

带动态前馈和线性状态变量 反馈的多变量系统的根轨迹

王胜国 张念村
(中国科学技术大学)

摘 要

本文研究了采用动态前馈和线性状态变量反馈的真 (proper) 多变量线性系统的根轨迹渐近特性, 证明了系统的无穷远极点的阶数、渐近线方向和原点在一大类条件下具有不变性, 讨论了实现这一大类条件的可能性和系统在高增益参数下渐近稳定的充要条件。

本文将 Wolovich 广义补偿设计技术与多变量根轨迹技术相结合, 导出了一个带多变量根轨迹渐近特性补偿的新的广义补偿设计算法。它不仅使原设计的闭环传递矩阵 $T_d(s)$ 在 $g=1$ 时维持不变, 而且环节 $K(s)$ 、 $H(s)$ 和 $Q^{-1}(s)$ 等亦不变。

一、引 言

多变量根轨迹的研究正在进展, 目前已有几何方法、多项式矩阵代数方法和复变函数理论方法三个主要流派^[1-4]。1979年 Owens^[5]提出了五个尚未解决的问题。其中第一个问题是“多变量根轨迹概念与其他设计技术的统一”。用动态前馈和线性状态变量反馈 (d. f. & l. s. v. f.) 的多变量线性系统的频率域补偿技术^[6], 能满足多种设计要求, 例如系统极点的任意配置, 某些系统的动态或静态解耦, 以及模型配合等等。但这仅适用于增益参数为某有限值的情况, 当系统的增益 (甚至其他) 参数变化时, 其性能将如何变化呢? 是否能将多变量根轨迹概念与 d. f. & l. s. v. f. 补偿技术结合起来, 以设计出一个性能更好的系统呢? 这就是本文的出发点和主题。

本文将研究采用 d. f. & l. s. v. f. 的真多变量线性系统当增益矩阵 gI 的 $g \rightarrow \infty$ 时的根轨迹渐近特性, 指出根轨迹的阶数、渐近线方向和原点 (pivot) 在一大类 d. f. & l. s. v. f. 下的不变性, 讨论了这一大类情况的可实现性和系统在高增益参数下渐近稳定的充要条件, 并将多变量根轨迹技术与 d. f. & l. s. v. f. 补偿技术相结合, 导出了一个带多变量根轨迹渐近特性补偿的新的广义补偿设计综合算法。它包括根轨迹渐近特性不变性补偿和渐近特性校正。附录 B 给出了例子。文中符号的含义与文献 [6] 中的符号相同, 详细证明和计算从略。

二、带动态前馈和线性状态变量 反馈的多变量系统根轨迹的渐近特性

采用 d. f. & l. s. v. f. 广义补偿技术的系统如图 1 所示^[6]。对象传递矩阵为

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s). \quad (2.1)$$

其中 $R(s)$ 和 $P(s)$ 分别为 $p \times m$ 和 $m \times m$ 的右互素的多项式矩阵, $P(s)$ 并且是列正则的, $\partial_c P(s) \geq \partial_c R(s)$; $\partial |P(s)| = n$. 闭环系统的传递矩阵为

$$T_d(s) = R(s) \{ Q(s)G(s)P(s) - K(s)P(s) - H(s)R(s) \}^{-1} Q(s)L(s). \quad (2.2)$$

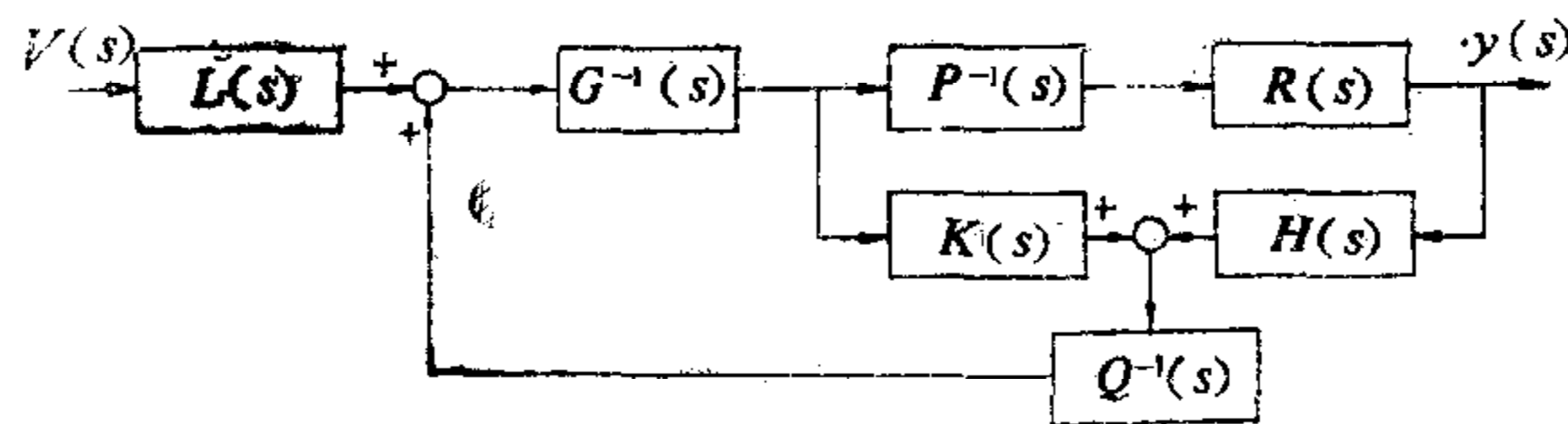


图 1 广义补偿方框图 (d. f. & l. s. v. f.)

图 1 所示的组合系统的闭环特征多项式为

$$\rho_c(s) = |Q(s)G(s)P(s) - K(s)P(s) - H(s)R(s)|. \quad (2.3)$$

$\rho_c(s) = 0$ 的根是组合系统的极点 (下简称极点)。系统的根轨迹就是当增益参数 g 变化时系统的极点在复平面上所描绘的轨线。下面分别就 g 位于系统中不同环节时的情况进行讨论。

1. 环节 $K(s)$ 为 $gK(s)$

此时系统的闭环特征多项式为

$$\rho_c(s) = |Q(s)G(s)P(s) - gK(s)P(s) - H(s)R(s)|. \quad (2.4)$$

当 $g \rightarrow \infty$ 时, 系统的有限极点为方程

$$|K(s)| \cdot |P(s)| = 0 \quad (2.5)$$

的根, 即环节 $K(s)$ 的零点和对象 $T(s)$ 的极点。系统的无穷远极点由方程

$$|I - gQ^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) - Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)| = 0 \quad (2.6)$$

描述, 运用类似 Owens^[7] 所采用的技巧, 将其推广到真有理分式函数矩阵的情况, 得如下定理:

定理 1. 当图 1 所示系统的 $K(s)$ 中的增益参数 $g \rightarrow \infty$ 时, 若

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sQ^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s) = 0, \quad (2.7)$$

$\det K(s) \neq 0$, $Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)$ 满足分解定理^{[8][9]}中的零空间简单结构假设, 则系统的无穷远极点的阶数和渐近线方向均独立于环节 $H(s)$, $R(s)$ 和 $P(s)$ 。若 $Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)$ 经分解后的子结构亦满足简单结构假设, 则系统的无穷远极点的渐近线原点亦独立于环节 $H(s)$, $R(s)$ 和 $P(s)$ 。无穷远极点的阶数、渐近线方向和原点由式 (2.8) 决定。

$$|I - gQ^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)| = 0. \quad (2.8)$$

在定理所给条件下将系统特征方程化简, 当 g 充分大时运用 Schur公式, 分严格真和真两种情况, 经归纳后可得证。

2. 环节 $H(s)$ 为 $gH(s)$, 或 $T(s)$ 为 $gT(s)$

此时系统的闭环特征多项式为

$$\rho_c(s) = |Q(s)G(s)P(s) - K(s)P(s) - gH(s)R(s)|. \quad (2.9)$$

当 $g \rightarrow \infty$ 时, 系统的有限极点是方程

$$|H(s)R(s)| = 0 \quad (2.10)$$

的根, 即支路 $H(s)R(s)$ 的零点。其无穷远极点由下式描述:

$$|I - Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) - gQ^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)| = 0. \quad (2.11)$$

定理2. 当图1所示系统的 $H(s)$ 或 $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ 中的增益参数 $g \rightarrow \infty$ 时, 若

$$\lim_{g \rightarrow \infty} sQ^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) = 0, \quad (2.12)$$

$\det\{H(s)R(s)\} \neq 0$, $Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)$ 满足分解定理中的零空间简单结构假设, 则系统的无穷远极点的阶数和渐近线方向均独立于环节 $K(s)$ 。若分解后的子结构亦满足简单结构假设, 则系统的无穷远极点的渐近线原点亦独立于环节 $K(s)$ 。其阶数、渐近线方向和原点均由式(2.13)决定。

$$|I - gQ^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)| = 0. \quad (2.13)$$

3. 环节 $Q^{-1}(s)$ 为 $gQ^{-1}(s)$ 或 $G^{-1}(s)$ 为 $gG^{-1}(s)$

此时系统的闭环特征多项式为

$$\rho_c(s) = |g^{-1}Q(s)G(s)P(s) - K(s)P(s) - H(s)R(s)|. \quad (2.14)$$

由于 $K(s)P(s) + H(s)R(s) = Q(s)F(s)$, 所以当 $g \rightarrow \infty$ 时, 系统的有限极点是下述方程的根,

$$|Q(s)| \cdot |F(s)| = 0. \quad (2.15)$$

定理3. 当图1所示系统的 $Q^{-1}(s)$ 或 $G^{-1}(s)$ 中的增益参数 $g \rightarrow \infty$ 时, 系统无穷远极点的阶数、渐近线方向和原点由式(2.16)决定。

$$|I - gF(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)| = 0. \quad (2.16)$$

4. 无穷远极点的形式

$$|I + g\psi(s)| = 0 \quad (2.17)$$

所控制的无穷远极点形式如下^[4]: 若 $\det\psi(s) \neq 0$, $\psi(s)$ 满足零空间简单结构假设, 其分解后的子结构亦满足简单结构假设, 则系统有 $k^{(\zeta)} m_\zeta$ 个 $k^{(\zeta)}$ 阶无穷远极点, $1 \leq \zeta \leq q$,

$$s = g^{1/k^{(\zeta)}} \eta_i^{(\zeta)} + \frac{\alpha_j^{(\zeta)}}{k^{(\zeta)} \eta_j^{(\zeta)}} + \varepsilon_i^{(\zeta)}(g), \quad (2.18)$$

$$1 \leq i \leq k^{(\zeta)}, 1 \leq r \leq d_j^{(\zeta)}, 1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$$

其中 $\eta_i^{(\zeta)} = (-\eta_j^{(\zeta)})^{1/k^{(\zeta)}}$, $1 \leq i \leq k^{(\zeta)}$ 为 $k^{(\zeta)}$ 个互异的根, 称作渐近线方向; $\alpha_j^{(\zeta)}/k^{(\zeta)}$, $\eta_j^{(\zeta)}$ 称为渐近线原点; $\lim_{g \rightarrow \infty} \varepsilon_i^{(\zeta)}(g) = 0$, $g^{1/k^{(\zeta)}}$ 为正实方根。上述参数来自对 $\psi(s)$

的分解:
$$M(s) = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & O(s^{-1}) \\ & I_{m_2} & \\ 0 & & I_{m_e} \end{bmatrix}, \quad N(s) = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & 0 \\ & I_{m_2} & \\ O(s^{-1}) & & I_{m_a} \end{bmatrix},$$

$$N(s)T_1^{-1}\psi(s)T_1M(s) = \text{block diag}\{G_\zeta(s)\}_{1 \leq \zeta \leq q} + O(s^{-(k^{(q)}+2)}), \quad (2.19)$$

得子结构 $G_\zeta(s) = \sum_{j=k}^{\infty} G_{\zeta j} s^{-j}$, $m_\zeta \times m_\zeta$, $\sum_{\zeta=1}^q m_\zeta = m$, $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{\nu-1} O(s^{-\nu}) = 0$. 但考虑到系统为真, 一致秩 $k^{(\zeta)}$ 有 $0 \leq k^{(1)} < k^{(2)} < \dots < k^{(q)}$. $G_{\zeta k^{(\zeta)}}$ 有

$$(T^{(\zeta)})^{-1} G_{\zeta k^{(\zeta)}} T^{(\zeta)} = \text{block diag}\{\eta_j^{(\zeta)} I_{d_j^{(\zeta)}}\}_{1 \leq j \leq l^{(\zeta)}}. \quad (2.20)$$

其中 $\eta_j^{(\zeta)}$, $1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$, 是 $G_{\zeta k^{(\zeta)}}$ 的 $l^{(\zeta)}$ 个互异的重数分别为 $d_j^{(\zeta)}$ 的特征值, $\alpha_j^{(\zeta)}$ 是 $(T^{(\zeta)})^{-1} G_{\zeta, k^{(\zeta)}+1} T^{(\zeta)}$ 的对角子块的特征值, $1 \leq \zeta \leq q$.

三、g 为高增益时系统的稳定性

根据上述讨论以及文献^[10], 由系统的有限极点必须渐近稳定可导出在高增益 g 时系统渐近稳定的必要条件, 加上无穷远极点的渐近稳定性就得到了充要条件.

性质1. 当图1所示系统满足定理1的条件时, 系统渐近稳定的充要条件为 $-Q^{-1}(s) \cdot K(s)G^{-1}(s)$ 分解后的子结构 $G_\zeta(s)$ 满足 1) $0 \leq k^{(\zeta)} \leq 2$, $1 \leq \zeta \leq q \leq 3$; 2) 若 $k^{(\zeta)} = 1$, 则 $\text{Re} \eta_j^{(\zeta)} > 0$, $1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$; 3) 若 $k^{(\zeta)} = 2$, 则 $\eta_j^{(\zeta)} > 0$, 且 $\text{Re} \alpha_j^{(\zeta)} < 0$, $1 \leq r \leq \alpha_j^{(\zeta)}$, $1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$; 4) $P(s)$ 和 $K(s)$ 的零点均位于 $\text{Re } s < 0$ 半平面 (可见被控对象必须渐近稳定).

性质2. 当图1所示系统满足定理2的条件时, 系统渐近稳定的充要条件为 $-Q^{-1}(s) \cdot H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)$ 分解后的子结构 $G_\zeta(s)$ 有性质1的1), 2), 3)项以及4)支路 $H(s)R(s)$ 的零点位于 $\text{Re } s < 0$ 半平面.

性质3. 当图1所示系统的 $Q^{-1}(s)$ 或 $G^{-1}(s)$ 中的增益参数 $g \rightarrow \infty$ 时, 渐近稳定的充要条件为 $-F(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)$ 分解后的子结构 $G_\zeta(s)$ 有性质1的1), 2), 3)项和4) $F(s)$ 的零点位于 $\text{Re } s < 0$ 半平面 (注意到 $Q(s)$ 已选为渐近稳定).

四、渐近特性不变性定理条件的可实现性

定理1和2分别要求条件(2.7)和(2.12)成立, 那么什么情况下这些条件可实现呢?

性质4. 由 d. f. & l. s. v. f. 综合算法^[6]所得的图1系统, 必有性质

$$Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s) = O(s^0), \quad (4.1)$$

$$Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) = O(s^0), \quad (4.2)$$

即均为真. 若 $G^{-1}(s) = O(s^{-2})$, 则式(2.7)和(2.12)成立.

性质5. 若被控对象 $T(s)$ 是严格真的, 那么由 d. f. & l. s. v. f. 综合算法所得的图1系统有

$$Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s) = O(s^{-1}), \quad (4.3)$$

$$Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s) = O(s^{-1}), \quad (4.4)$$

即均为严格真. 若 $G^{-1}(s) = O(s^{-1})$, 则式(2.7)和(2.12)成立.

上述条件不能满足时,若设法增加补偿串联环节 $C_1(s)$ 与 $G^{-1}(s)$, 使 $G^{-1}(s)C_1(s) = O(s^{-1})$ 的阶数较小, 则条件能得到满足。但必须使新的系统在 $g = 1$ 时, 闭环传递矩阵仍为原来所期望的, 这是可能的。

设有理函数 $r(s) = \sum_{i=-\infty}^k a_i s^i$, 则称 k 为 $r(s)$ 的级数指标, 记为 $\theta r(s)$ 。设 $A(s)$ 为 $m \times n$ 有理函数矩阵, $A(s)$ 的级数指标 $\theta A(s)$ 为其元素中最高的级数指标。 $A(s)$ 的第 i 列级数指标 $\theta_{c_i} A(s)$ 为该列元素中最高的级数指标。令

$$C_1(s) = \text{diag}\{(s + b_1)^{-\omega_{11}}\}_{1 \leq i \leq m}, \tag{4.5}$$

$$\omega_1 = \max\{\omega_{11}, \omega_{12}\}, \tag{4.6}$$

$$\omega_{11} = \max\{\theta_{c_1}\{Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)\} + 2, 0\}, \tag{4.7}$$

$$\omega_{12} = \max\{\theta_{c_1}\{Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)\} + 2, 0\}, \tag{4.8}$$

其中 $b_i > 0, 1 \leq i \leq m$, 显然 $C_1(s)$ 是真有理分式和最小相位。补偿后系统满足条件:

$$Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)C_1(s) = O(s^{-2}), \tag{4.9}$$

$$Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)C_1(s) = O(s^{-2}). \tag{4.10}$$

可见经 $C_1(s)$ 作渐近特性不变性补偿后, 系统的根轨迹渐近特性不受某些环节的参数, 甚至模型结构在某一范围变化的影响 (只要不变性定理条件仍满足), 于是根轨迹的渐近特性具有某种 Robust 的含义。

五、渐近特性的校正补偿

渐近特性的校正涉及到对 d. f. & l. s. v. f. 的多变量系统的根轨迹渐近线方向和原点进行补偿。下面给出一种补偿方法, 它不仅使原设计的闭环传递矩阵在 $g = 1$ 时保持不变, 而且保持环节 $Q(s)$, $K(s)$, $H(s)$ 和 $G(s)$ 均不变。这不仅大大减少设计的工作量, 而且也便于对已有系统的改造。带根轨迹渐近特性补偿的 d. f. & l. s. v. f. 广义补偿方案的系统如图 2 所示。

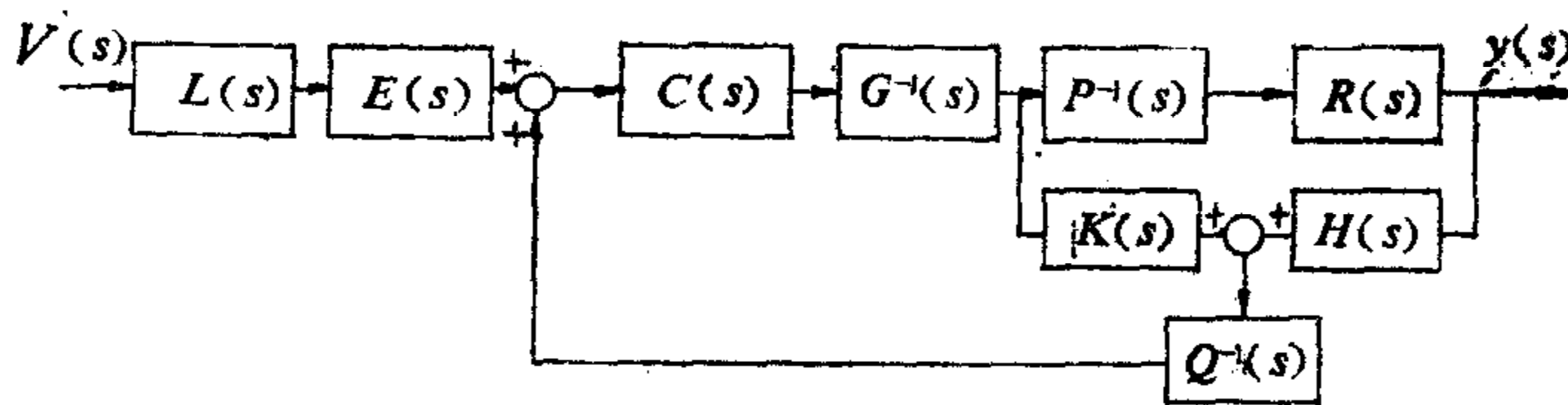


图 2 带根轨迹渐近特性补偿的广义补偿方案

$$C(s) = C_1(s)C_2(s). \tag{5.1}$$

其中 $C_1(s)$ 用于根轨迹渐近特性不变性补偿; $C_2(s)$ 用于渐近线方向校正和渐近线原点的任意配置。

设经 $C_1(s)$ 补偿后决定系统根轨迹渐近特性的传递矩阵为 $\psi(s)$, 将文献 [4, 8] 中的方法推广到真系统, 用于 $\psi(s)$, 取其前几项 Markov 参数可方便地求出尚未校正的根轨迹渐近线方向和原点。推得 $C_2(s)$ 如下 [6];

$$C_2(s) = T_1 \text{block diag}\{K^{(\zeta)}(s)\}_{1 \leq \zeta \leq q} T_1^{-1} \quad (5.2)$$

$$K^{(\zeta)}(s) = K_1^{(\zeta)} K_2^{(\zeta)}(s), \quad (5.3)$$

$$K_1^{(\zeta)} = G_{\zeta k}^{-1}(\zeta) T^{(\zeta)} \text{diag}\{\lambda_i^{(\zeta)}\}_{1 \leq i \leq m_\zeta} (T^{(\zeta)})^{-1}, \quad (5.4)$$

$$K_2^{(\zeta)}(s) = T^{(\zeta)} \text{block diag}\{K_2^{(\zeta, j)}(s)\}_{1 \leq j \leq l^{(\zeta)}} (T^{(\zeta)})^{-1}, \quad (5.5)$$

$$K_2^{(\zeta, j)}(s) = \text{diag}\left\{\frac{s + a_j^{(\zeta)}}{s + b_j^{(\zeta)}}\right\}_{1 \leq r \leq d_j}^{(\zeta)}. \quad (5.6)$$

其中 $1 \leq \zeta \leq q$; $1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$; 各 $\lambda_i^{(\zeta)} \neq 0$, $\sum_{j=1}^{l^{(\zeta)}} d_j^{(\zeta)} = m_\zeta$; $K^{(\zeta)}(s)$, $K_1^{(\zeta)}$ 和 $K_2^{(\zeta)}(s)$

均是 $m_\zeta \times m_\zeta$ 矩阵; $G_{\zeta k}(\zeta)$ 和 T_1 如 §2.4 所述. 选择 $T^{(\zeta)}$, 使 $(T^{(\zeta)})^{-1} G_{\zeta k}(\zeta) + G_{\zeta k}^{-1}(\zeta) \cdot T^{(\zeta)}$ 的 $d_j^{(\zeta)} \times d_j^{(\zeta)}$, $1 \leq j \leq l^{(\zeta)}$, $1 \leq \zeta \leq q$ 子块成为对角型、Jordan 型或三角型.

分析 d. f. & l. s. v. f. 综合算法的思路, 经推导, 令

$$E(s) = C^{-1}(s) + [C^{-1}(s) - I]F(s)\bar{P}^{-1}(s), \quad (5.7)$$

则图 2 系统就与图 1 系统在 $g = 1$ 时等价, 并有相同的 $F(s)$, $K(s)$, $H(s)$, $Q^{-1}(s)$ 和 $G(s)$.

由附录引理 2 及 (5.1)~(5.6) 式可见 $G^{-1}(s)C(s)$ 为真. 由 $C_1(s)$ 和 $C_2(s)$ 的结构可证 $E^{-1}(s)$ 为真. 并由 $T_c(s) = P(s)\bar{P}^{-1}(s)L(s)$ 为真, 再引用附录引理 3 即可得 $G^{-1}(s) \cdot C(s)E(s)L(s)$ 为真. 因此图 2 的补偿方案是物理上可行的.

至于 $C(s)$ 中增益参数 g 变化时的情况, 完全可看作 $G^{-1}(s)$ 中增益参数 g 变化时的情况. 另外, $C(s)$ 的选择显然还可同时用来达到其他种种目的.

六、带根轨迹渐近特性补偿的广义补偿设计综合算法

由上述讨论, 可得到带多变量根轨迹渐近特性补偿的新的广义补偿综合算法. 它是对 Wolovich^[6] 广义综合算法的扩充, 可用于构筑根轨迹渐近线的形状, 并有前述的不变性. 整个算法步骤如下 (所期望的传递矩阵为 $T_d(s) = T(s)T_c(s)$).

(1) 由 $P_c^{-1}(s)L_c(s) = P^{-1}(s)T_c(s)$ 求出 $P_c(s)$ 和 $L_c(s)$. 其中 $P_c(s)$ 和 $L_c(s)$ 左互素; $L_c(s)$ 为列正则且上三角形.

(2) $P(s)P_c^{-1}(s)$ 真否? 若是, 令 $\bar{P}(s) = P_c(s)$, $L(s) = L_c(s)$, 转 (3); 若非, 构造稳定的 $G_L(s) = \text{diag}\{g_i(s)\}_{1 \leq i \leq m}$, $\det G_L(s) \neq 0$, $\partial g_i(s) = \min$, $1 \leq i \leq m$, 使 $P(s)[G_L(s)P_c(s)]^{-1}$ 为真, 并令 $\bar{P}(s) = G_L(s)P_c(s)$, $L(s) = G_L(s)L_c(s)$.

(3) 分解 $\bar{P}(s) = G(s)P(s) - F(s)$, 其中 $\partial_c F(s) < \partial_c P(s)$.

(4) 选 $Q(s)$ 稳定, 算出 $K(s)$ 和 $H(s)$. 使 $Q^{-1}(s)K(s)$ 和 $Q^{-1}(s)H(s)$ 为真, 且 $K(s)P(s) + H(s)R(s) = Q(s)F(s)$.

(5) 设置指标 $IN = 0$ 或 1 . $IN = 1$ 表示条件 (2.7) 和 (2.12) 不满足时需补偿或者已补偿; $IN = 0$ 则相反.

(6) 置 $G^{(10)}(s) = -Q^{-1}(s)K(s)G^{-1}(s)$, $G^{(20)}(s) = -Q^{-1}(s)H(s)R(s)P^{-1}(s)$.

$G^{-1}(s)$, $G^{(3)}(s) = -F(s)P^{-1}(s)G^{-1}(s)$, $C_1(s) = I_m$, $C_2^{(i)}(s) = I_m$, $i = 1, 2, 3$.

(7) 条件 (2.7) 和 (2.12) 成立否? 若成立, 置 $IN = 1$ 和 $G^{(1)}(s) = G^{(10)}(s)$, $i = 1, 2$, 转 (11); 若不成立, 检查 $IN = 1$ 否? 若是, 则转 (9); 若否, 续下步.

(8) 送 $G^{(1)}(s) = G^{(10)}(s)[I + G^{(20)}(s)]^{-1}$, $G^{(2)}(s) = G^{(20)}(s)[I + G^{(10)}(s)]^{-1}$, 转 (11).

(9) 求 $C_1(s) = \text{diag}\{(s + b_i)^{-\omega_i}\}_{1 \leq i \leq m}$, 其中 $\omega_i = \max\{\partial_{c_1}[G^{(20)}(s)] + 2, \partial_{c_1}[G^{(10)}(s)] + 2, 0\}$, 置 $IN = 1$.

(10) 送 $G^{(1)}(s) = G^{(10)}(s)C_1(s)$, $i = 1, 2$, $G^{(3)}(s) = G^{(30)}(s)C_1(s)$.

(11) 由 $|I + gG^{(1)}(s)| = 0$, $i = 1, 2, 3$, 分析 $G^{(1)}(s)$ 的根轨迹渐近特性.

(12) 根轨迹渐近特性满意否? 若满意, 则转 (15); 若否, 续下步.

(13) $IN = 0$? 若是, 转 (9); 若否, 续下步.

(14) 求 $C_2^{(i)}(s)$, $i = 1, 2, 3$.

$$C_2^{(i)}(s) = T_i^{(i)} \text{block diag}\{(G_{\xi_i}^{(i)}(s))^{-1} T^{(i, \xi_i)} \text{diag}\{\lambda_{j_i}^{(i)}\}_{1 \leq j_i \leq m_{\xi_i}^{(i)}} \\ \cdot \text{block diag}\{K_{\xi_i}^{(i, \xi_i, j_i)}(s)\}_{1 \leq j_i \leq l_{\xi_i}^{(i)}} (T^{(i, \xi_i)})^{-1}\}_{1 \leq \xi_i \leq q_i} (T_i^{(i)})^{-1}$$

$$K_{\xi_i}^{(i, \xi_i, j_i)}(s) = \text{diag}\left\{\frac{s + a_{j_i}^{(i, \xi_i)}}{s + b_{j_i}^{(i, \xi_i)}}\right\}_{1 \leq r_i \leq d_{j_i}^{(i, \xi_i)}}$$

$1 \leq j_i \leq l_{\xi_i}^{(i)}$, $1 \leq \xi_i \leq q_i$, $i = 1, 2, 3$.

(15) 求 $C^{(i)}(s) = C_1(s)C_2^{(i)}(s)$, $i = 1, 2, 3$.

(16) 求 $E^{(i)}(s) = [C^{(i)}(s)]^{-1} + [(C^{(i)}(s))^{-1} - I]F(s)\bar{P}^{-1}(s)$, $i = 1, 2, 3$.

(17) 选择一组 $\{L(s), E^{(i)}(s), C^{(i)}(s), G^{-1}(s), K(s), H(s), Q^{-1}(s)\}_{i=1,2,3}$ 采用之. 终止.

如对渐近特性固定需要 Robust 性, 则算法可简化. 参数 $g \rightarrow \infty$ 有多种物理意义. 例如, 系统模型结构或参数的变化, 人为的增大增益参数使系统处于某种新的工作状态或是将系统极点带至某个区域以及故障状态等等. 因此将多变量根轨迹法所研究的渐近特性与频率域的广义补偿设计方法结合起来进行研究, 以找出对策和控制是有必要和实际意义的.

附 录

A. 设 $A(s)$, $B(s)$ 和 $C(s)$ 均为 $m \times m$ 有理函数矩阵, 且 $A^{-1}(s)$ 和 $B^{-1}(s)$ 存在, $D(s)$ 为 $m \times n$ 有理函数矩阵.

引理1. 若 $C(s)B^{-1}(s)$ 为严格真, $A(s)B^{-1}(s)$ 为真 (或严格真), 则 $A(s)[B(s) + C(s)]^{-1}$ 必为真 (或严格真).

引理2. 若 $C(s)A^{-1}(s)$ 为严格真, $A(s)B^{-1}(s)$ 为真 (或严格真), 则 $A(s)[B(s) + C(s)]^{-1}$ 必为真 (或严格真).

引理3. 若 $A(s)B^{-1}(s)$ 为真, $C(s)A^{-1}(s)$ 为严格真, $A(s)B^{-1}(s)D(s)$ 为真 (或严格真), 则 $A(s)[B(s) + C(s)]^{-1}D(s)$ 必为真 (或严格真).

上述三个引理的证明主要利用公式 $(I - E(s))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} E^i(s)$, 其中 $E(s)$ 为严格真.

B. 例：设系统对象的传递矩阵为 $T(s) = R(s)P^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}$ ，设计一个带根轨迹渐近特性补偿的广义综合补偿系统，使 $T_d(s) = (s+1)^{-1}I_2$ 。

由 Wolovich 算法可得

$$\{L(s), G(s), Q(s), H(s), K(s)\} = \{I_2, \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}, I_2, -I_2, I_2\},$$

然后设 $IN=1$, $C_1(s) = (s+4)^{-1}I_2$ 。略去 i 角标，分别讨论。

$$i=1 \text{ 时: } \{C_2(s), T, K_1, K_2(s)\}_{1-1} = \{-I, I, -I, I\},$$

$$\{C(s), E(s)\}_{1-1} = \left\{ -(s+4)^{-1}I_2, \begin{bmatrix} -(s+4) + (s+5)/(s+1)^2 & \\ & 0 \\ s(s+5)/(s+1)^2 & \\ & -(s+4) + (s+5)/(s+1)^2 \end{bmatrix} \right\},$$

其无穷远极点为 $s = \pm ig^{1/2} - 3 + \varepsilon_{1 \leq j \leq 4}(g)$, $g \rightarrow \infty$, 4 个。

$$i=2 \text{ 时: } \{C_2(s), T, K_1, K_2(s)\}_{1-2} = \{I, I, I, I\},$$

$$\{C(s), E(s)\}_{1-2} = \left\{ (s+4)^{-1}I_2, \begin{bmatrix} (s+4) - (s+3)/(s+1)^2 & -s(s+3)/(s+1)^3 \\ & 0 \\ & & (s+4) - (s+3)/(s+1)^2 \end{bmatrix} \right\}$$

其无穷远极点为 $s = \pm ig^{1/2} - \frac{5}{2} + \varepsilon_{1 \leq j \leq 4}(g)$, $g \rightarrow \infty$, 4 个。

$$i=3 \text{ 时: } \{C_2(s), T, K_1, K_2(s)\}_{1-3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I \right\},$$

$$\{C(s), E(s)\}_{1-3} = \left\{ (s+4)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (s+4) - (s+3)/(s+1)^2 & \\ & 0 \\ -2(s^2 + 4s + 2)/(s+1)^3 & \\ & (s+4) - (s+3)/(s+1)^2 \end{bmatrix} \right\},$$

其无穷远极点为 $s = (-1)^{1/3}g^{1/3} - 2 + \varepsilon_{1 \leq j \leq 6}(g)$, $g \rightarrow \infty$, 6 个。

上述各 $\lim_{g \rightarrow \infty} \varepsilon_j(g) = 0$, $1 \leq j \leq 6$ 。最后可从上述 i 中选择一种构成系统。

参 考 文 献

- (1) Brockett R. W. and Byrnes C. I., Multivariable Nyquist Criteria, Root Loci, and Pole Placement, a Geometric Viewpoint, IEEE Trans. Automat. Contr., Ac-26(1981), p. 271-284.
- (2) Kouvaritakis B. and Edmunds J. M., Multivariable Root loci, a Unified Approach to Finite and Infinite Zeros, Int. J. Control, 29(1979), p. 393-428.

- [3] MacFarlane A. G. J. and Postlethwaite I., The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci, *Int. J. Control*, **25**(1977), p. 81-127.
- [4] Owens D. H., *Feedback and Multivariable Systems*, IEE Control Engineering Series 7, Peter Peregrinus (1978) .
- [5], A Note on Compensation of Multivariable Root Loci, *Int. J. Control*, **29**(1979), p. 387-391.
- [6] Wolovich W. A., *Linear Multivariable Systems*, Applied Mathematical Sciences, **11**(1974) , Springer-Verlag.
- [7] Owens D. H., Multivariable Root-loci and Inverse transfer-function Matrix, *Int. J. Control*, **28**(1978), p. 345-351.
- [8], Dynamic Transformation and the Calculation of Multivariable Root-loci, *Int. J. Control*, **28**(1978), p. 333-343.
- [9], Asymptotic Root Loci for Proper Multivariable systems , *Proc. IEE*, **126**(1979), p. 788-789.
- [10], Root-loci Concept For Kth-order-type Multivariable Systems, *Proc. IEE*, **123**(1976) , p. 933-940.

ROOT LOCI OF MULTIVARIABLE SYSTEMS WITH DYNAMIC FEEDFORWARD AND LINEAR STATE VARIABLE FEEDBACK

Wang Shengguo Zhang Niancun

(University of Science and Technology of China)

Abstract

The root locus asymptotic behaviour of the proper multivariable systems with dynamic feedforward and linear state variable feedback (d. f. & l. s. v. f.) is researched. The orders, asymptotic directions and pivots of the root loci to these systems are shown to be invariant under a large class of cases. Realizability of this class of cases is discussed. The necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of the system under high gain g are discussed.

The combination of wolovich's general compensation technique via d. f. & l. s. v. f. and multivariable root locus technique is suggested and discussed. A synthesis algorithm of the new general compensation technique with the compensation for root locus asymptotic behaviour is deduced. It maintains not only the originally designed closed-loop transfer matrix when $g \rightarrow \infty$, but also the originally designed blocks $K(s)$, $H(s)$ and $Q^{-1}(s)$.