

分布参数模型连轧过程状态分析¹⁾

赵圣焱
(山东大学)

摘 要

迄今连轧控制的理论研究和实际设计大都基于集中参数模型。本文解分布参数模型^[1,2]得到了速度-张力动态分布和厚度动态模型,从而提出了新的动态工艺参数算法。

一、引 言

对于集中参数连轧模型的研究,五十年代出现了目前常用的稳态张力公式^[3]。六十年代建立了各种不同形式的张力、变形微分方程,并借助于统计与模拟实验应用于动态特性分析^[4,5]。近年来提出的分布参数模型统一处理轧件的速度 v 、张力 σ 和厚度 h ,建立了下列一阶拟线性偏微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \quad (1.1-v) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - E \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad (1.1-\sigma) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad (1.1-h) \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 t 为时间; x 为轧件截面的 Euler 坐标; μ 为金属密度; E 为弹性模量。

以 $x_k(k=1, 2, \dots, n)$ 记 k 号轧机的坐标, n 为轧机架数,把变形区视为一点,如图1所示。 k 号机的出、入口参数记作

$$v(x_k^{\pm}, t) = v_k^{\pm}(t), \sigma(x_k^{\pm}, t) = \sigma_k^{\pm}(t), h(x_k^{\pm}, t) = h_k^{\pm}(t), (-\infty < t < \infty). \quad (1.2)$$

给定初始分布

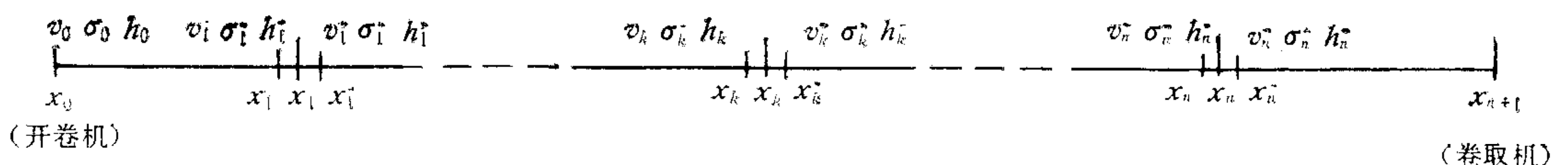


图1 n连轧示意图

本文于1983年12月23日收到,曾在1984年全国自动化技术应用学术交流年会上宣读。

1) 中国科学院科学基金资助的课题。

$$v(x, 0) = v^0(x), \sigma(x, 0) = \sigma^0(x), h(x, 0) = h^0(x), (x \in x_k) \quad (1.3)$$

则轧件的速度、张力和厚度的动态分布由混合问题(1.1)–(1.3)式所决定。显然边界条件(1.2)式与初始条件(1.3)式之间应满足相容条件

$$v^0(x_k^\pm) = v_k^\pm(0), \sigma^0(x_k^\pm) = \sigma_k^\pm(0), h^0(x_k^\pm) = h_k^\pm(0). \quad (1.4)$$

本文利用特征理论以及 $x-t$ 平面与 $\sigma-v$ 状态平面间的映射解此问题, 给出了连轧段参数的动态分布; 得到了入口厚度递推预报算法和前滑递推算法, 从而提出了 n 连轧新的动态工艺参数算法。

二、速度-张力系统

讨论第 i 连轧段, 速度-张力方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, (x_i^+ < x < x_{i+1}^-, -\infty < t < \infty) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \mu a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $a = \sqrt{E/\mu}$ 为金属中的音速。边界条件、初始条件和相容条件分别为

$$v(x_i^+, t) = v_i^+(t), v(x_{i+1}^-, t) = v_{i+1}^-(t), \sigma(x_i^+, t) = \sigma_i^+(t), \sigma(x_{i+1}^-, t) = \sigma_{i+1}^-(t); \quad (2.2)$$

$$v(x, 0) = v^0(x), \sigma(x, 0) = \sigma^0(x); \quad (2.3)$$

$$v^0(x_i^+) = v_i^+(0), v^0(x_{i+1}^-) = v_{i+1}^-(0), \sigma^0(x_i^+) = \sigma_i^+(0), \sigma^0(x_{i+1}^-) = \sigma_{i+1}^-(0). \quad (2.4)$$

方程组(2.1)有两相异实特征值 $v+a, v-a$, 因而是狭义双曲型的。在 $x-t$ 平面上定义特征线族

$$l^+: \frac{dx}{dt} = v + a, \quad (2.5-l^+)$$

$$l^-: \frac{dx}{dt} = v - a, \quad (2.5-l^-) \quad (2.5)$$

则边界上的扰动沿特征线传播, 即左、右边界上的扰动分别以速度 $v+a$ 和 $v-a$ 相向传播。

考虑 $x-t$ 平面与 $\sigma-v$ 状态平面间的映射

$$v = v(x, t), \quad \sigma = \sigma(x, t),$$

给出下列导数关系

$$\frac{\partial v}{\partial t} = J \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -J \frac{\partial t}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -J \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = J \frac{\partial t}{\partial v}. \quad (2.6)$$

其中 $J = \partial(v, \sigma)/\partial(t, x)$ 为 Jacobi 式。把式(2.6)代入方程组(2.1)即得线性方程组, 写成向量形式经整理得

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v & -\mu \\ \mu(v^2 - a^2) & -\mu a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

以方阵

$$\begin{pmatrix} v+a & -1 \\ v-a & -1 \end{pmatrix}$$

乘 (2.7) 式并令

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + a & -1 \\ v - a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

则得对角化方程组

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a & 0 \\ 0 & -\mu a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

在 σ - v 状态平面上定义特征线族

$$L^+: \frac{d\sigma}{dv} = \mu a, \quad (2.10-L^+)$$

$$L^-: \frac{d\sigma}{dv} = -\mu a, \quad (2.10-L^-) \quad (2.10)$$

则方程组 (2.9) 沿特征线 (2.10) 化为常微分方程组

$$\frac{ds_1}{dv} = \frac{1}{2a} (s_1 - s_2), \quad (2.11-L^+)$$

$$\frac{ds_2}{dv} = \frac{1}{2a} (s_1 - s_2). \quad (2.11-L^-) \quad (2.11)$$

解此方程组得 $s_1 = d_1 v + d_2$ (沿 L^+), $s_2 = d_1 v + d_2 - 2ad_1$ (沿 L^-), 代回 (2.8) 式得

$$(d_1 - t)v + d_2 = at - x, \quad (2.12-L^+)$$

$$(d_1 - t)(v - 2a) + d_2 = at - x, \quad (2.12-L^-) \quad (2.12)$$

称为速度特征组, 其中 d_1, d_2 由定解条件确定.

特征线族 (2.10) 表明速度 v 与张力 σ 沿特征线 L^+ 同向变化; 沿特征线 L^- 反向变化. L^+ 与 L^- 分别称为状态平面上的协变线与逆变线, 对应的状态分别称为协变状态与逆变状态.

三、速度-张力动态分布

协变状态利用边界条件即可定解. 把速度的两边界条件分别代入 (2.12- L^+) 式得

$$(d_1 - t)v_i^+(t) + d_2 = at - x_i^+,$$

$$(d_1 - t)v_{i+1}^-(t) + d_2 = at - x_{i+1}^-.$$

确定 $(d_1 - t)$ 和 d_2 为

$$(d_1 - t) = -l_i / \Delta v_i(t), \quad d_2 = at - \bar{x}_i - (d_1 - t)\bar{v}_i(t), \quad (3.1)$$

其中 $\Delta v_i = v_{i+1}^- - v_i^+$, $\bar{v}_i = (v_{i+1}^- + v_i^+) / 2$ 分别为连轧段两端的的速度差和平均值; $l_i = x_{i+1}^- - x_i^+$, $\bar{x}_i = (x_{i+1}^- + x_i^+) / 2$ 分别为连轧段长度和中点坐标. 式 (3.1) 代回 (2.12- L^+) 式即得协变状态的速度动态分布

$$v(x, t) = v_i^+(t) + \Delta v_i(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{l_i} \right). \quad (3.2)$$

利用左边界条件积分 (2.10- L^+) 式得

$$\sigma - \sigma_i^+(t) = \mu a (v - v_i^+(t)). \quad (3.3)$$

令 $\Delta \sigma_i = \sigma_{i+1}^- - \sigma_i^+$ 为连轧段两端的张力差, 当 $x \rightarrow x_{i+1}^-$ 时得

$$\Delta\sigma_i(t) = \mu a \Delta v_i(t). \quad (3.4)$$

把(3.2)式代入(3.3)式并注意到(3.4)式,得协变状态的张力动态分布

$$\sigma(x, t) = \sigma_i^+(t) + \Delta\sigma_i(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{l_i} \right). \quad (3.5)$$

取 $t = 0$ 由式(3.2), (3.5) 即得初始分布 $v^0(x)$, $\sigma^0(x)$. 这说明初始分布完全决定于边界状况, 因而上面直接用边界条件定解. 利用初始条件积分式(2.10- L^+) 得

$$\sigma - \sigma^0(x) = \mu a (v - v^0(x)).$$

注意边界条件和相容条件, 令 $x \rightarrow x_i^+$ 以及 $x \rightarrow x_{i+1}^-$ 分别得

$$\sigma_i^+(t) - \sigma_i^+(0) = \mu a (v_i^+(t) - v_i^+(0)), \quad (3.6)$$

$$\sigma_{i+1}^-(t) - \sigma_{i+1}^-(0) = \mu a (v_{i+1}^-(t) - v_{i+1}^-(0)). \quad (3.7)$$

那么只需检测张力就可计算速度, 解决了速度测量问题^[6]. 设 $t \leq 0$ 系统处于稳态, $t > 0$ 进入动态, 式(3.6), (3.7) 中的初始值即稳态值. 以 \bar{v}_i , $\bar{\sigma}_i$ 表示平均稳态值, 则有

$$\bar{v}_i(t) = \bar{v}_i + \frac{1}{\mu a} (\bar{\sigma}_i(t) - \bar{\sigma}_i). \quad (3.8)$$

由(3.5)式稳态张力分布为

$$\sigma(x) = \sigma_i^+ + \Delta\sigma_i \left(\frac{1}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{l_i} \right).$$

上式对 t 微分并注意到式(2.5- l^+) 和(3.4) 即得

$$\frac{d\sigma(x)}{dt} = \frac{d\sigma}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\mu a \Delta v_i}{l_i} (v + a).$$

实际连轧 $v < 50$ 米/秒, 而一般钢材中音速 $a = 5000$ 米/秒, 取 $v + a \approx a$, 于是得目前常用的连轧张力公式

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{\Delta v_i}{l_i}.$$

逆变状态的速度-张力分布形式上与式(3.2), (3.5) 完全相同(推导从略), 只是张力差与速度差反号 $\Delta\sigma_i = -\mu a \Delta v_i$. 实际连轧中速度-张力的逆变状态不可能出现.

四、厚度动态模型

速度-张力扰动近于音速传播, 相邻机架间可近似认为瞬时传播. 厚度以速度 $v(x, t)$ 由 i 号机架传向 $i+1$ 号机架, 利用(3.2)式可导出轧件截面由 x 运动到 x_{i+1}^- 的平均速度

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{x_{i+1}^- - x} \int_x^{x_{i+1}^-} v(x', t) dx' = \bar{v}_i(t) + \frac{\Delta v_i(t)}{l_i} (x - x_i^+).$$

那么截面由 x 运动到 x_{i+1}^- 所需时间为

$$\tau_i(x, t) = \frac{x_{i+1}^- - x}{\bar{v}} = 2l_i(x_{i+1}^- - x) / [2l_i\bar{v}_i(t) + \Delta v_i(t)(x - x_i^+)]. \quad (4.1)$$

令 $x \rightarrow x_i^+$, 由上式得截面通过 l_i 的时间

$$\tau_i(t) = l_i / \bar{v}_i(t). \quad (4.2)$$

回到厚度方程 (1.1-h), 在 $x-t$ 平面上定义特征线族

$$l^0: \quad \frac{dx}{dt} = v(x, t),$$

根据 (3.2) 式, 方程 (1.1-h) 沿特征线 l^0 化为

$$\frac{dh}{h} = - \frac{\Delta v_i(t)}{l_i} dt. \quad (4.3)$$

利用厚度初始条件 $h(x, 0) = h^0(x)$ 积分 (4.3) 式得厚度动态分布

$$h(x, t) = h^0(x) e^{-\frac{1}{l_i} \int_0^t \Delta v_i(t') dt'}, \quad (x_i^+ < x < x_{i+1}^-, 0 < t < \tau_i(x, t)).$$

由式 (3.4) 知速度差意味着张力差, 上式表明实际连轧必须保持 $\Delta v_i(t) \geq 0$, 否则轧件将纵向受压而迅速失去稳定, 发生飞跳(冷轧)、起套(热轧)等工艺事故.

初始厚度 $h^0(x)$ 在运动过程中不断被张力差所衰减, 经时间 $\tau_i(x, t)$ 运动到 x_{i+1}^- 而成为 $i+1$ 号机的入口厚度, 据此积分 (4.3) 式得

$$h_{i+1}^-[\tau_i(x, t)] = h^0(x) e^{-\frac{1}{l_i} \int_0^{\tau_i(x, t)} \Delta v_i(t') dt'}. \quad (4.4)$$

由相容条件 (1.4) 知当 $x \rightarrow x_i^+$ 时, $h^0(x) \rightarrow h_i^+(0)$, 而 $\tau_i(x, t) \rightarrow \tau_i(t)$, 从而式 (4.4) 化为

$$h_{i+1}^-(\tau_i) = h_i^+(0) e^{-\frac{1}{l_i} \int_0^{\tau_i} \Delta v_i(t') dt'}, \quad (4.5)$$

即 i 号机的初始出口厚度 $h_i^+(0)$ 经时间 τ_i 衰减后, 得 $i+1$ 号机瞬时 τ_i 的入口厚度(省略了 τ_i 的变量 t). 那么对于任意瞬时 t 显然有

$$h_{i+1}^-(t + \tau_i) = h_i^+(t) e^{-\alpha_i(t)}, \quad h_{i+1}^-(t) = h_i^+(t - \tau_i) e^{-\alpha_i(t - \tau_i)}, \quad (4.6)$$

其中

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{l_i} \int_t^{t+\tau_i} \Delta v_i(t') dt', \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4.7)$$

代表速度-张力扰动对入口厚度的影响.

连轧处于稳态时式 (4.4), (4.6) 分别给出

$$h_{i+1}^- = h(x) e^{-\Delta v_i \tau_i(x)/l_i}, \quad h_{i+1}^- = h_i^+ e^{-\Delta v_i / \bar{v}_i}. \quad (4.8)$$

五、动态工艺参数算法

令 $k_i(k) = [\tau_i(k) / \delta t] = [l_i / \bar{v}_i(k) \delta t]$, δt 为采样周期, 符号 $[\cdot]$ 表示整数部分, $\bar{v}_i(k)$ 由式 (3.8) 给出

$$\bar{v}_i(k) = \bar{v}_i + \frac{1}{\mu a} (\bar{\sigma}_i(k) - \bar{\sigma}_i). \quad (5.1)$$

根据式 (3.4) 对张力采样就可数值积分 (4.7) 式, 例如最简单的数值积分为

$$\alpha_i(k) = \frac{1}{\mu a l_i} \sum_{j=1}^{k_i} \Delta \sigma_i(k+j) \delta t. \quad (5.2)$$

由联系轧制力 p 、辊缝 ϕ 、出入口厚度 h^\pm 的弹跳方程和变形抗力方程

$$h^+ = \phi + p/C, \quad h^+ = h^- - p/M \tag{5.3}$$

消去 p 得

$$h^+ = \frac{1}{C+M} (C\phi + Mh^-), \tag{5.4}$$

其中 C, M 分别为机架总刚度和轧件的塑性系数。把式 (4.6) 第二式离散化并利用 (5.4) 式得入口厚度逐架递推算法

$$\begin{aligned} h_{i+1}^-(k) &= h_i^+(k - k_i) e^{-\alpha_i(k-k_i)} \\ &= \frac{1}{C_i + M_i} (C_i \phi_i(k - k_i) + M_i h_i^-(k - k_i)) e^{-\alpha_i(k-k_i)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

一般开卷段无张力, $i = 0$ 给出首架轧机入口厚度

$$h_1^-(k) = h_0(k - k_0), \quad k_0 = [l_0/v_0\delta t], \quad l_0 \text{ 为开卷段长度.} \tag{5.6}$$

那么只需对张力和辊缝采样, 利用式 (5.1), (5.2) 和 (5.5) 可以预报各机架入口厚度, 从而用式 (5.4) 计算出口厚度, 式 (5.3) 计算轧制力。油膜的影响另文讨论。

前滑 s 是联系变形区与连轧段的重要参数。 i 号机的出口速度, $i + 1$ 号机的入口速度与前滑的关系为

$$v_i^+(k) = u_i(k)(1 + s_i(k)), \tag{5.7}$$

$$v_{i+1}^-(k) = \frac{h_{i+1}^+(k)}{h_{i+1}^-(k)} u_{i+1}(k)(1 + s_{i+1}(k)), \tag{5.8}$$

其中 u 为轧辊线速度。由式 (3.4), (5.7) 和 (5.8) 立即得前滑逐架递推算法

$$s_{i+1}(k) = \frac{h_{i+1}^-(k)}{\mu a u_{i+1}(k) h_{i+1}^+(k)} (\mu a u_i(k)(1 + s_i(k)) + \Delta\sigma_i(k)) - 1. \tag{5.9}$$

利用前面的结果, 只需对张力和辊速采样即可递推各架前滑。 $i = 0$ 时, $s_0 = 0, u_0 = v_0$ 。注意到式 (5.6) 得首架轧机的前滑为

$$s_1(k) = \frac{h_0(k - k_0)}{u_1(k) h_1^+(k)} v_0 - 1.$$

n 连轧的工艺参数 $v^\pm, \sigma^\pm, h^\pm, \phi, p, u, s$ 共 $10n$ 个。除首架入口参数外, 有动态参数 $10n - 3$ 个。综上所述, 利用计算机内存稳态设定数据并实时采样 σ^\pm, ϕ, u 即可实时计算其它动态参数。计算程序框图为图 2 所示。实测动态参数 $4n - 1$ 个, 其中 $2n$ 个参数 ϕ, u 分别是液压压下系统和传动调速系统的被调量。

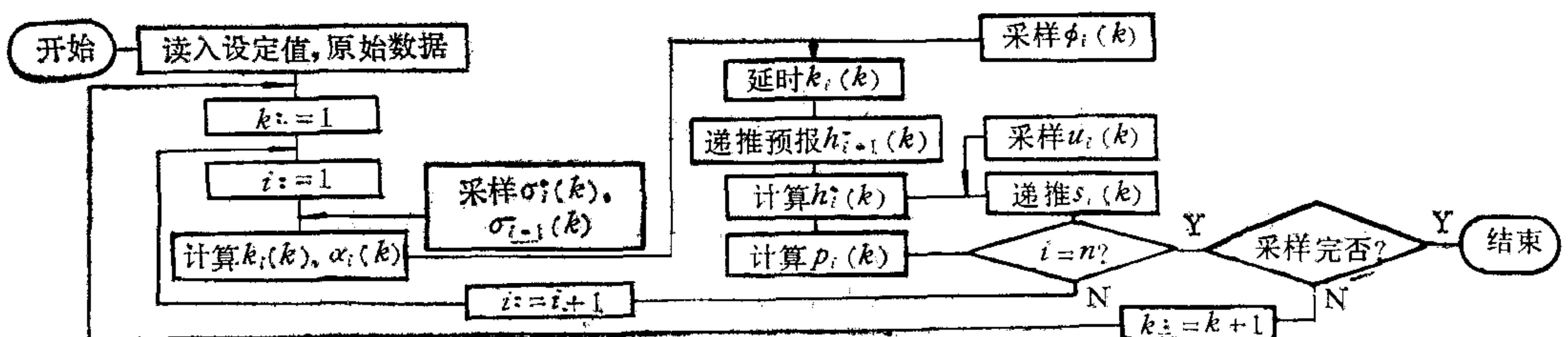


图 2 计算程序框图

结 束 语

上述一系列算法与以往算法不同,上述算法结构简单,便于实时计算。无迭代和统计计算,也不需解微分方程;大大降低在线计算机容量,有可能实现微机控制,减少设备投资。上述算法也为稳态设定精度、动态特性分析以及压下与传动系统的控制机理等的研究提供了方便。

参 考 文 献

- [1] 黄光远,分布参数方法对连轧控制的应用,自动化学报,6(1980), No. 3.
- [2] Кошевой, А. С., Математическая модель нестационарного процесса межклетевого деформирования при горячей прокатке, *Изв. Высш. Заведений чер. Мет.*, 1978, No. 1.
- [3] Phillips, R. A., *AIEE*, 1957, No. 1.
- [4] Чекмарев, А. П., Прокальное производство, Металлургиздат, Москва, Том. XVII, 1962.
- [5] 张进之,连轧张力公式,金属学报,14(1978), No. 2.
- [6] 杨 节,轧制过程数学模型,冶金工业出版社,1983, 74—75.

STATES ANALYSIS OF CONTINUOUS ROLLING PROCESS DESCRIBED BY DISTRIBUTED PARAMETER MODEL

ZHAO SHENGYAN

(Shandong University)

ABSTRACT

So far the theoretical study and practical design of the control of continuous rolling mills have been substantially based on lumped parameter model. In this paper, the dynamic distributions of velocity-tension and the dynamic model of gage have been obtained by solving the distributed parameter model^[1,2], and thus a new algorithm for dynamic technological parameters is suggested.