]$ 内)"；而"问题列 $\{A_{ko}(A_k)\}$ 趋于问题 A" 的概念与文献 [4] 定义 7 一样，不同的仅是把 "weakly" 换成"在 $L_1[I]$ 内". 首先，类似文献 [4] 定理 5.1 而应用本文定理 1.1 可得：

定理 3.1. 设 $M[\mathring{B}]$ 非空，则 $\mathring{J}_*=J_*$ 是问题 A 能从 $\mathring{B}$ 内趋于它的解的充要条件.

定理 3.2. 设 $M[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外(内)罚函数列，则问题 $A_{ko}(A_k)$ 有非受限解；且当 1° $\mathring{J}_*=J_*$；或 2° $\mathring{J}_*=J_0$；或 3° 问题 A 有能从 $\mathring{B}$ 内趋近的解；都使问题 $A_{ko}(A_k)$ 趋于问题 A.

证. 从定理 2.1 和定理 2.2 知问题 $A_{ko}(A_k)$ 有趋于 (u_*,x_*)，$u_*\in M[B]$ 的非受限解 (u_*^k,x_*^k)，从而 $J[u_*^k]\to J[u_*]\geqslant J_*\geqslant J_o$；另方面 $J[u_*^k]\leqslant J_k[u_*^k]=J_{ko}(J_{k*})$，于是从引理 1.1 并注意到定理 3.1 即知，若三个条件之一成立，则均得定理的结论.

定理 3.3. 设 $M[B]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是强外罚函数列，则当 k 足够大时，问题 A_{ko} 必有非受限解，且当 $k\to+\infty$ 时问题 A_{ko} 趋于问题 A.

证. 由定理 2.1 和定理 2.2 知，问题 A_{ko} 有非受限解 (u_*^k,x_*^k) 且趋于 (u_*,x_*)，$u_*\in M[B]$，从而 $J_{ko}=J_k[u_*^k]\geqslant J[u_*^k]\to J[u_*]\geqslant J_*$，再由引理 1.2 即得证.

定理 3.4. 设 $M[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列(内罚函数列)，则问题列 $\{A_{ko}(A_k)\}$ 趋于问题 A 的充要条件是：或 1°. $\mathring{J}_*=J_*$，或 2°. 问题 A 有从 $\mathring{B}$ 内趋近的解.

证. 首先从定理 2.1 和定理 2.2 知，问题 $A_{ko}(A_k)$ 有趋于 (u_*,x_*)，$u_*\in M[B]$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$ 的非受限解 (u_*^k,x_*^k)，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$. 其次，从定理 3.2 即得条件 1° 或 2° 是充分的.

必要性. 据定理 1.1，$[a_k,b_k]\supset[a_*,b_*]$，于是

$$\left|\int_{a_k}^{b_k}\{p_k(t,x_*^k,u_*^k)-p_k(t,x_*,u_*)\}dt\right|\leqslant\int_{a_k}^{a_*}m_k(t)dt+\int_{b_*}^{b_k}m_k(t)dt$$

$$+\int_{a_*}^{b_*}l_k(t)[|x_*^k(t)-x_*(t)|+|u_*^k(t)-u_*(t)|]dt,$$

$$\therefore\quad\lim_{k\to+\infty}\int_{a_k}^{b_k}p_k(t,x_*^k(t),u_*^k(t))dt=\lim_{k\to+\infty}\int_{a_k}^{b_k}p_k(t,x_*(t),u_*(t))dt.\qquad(3.1)$$

又已知问题 $A_{k_0}(A_k)$ 趋于问题 A，故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{a_k}^{b_k} p_k(t, x_*^k(t), u_*^k(t))dt = \lim_{k\to+\infty}\{J_k[u_*^k] - J[u_*^k]\} = 0. \tag{3.2}$$

现在证明 $\mathring{J}_* = J_*$. 从定理 2.2 知 $u_*\in M[B]$，进一步指出 $u_*\in M[\mathring{B}]$. 否则由 $\{p_k(\cdot)\}$ 的内罚性知必存在 c_k，使 $x_*(t)\in\mathring{B}$，$a_k\leqslant t< c_k$，而 $x_*(c_k)\in\partial B_k$；应用式(1.11)就得

$$\int_{a_*}^{b_*} p_k(t, u_*(t), x_*(t))dt \geqslant \int_{a_*}^{c_k} p_k(t, x_*(t), u_*(t))dt \geqslant \mathring{J}_* - J_* + \rho > 0,$$

这与式(3.1)和(3.2)相矛盾. 故必有 $u_*\in M[\mathring{B}]$；又已知问题 $A_{k_0}(A_k)$ 趋于问题 A，故 $J_* = J[u_*]\geqslant \mathring{J}_*$. 但 $\mathring{J}_*\leqslant J_*$，故必 $\mathring{J}_* = J_*$. 再由定理 3.1 就得条件 2° 是必要的.

若把 $\{p_k(\cdot)\}$ 换成弱内罚型外罚函数列(弱内罚函数列)时，上一定理的结论也成立.

四、例

下面举出非通常意义的但符合本文定义的罚函数列. 设式(1.1)—(1.4)中 $|f(\cdot)|\leqslant m(t)\leqslant K$，$t\in I$.

例 1.

设 $g_l(x)$，$l=1,\cdots,s$，是 $C^{(1)}$ 类函数，记 $g(x)=\max_l\{g_l(x)\}$，$B\triangleq\{x|g(x)\leqslant 0, x\in \boldsymbol{R}^n\}$；取 $O=\boldsymbol{R}^n$ 及 $B_k\triangleq\{x|g(x)\leqslant 1/\sqrt{2k}\}$，显然 $B_k\downarrow B$；又取

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}0, & \text{当 } g\leqslant 0,\\ \dfrac{R\sqrt{k}}{d_k}ge^{-kg^2}, & \text{当 } g>0,\end{cases}$$

其中 $R=2e^{1/4}K[2\bar{M}+\rho]$，$\bar{M}$ 是引理 1.1 中的数，d_k 是曲面 $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ 间的距离.

易见，任定 g，当 $k\to+\infty$ 时 $p_k(\cdot)\to 0$；任定 k，当 $g\to+\infty$ 时 $p_k(\cdot)\to 0$；任定闭集 $D\subset O\backslash B$ 有 $\min_{x\in D} p_k(\cdot)\to 0$；故 $\{p_k(\cdot)\}$ 不是通常意义的外罚函数列. 现在证明它是强外罚函数列. 性质 1° 和 2° 是显然的，现验证它满足性质 3°. 事实上，

$$\int_{a_1}^{c} p_k(\cdot)dt \geqslant \int_{a_2}^{c} p_k(\cdot)dt \geqslant \frac{R}{2e^{1/4}d_k}[c-a_2], \tag{4.1}$$

此处 a_2 和 c 分别是 $x(t)$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ 和 ∂B_k 相交的时刻. 易见

$$s(t_2)-s(t_1)\leqslant\int_{t_1}^{t_2}|f(\cdot)|dt\leqslant\int_{t_1}^{t_2}m(t)dt\leqslant K(t_2-t_1),$$

这里 $s(t)$ 是从点 $x(a_1)\in S_0$ 起到点 $x(t)$ 的曲线弧长. 故由式(4.1)并注意到 $s(c)-s(a_2)\geqslant d_k$，就得

$$\int_{a_1}^{c} p_k(\cdot)dt\geqslant\frac{R}{2e^{1/4}K}=2\bar{M}+\rho\geqslant\mathring{J}_*-J_o+\rho.$$

例 2.

域 B 和 $g(x)$ 等符号仍按例 1. 取

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}0, & \text{当 } g\leqslant-\sqrt{\dfrac{2}{k}},\\ \dfrac{R\sqrt{k}}{d_k}\left(g+\sqrt{\dfrac{2}{k}}\right)e^{-k\left(g+\sqrt{\frac{2}{k}}\right)^2}, & \text{当 } -\sqrt{\dfrac{2}{k}}\leqslant g,\end{cases}$$

此处 d_k 是曲面 $g(x)=\frac{-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{k}}$ 与 $g(x)=-\frac{1}{\sqrt{2k}}$ 间的距离，又取 $B_k \triangleq \left\{x \mid g(x) \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2k}}\right\}$. 易见 $p_k(\cdot)|_{\partial B} \doteq +\infty$. 又类似例 1，可验证

$$\int_{a_1}^{c} p_k(\cdot)dt \geqslant \frac{R}{2e^{1/4}K} = 2\bar{M} + \rho \geqslant \mathring{J}_* - J_* + \rho,$$

因此 $\{p_k(\cdot)\}$ 是本文的而非通常意义的内罚函数列.

参 考 文 献

[1] Russell, D. L., Penalty functions and bounded coordinate control, *J. SIAM. Control Ser.* A,2:3 (1965).

[2] Okamura, K., Some mathematical theory of penalty method for solving optimum control problems, *J. SIAM. Control Ser.* A, 2:3(1965).

[3] 陈祖浩，罚函数方法解最优控制问题的数学理论，全国控制理论及其应用学术交流会论文集，科学出版社，1981.

[4] 陈祖浩，最优过程罚函数方法的数学理论，数学年刊，3(3)，1982.

PENALTY FUNCTION METHODS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR SOLVING NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

CHEN ZUHAO

(Shandong University)

ABSTRACT

In this paper, constrained optimization problem with respect to nonlinear system is studied on the basis of [3, 4]. Some sufficient and necessary conditions for the optimal problem A_{k0} (A_k) with exterior (interior) penalty functions in the limit case to be equivalent to the original constrained optimal control problem A are derived.