多变量ARMAX过程的自校正滤波器和平滑器

邓自立
（黑龙江省应用数学研究所）

摘　　要

本文应用时间序列分析方法和射影理论，提出了多变量 ARMAX 过程的自校正滤波器和平滑器，推广了Hagander和Wittenmark的结果。

一、引言

自从Åström和Wittenmark[1]提出了自校正调节器以来，自校正理论已成为现代控制论的新分支[2]。在状态估计领域，Wittenmark[3]首先提出了自校正预报器，而后Hagander和Wittenmark[4]提出了单变量平稳的自回归滑动平均（ARMA）过程的自校正滤波器和平滑器，并且被推广到多变量ARMA过程[5]。本文应用时间序列分析方法和射影理论，提出了多变量、非平稳、带外生变量的自回归滑动平均（ARMAX）过程的自校正滤波器和平滑器，进一步推广了Hagander和Wittenmark[4]的结果及文献〔5〕的结果。

本文结果可应用到通讯、信号处理、控制等领域，解决随机信号的自适应滤波和平滑问题。

二、问题提出

考虑多变量ARMAX过程$\mathbf{x}(t)$，其模型为

$$A(q^{-1})\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}B_i(q^{-1})\mathbf{u}_i(t)+C(q^{-1})\mathbf{w}(t). \qquad (1)$$

其中$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$；q^{-1}是单位滞后算子，$q^{-1}\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t-1)$；状态变量$\mathbf{x}(t)\in R^p$；$\mathbf{u}_i(t)\in R^{r_i}$，$i=1, 2, \cdots, m$，是对$\mathbf{x}(t)$有影响的可观测的外生变量，又叫辅助变量[3]，假定它们是二阶矩阵随机过程，即$\|E[\mathbf{u}_i(t)\mathbf{u}_i^T(t)]\|$一致有界，其中E是数学期望号，T为转置号，$\|\cdot\|$为矩阵的模，这种假定可保证$\mathbf{u}_i(t)$的级数均方收敛[10]，在应用问题中，$\mathbf{u}_i(t)$可以是平稳的或非平稳的，也可以是非随机的。$\mathbf{w}(t)\in R^p$为零均值、协方差为$Q_w$的白噪声。$A(q^{-1})$，$B_i(q^{-1})$和$C(q^{-1})$为矩阵算子多项式，

本文于1983年8月27日收到。

$$A(q^{-1})=I+A_1q^{-1}+\cdots+A_nq^{-n},$$

$$B_i(q^{-1})=B_{i0}+B_{i1}q^{-1}+\cdots+B_{in}q^{-n},$$

$$C(q^{-1})=C_1q^{-1}+\cdots+C_nq^{-n}.$$

其中 I 是单位阵；n为模型的阶；A_i，B_{ij}，C_i分别为$p\times p$，$p\times r_i$，$p\times p$矩阵。

设观测方程为

$$y(t)=x(t)+\delta+v(t). \tag{2}$$

其中δ是观测的系统偏差；观测噪声$v(t)$是零均值；协方差为Q_v的白噪声。

假定$u_i(t)$，$i=1,2,\cdots,m$，$w(t)$，$v(t)$相互独立，并假设$A(q^{-1})$是稳定的，即$d_{et}A(q^{-1})$的根在单位圆外。

问题是根据到时刻 t 的观测历史

$$\{y(t),\ y(t-1),\ \cdots;\ u_i(t),\ u_i(t-1),\ \cdots,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$$

求状态向量$x(t)$的最优估值器$\hat{x}(t|t)$（滤波器）及状态$x(t-k)$的最优估值器$\hat{x}(t-k|t)$（固定滞后k平滑器），即它们都是$y(t)$，$y(t-1)$，…，$u_i(t)$，$u_i(t-1)$，…，$i=1$，…，m，的线性函数，且极小化条件数学期望为

$$J=E[\,||x(t-k)-\hat{x}(t-k|t)||^2\mid y(t),y(t-1),\cdots;\ u_i(t),u_i(t-1),\cdots,i=1,\cdots,m]$$

其中$k\geqslant0$，$||\cdot||$为向量的欧氏模。

以下分两种情形研究。第一种情形是模型（1）、（2）的系数阵和噪声协方差已知，可导出最优滤波器和平滑器；第二种情形是模型（1）、（2）带未知参数阵和噪声协方差，可进一步导出自校正滤波器和平滑器。

三、稳态最优滤波器和平滑器

设模型的参数阵和噪声协方差阵是已知的，且观测的时间起点$t_0=-\infty$，下面将导出稳态最优滤波器和平滑器。

把（2）式代入（1）式有

$$A(q^{-1})y(t)=\sum_{i=1}^{m}B_i(q^{-1})u_i(t)+A(q^{-1})\delta+A(q^{-1})v(t)+C(q^{-1})w(t). \tag{3}$$

它可写为

$$A(q^{-1})y(t)=\sum_{i=1}^{m}B_i(q^{-1})u_i(t)+b+D(q^{-1})\varepsilon(t). \tag{4}$$

其中$\varepsilon(t)\in R^p$为零均值、协方差为Q_ε的白噪声，且

$$D(q^{-1})=I+D_1q^{-1}+\cdots+D_nq^{-n},$$

$$b=A(q^{-1})\delta=(I+A_1+\cdots+A_n)\delta, \tag{5}$$

$$A(q^{-1})v(t)+C(q^{-1})w(t)=D(q^{-1})\varepsilon(t). \tag{6}$$

置
$$r(t)=A(q^{-1})v(t)+C(q^{-1})w(t)=D(q^{-1})\varepsilon(t),$$
$$R_r(i)=E\{r(t)r^T(t-i)\}.$$
其中D_i和Q_ε满足非线性矩阵方程组[5]

$$\sum_{j=}^{n}D_jQ_\varepsilon D_{j-i}^T=R_r(i),\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ D_0=I,\tag{7}$$

使$\det D(q^{-1})$的根在单位圆外的（7）式的解是唯一的[6]，这保证了$D(q^{-1})$是稳定的.

由射影理论[7]，最优平滑器$\hat{x}(t|t+k)$是$x(t)$在由所有常向量c和$y(t+k)$，$y(t+k-1)$，…；$u_i(t+k)$，$u_i(t+k-1)$，…，$i=1$，…，m，所张成的Hilbert空间上的射影，记为

$$\hat{x}(t|t+k)=P_{roj}\{x(t)|c,\ y(t+k),\ y(t+k-1),\ \cdots;\ u_i(t+k),\ u_i(t+k-1),\ \cdots,\ i=1,\ \cdots,\ m\}.$$

由$D(q^{-1})$的稳定性和（4）式，$\varepsilon(t)$为

$$\varepsilon(t)=[D(q^{-1})]^{-1}A(q^{-1})y(t)-\sum_{i=1}^{m}[D(q^{-1})]^{-1}B_i(q^{-1})u_i(t)-[D(q^{-1})]^{-1}b$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_jy(t-j)-\sum_{=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\Omega_j^{(i)}u_i(t-j)-\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_jb.\tag{8}$$

其中$[\cdot]^{-1}$表示逆矩阵。系数阵π_j可用比较如下算子恒等式两边q^{-j}的系数得到：

$$A(q^{-1})=D(q^{-1})(\pi_0+\pi_1q^{-1}+\pi_2q^{-2}+\cdots).$$

由此引出递推公式[5,6]

$$\pi_j=-D_1\pi_{j-1}-\cdots-D_n\pi_{j-n}+A_j.\tag{9}$$

其中$\pi_0=I$；$\pi_j=O$，$j<0$；$A_j=O$，$j>n$。类似地可计算系数阵$\Omega_j^{(i)}$，Λ_j.

由（8）和（4）式易知$\varepsilon(t)$是基于$t-1$时刻以前的观测历史对$y(t)$的一步预报误差，因而也称$\varepsilon(t)$为观测过程$y(t)$的新息过程。由（8）和（4）式及$A(q^{-1})$的稳定性知，数据集$\{c,\ y(t+k),y(t+k-1),\ \cdots;\ u_i(t+k),\ u_i(t+k-1),\ \cdots,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$与数据集$\{c,\ \varepsilon(t+k),\ \varepsilon(t+k-1),\ \cdots;\ u_i(t+k),\ u_i(t+k-1),\ \cdots,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$含有同样的统计信息，即每个数据集的每个数据可用另一数据集的数据线性表示，因而这两个数据集张成同样的Hilbert空间。由（6）式及$u_i(t)$，$i=1$，…，m，$w(t)$，$v(t)$的相互独立性引出由$\{\varepsilon(t+k),\varepsilon(t+k-1),\ \cdots\}$张成的子空间与由$\{c,u_i(t+k),u_i(t+k-1),\ \cdots;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$张成的子空间是正交的，再注意白噪声$\varepsilon(t)$是正交序列及（2）式，由射影性质和公式可得

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t+k)&=P_{roj}\{y(t)-\delta-v(t)|c,\ y(t+k),\ \cdots;\ u_i(t+k),\ \cdots;\ i=1,\ \cdots,\ m\}\\&=y(t)-\delta-P_{roj}\{v(t)|c,\ \varepsilon(t+k),\ \cdots;\ u(t+k),\ \cdots;\ i=1,\ \cdots,\ m\}\\&=y(t)-\delta-P_{roj}\{v(t)|\varepsilon(t+k),\ \varepsilon(t+k-1),\ \cdots\}\\&\quad-P_{roj}\{v(t)|c,\ u_i(t+k),\ \cdots,\ i=1,\ \cdots,\ m\}\end{aligned}$$

$$=y(t)-\delta-\sum_{j=0}^{\infty}P_{roj}[v(t)|\varepsilon(t+k-j)]$$

$$=y(t)-\delta-\sum_{j=0}^{\infty}E[v(t)\varepsilon^T(t+k-j)]Q_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+k-j). \tag{10}$$

其中利用了 $P_{roj}[v(t)|c, u_i(t+k), \cdots, i=1, \cdots, m]=0$。这是因为$v(t)$独立于$\{u_i(t), i=1, \cdots, m\}$，因而正交于由它们张成的子空间。由（6）式有

$$\varepsilon(t)=[D(q^{-1})]^{-1}A(q^{-1})v(t)+[D(q^{-1})]^{-1}C(q^{-1})w(t)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j v(t-j)+\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j w(t-j). \tag{11}$$

其中π_j由（9）式得到，Ψ_j的计算与（9）式类似。

利用（11）式及白噪声$v(t)$与$w(t)$的独立性，有

$$E[v(t)\varepsilon^T(s)]=\begin{cases}Q_v\pi_{s-t}^T, & s\geqslant t;\\ O, & s<t.\end{cases} \tag{12}$$

由（10）和（12）式可得稳态最优平滑器为

$$\hat{x}(t|t+k)=y(t)-\delta-\sum_{j=0}^{k}Q_v\pi_{k-j}^TQ_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+k-j)$$

$$=y(t)-\delta-\sum_{i=0}^{k}Q_v\pi_i^TQ_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+i). \tag{13}$$

注意（6）式及$C(q^{-1})$的特点（它没有单位阵 I 这一项），并计算$R_r(n)$，可得

$$A_nQ_v=D_nQ_{\varepsilon}.$$

由此得到

$$Q_v=A_n^{-1}D_nQ_{\varepsilon}. \tag{14}$$

这里设A_n是非异的，从而最优平滑器为

$$\hat{x}(t|t+k)=y(t)-\delta-\sum_{i=0}^{k}A_n^{-1}D_nQ_{\varepsilon}\pi_i^TQ_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+i). \tag{15}$$

当$k=0$时，最优滤波器为

$$\hat{x}(t|t)=y(t)-\delta-A_n^{-1}D_n\varepsilon(t). \tag{16}$$

由（2）、（12）和（13）式，平滑误差协方差为

$$P_k=E[(x(t)-\hat{x}(t|t+k))(x(t)-\hat{x}(t|t+k))^T]$$

$$=E[v(t)-\sum_{i=0}^{K}Q_v\pi_i^TQ_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+i)][v(t)-\sum_{i=0}^{k}Q_v\pi_i^TQ_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon(t+i)]^T$$

$$= Q_v - \sum_{i=0}^{k} Q_v \pi_i^T Q_\varepsilon^{-1} \pi_i Q_v^T$$

$$= A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon \left[I - \sum_{i=0}^{k} \pi_i^T Q_\varepsilon^{-1} \pi_i Q_\varepsilon D_n^T A_n^{-T}\right]. \tag{17}$$

滤波误差协方差为

$$P_0 = E[(x(t) - \hat{x}(t|t))(x(t) - \hat{x}(t|t))^T]$$
$$= A_n^{-1} D_n Q_\varepsilon [I - D_n^T A_n^{-T}]. \tag{18}$$

最优滤波和平滑方程组（8）、（9）和（15）—（18）式包括文献〔5〕及Hagander和Wittenmark[4]的结果。模型（1）中的 $C(q^{-1})w(t)$ 部分实际上是（n－1）阶滑动平均（MA）过程。吴贤铭和 Pandit[11] 证明了自回归部分的阶为 n，而滑动平均部分的阶为（n－1）的ARMA过程，即ARMA（n，n－1）。这在应用中带有普遍性，叫动态数据系统（D. D. S）。显然，只要$C(q^{-1})$的阶低于n，（14）式就成立。

四、自校正滤波器和平滑器

由上节看到，最优滤波器和平滑器的参数完全由观测过程中的 ARMAX 模型（4）式决定。因此，当模型（1）和（2）未知时，无需辨识原始模型（1）和（2）式，就可求出自校正滤波器和平滑器：

第一步。在线辨识观测过程的ARMAX模型。ARMAX模型（4）式可按行写成 p个子系统

$$y_i(t) = \phi_i^T(t)\theta_{n_i} + \varepsilon_i(t),\quad i = 1, 2, \cdots, p. \tag{19}$$

其中$y^T(t) = (y_1(t), \cdots, y_p(t))$；$\varepsilon^T(t) = (\varepsilon_1(t), \cdots, \varepsilon_p(t))$；$\phi_i^T(t) = (-y^T(t-1), \cdots, -y^T(t-n_i)$；$u_1^T(t), \cdots, u_1^T(t-n_i)$；$\cdots$；$u_m^T(t), \cdots, u_m^T(t-n_i)$；1；$\varepsilon^T(t-1), \cdots, \varepsilon^T(t-n_i))$，$n_i$是第 i 个子系统的真实阶，也叫结构指数[9]。显然有

$$n = \max_i n_i. \tag{20}$$

因此，为了决定模型（4）的阶 n，只要分别决定各子系统的阶 n_i 即可。求出各未知参数θ_{n_i}的估值$\hat{\theta}_{n_i}$后，再把（19）式合并成向量ARMAX模型（4）式的形式，就可得到未知参数阵A_i，B_{ij}，b，D_i的估值$\hat{A}_i$，$\hat{B}_{ij}$，$\hat{b}$，$\hat{D}_i$。

设观测的时间起点为 $t_0 = 0$，则到时刻 t 的有限数据 $\{y(t), y(t-1), \cdots, y(0)$；$u_i(t), \cdots u_i(0)$，$i = 1, 2, \cdots, m\}$对$\theta_{n_i}$的递推增广最小二乘法（RELS）估值为[8]

$$\hat{\theta}_{n_i}(t) = \hat{\theta}_{n_i}(t-1) + K_i(t)\hat{\varepsilon}_i(t), \tag{21}$$

$$K_i(t) = P_i(t-1)\hat{\phi}_i(t)[\lambda + \hat{\phi}_i^T(t)P_i(t-1)\hat{\phi}_i(t)]^{-1}, \tag{22}$$

$$P_i(t) = [I - K_i(t)\hat{\phi}_i^T(t)]P_i(t-1)\cdot\lambda^{-1}, \tag{23}$$

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = y_i(t) - \hat{\phi}_i^T(t)\hat{\theta}_{n_i}(t-1), \tag{24}$$

其中$i=1,\cdots,p$，且λ，$0<\lambda\leqslant1$，为遗忘因子，

$$\hat{\phi}_i^T(t)=(-y^T(t-1),\cdots,-y^T(t-n_i);\ u_1^T(t),\cdots,u_1^T(t-n_i);\ \cdots;\ u_m^T(t),\cdots,u_m^T(t-n_i);\ 1;\ \hat{\varepsilon}^T(t-1),\cdots,\hat{\varepsilon}^T(t-n_i)).$$

初值取为$\hat{\varepsilon}(0)=\cdots=\hat{\varepsilon}(1-n_i)=0$；$\hat{\theta}_{n_i}(0)=\theta_{n_{i}}$. （通常取$\theta_{n_io}=0$），$P_i(0)=\alpha I$，$\alpha$是很大的正数。每个子系统的阶$n_i$可用F检验法决定[9]。

第二步，$x(t)$的自校正滤波器和平滑器分别为

$$\hat{x}(t|t)=y(t)-\hat{\delta}-\hat{A}_n^{-1}\hat{D}_n\hat{\varepsilon}(t) \tag{25}$$

和

$$\hat{x}(t|t+k)=y(t)-\hat{\delta}-\sum_{i=0}^{k}\hat{A}_n^{-1}\hat{D}_n\hat{Q}_\varepsilon\hat{\pi}_i^T\hat{Q}_\varepsilon^{-1}\hat{\varepsilon}(t+i). \tag{26}$$

其中$\hat{\pi}_j$为把 t 时刻A_i，D_i的估值$\hat{A}_i$，$\hat{D}_i$代入（9）式后求得；新息$\varepsilon(t)$的估值$\hat{\varepsilon}(t)$由（24）式求得。

由（5）式得δ的估值为

$$\hat{\delta}=(I+\hat{A}_1+\cdots+\hat{A}_n)^{-1}\hat{b}. \tag{27}$$

新息协方差Q_ε的采样估值为

$$\hat{Q}_\varepsilon(t)=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{t}\hat{\varepsilon}(i)\hat{\varepsilon}^T(i). \tag{28}$$

由此引出递推公式

$$\hat{Q}_\varepsilon(t)=\hat{Q}_\varepsilon(t-1)+\frac{1}{t}[\hat{\varepsilon}(t)\hat{\varepsilon}^T(t)-\hat{Q}_\varepsilon(t-1)]. \tag{29}$$

在每个 t 时刻，重复进行上述两步。

假如未知参数向量θ_{n_i}，$i=1,\cdots,p$，的RELS估值是一致的，即当$t\to\infty$时，$\hat{A}_i\to A_i$，$\hat{B}_{ij}\to B_{ij}$，$\hat{D}_i\to D_i$，$\hat{b}\to b$，则由（4）、（5）、（9）和（28）式看出，也有$\hat{\pi}_j\to\pi_j$，$\hat{\delta}\to\delta$，$\hat{\varepsilon}(t)\to\varepsilon(t)$，$\hat{Q}_\varepsilon\to Q_\varepsilon$，因而自校正滤波器和平滑器（25）和（26）式将分别收敛到最优滤波器和平滑器（16）和（15）式，具有渐近最优（自校正）性。

五、结 论

本文把带未知模型阶、参数阵、系统偏差和噪声协方差的系统的自适应滤波和平滑问题归结为用RELS方法辨识观测过程的ARMAX新息模型（4）式。所提出的自校正滤波器和平滑器具有渐近最优性。在如下两方面推广了Hagander和Wittenmark[4]的结果：(1)单变量、平稳的ARMA过程的自校正滤波器和平滑器被推广到多变量、非平稳的ARMAX过程。这在实际应用问题中是常见的。在应用中如能恰当地选择辅助变量$u_i(t),i=1,\cdots,m$，则可改进滤波和平滑估值的精度。（2）允许观测方程含有未知的系统偏差，这相当于观测噪声$v(t)$带有非零均值。

参 考 文 献

〔1〕 Åström, K. J., B. Wittenmark, On Self-Tuning Regulators, Automatica, **9** (1973), 185-199.

〔2〕 Åström, K. J., U. Borisson, L. Ljung, B. Wittenmark, Theory and Applications of Self-Tuning Regulators, Automatica, **13** (1977), 457-476.

〔3〕 Wittenmark, B., A Self-Tuning Predictor, IEEE Trans. Autom. Control, AC-**19** (1974), 848-851.

〔4〕 Hagander, P., B. Wittenmark, A Self-Tuning Filter for Fixed-Lag Smoothing, IEEE Trans. Information Theory, IT-**23** (1977).

〔5〕 邓自立，多变量自校正滤波器和平滑器，自动化学报，**7** (1981)，283-293.

〔6〕 Box, G. E. P., G. M. Jenkins, Time Series Analysis, Holden Day, San Francisco (1970).

〔7〕 Anderson, B. D. O., J. B. Moore, Optimal Filtering, Prentice-Hall, Inc (1979).

〔8〕 Ljung, L., T. Söderström, I. Gustavsson, Counterexamples to General Convergence of a Commonly Used Recursive Identification Method, IEEE Trans. Aumom. Control, AC-**20** (1975), 643-652.

〔9〕 Bokor, J., L. Keviczky, Structural Properties and Structure Estimation of Vector Difference Eguations, Int. J. Control, **36** (1982), 461-475.

〔10〕 Hallin, M., Mixed Autoregressive-Moving Average Multivariate Processes with Time-Dependent Coefficients, Journal of Multivariable Analysis, **8** (1978), 567-572.

〔11〕 Wu. S. M., S. M. Pandit, Time Series and System Analysis, Modeling and Applications, Wisconsin University (1979).

A SELF-TUNING FILTER AND SMOOTHER FOR MULTIVARIATE ARMAX PROCESSES

Deng Zili

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, a self-tuning filter and smoother for multivariable ARMAX processes are presented, using the time series analysis method and projection theory. Hagander and Wittenmark's results are extended.