

离散-连续混合系统输出公式—— Mason 公式的推广应用

范锡波
(清华大学)

摘要

本文用矩阵方程建立了离散-连续混合系统的数学模型,并由此推导出混合系统的输出公式,该公式是 Mason 公式在混合系统中的推广. 本文讨论了混合系统的另外两种解法,即矩阵法和构图法.

本文结论与文献[3]有所不同.

本文仅讨论单周期同步采样线性定常离散-连续混合系统^[1,4,5],简称混合系统.混合系统的信号流图由数学模型(1)描述:

$$\mathbf{x}(s) = A_1(s)\mathbf{x}(s) + A_2(s)\mathbf{x}^*(s) + B_1(s)\mathbf{r}(s) + B_2(s)\mathbf{r}^*(s), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(s)$ 为 n 维节点向量; $\mathbf{r}(s)$ 为 m 维输入向量; $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$ 是 $n \times n$ 矩阵; $B_1(s)$ 和 $B_2(s)$ 是 $n \times m$ 矩阵; $\mathbf{x}^*(s)$ 和 $\mathbf{r}^*(s)$ 分别为 $\mathbf{x}(s)$ 和 $\mathbf{r}(s)$ 对应的采样信号.

“断开”所有采样开关,将 $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{r}^*(s)$ 和 $\mathbf{x}^*(s)$ 同时看作独立的输入信号,得到连续系统(2),称(2)是混合系统(1)的伴连续系统.

$$\mathbf{x}(s) = A_1(s)\mathbf{x}(s) + B_c(s)\mathbf{r}_c(s), \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{r}_c(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(s) \\ \dots \\ \mathbf{r}^*(s) \\ \dots \\ \mathbf{x}^*(s) \end{bmatrix}, \quad B_c(s) = [B_1(s) | B_2(s) | A_2(s)].$$

一、脉冲传递函数公式及输出公式

$B_1(s) = 0$ 的单输入混合系统中,设输出 $C(s)$ 为 $X_n(s)$,记输入 $R(s)$ 为 $X_0(s)$,公式(3)给出脉冲传递函数.

$$G(z) = \frac{X_n(z)}{X_0(z)} = \frac{\sum_k P_{zk} \Delta_{zk}}{\Delta_z}. \quad (3)$$

其中 Δ_z 为所有混合回环决定的特征多项式; P_{zk} 为第 k 条混合前向通道的离散增益; Δ_{zk} 为与第 k 条混合前向通道离散互不接触的所有混合回环决定的特征余子式。由 Mason 公式引入如下概念得到公式(3)。

1) 离散传输 伴连续系统中由 $X_j^*(s)$ 到 $X_i(s)$ 的一个连续前向通道记为 C_{ij} , 对 C_{ij} 有

$$D_{cij}(s) = \frac{P_{cij}\Delta_{cij}}{\Delta}. \quad (4)$$

Δ 为伴连续系统的特征多项式; P_{cij} 为连续前向通道 C_{ij} 的增益; Δ_{cij} 为除去 C_{ij} 后伴连续系统的特征余子式。称 $D_{cij}(z) = \mathcal{Z}\{D_{cij}(s)\}$ 为 C_{ij} 的离散传输。

2) 混合通道 由伴连续系统中 $X_j^*(s)$ 至 $X_i(s)$ 的连续前向通道加采样开关连成, 不重复经过任何采样信号的通道。若混合通道首尾相接称为混合回环。若混合通道首起 $X_0^*(s)$, 终点 $X_n^*(s)$, 称为混合前向通道。

3) 离散互不接触 若两混合通道不包含共同的采样信号, 则称两通道离散互不接触。

4) 离散增益 混合通道中所含各离散传输之积。

下述定理及公式(7)给出了混合系统的输出公式。

将系统(1)的输入向量 $r(s)$ 当作假想的 $m \times 1$ 维传递矩阵, 由系统(1)构造假想的单输入系统(5), $U(s)$ 是假想的单输入, 称(5)为(1)的归一化系统。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \dots \\ \mathbf{v}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(s) \\ \dots \\ \mathbf{v}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^*(s) \\ \dots \\ \mathbf{v}^*(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \mathbf{r}(s) \end{bmatrix} U^*(s). \quad (5)$$

预备定理. 归一化系统(5)中 $U(z)$ 到 $\mathbf{y}(z)$ 的 $n \times 1$ 维脉冲传递矩阵为原混合系统的输出向量 $\mathbf{x}(z)$ 。

证明。(参见本文矩阵法部分)由(5)式可推得:

$$\mathbf{y}(z) = [I - G_D(z)]^{-1} [G_I \mathbf{r}(z) + G_{II}(z) \mathbf{r}(z)] U(z), \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{x}(z) U(z). \quad \text{证毕.}$$

由预备定理及公式(3)得输出公式

$$C(z) = X_n(z) = \frac{Y_n(z)}{U(z)} = \frac{\sum_k Q_{zk} \Gamma_{zk}}{\Gamma_z}. \quad (7)$$

Γ_z , Γ_{zk} 和 Q_{zk} 依次为公式(3)中 Δ_z , Δ_{zk} 和 P_{zk} 在归一化系统(5)中的对应概念。由于各自规定的概念不同, 本文式(7)和文献[5]中的输出公式在形式上有差异, 本质上相同。

二、矩阵法、构图法

1. 矩阵法

由模型(1)可解得

$$\mathbf{x}(s) = G_D(s)\mathbf{x}^*(s) + \mathbf{r}_D(s), \quad (8)$$

其中

$$G_D(s) = [I - A_1(s)]^{-1}A_2(s), \quad \mathbf{r}_D(s) = G_I(s)\mathbf{r}(s) + G_{II}(s)\mathbf{r}^*(s),$$

$$G_I(s) = [I - A_1(s)]^{-1}B_1(s), \quad G_{II}(s) = [I - A_1(s)]^{-1}B_2(s).$$

对(8)式两边信号采样

$$\mathbf{x}^*(s) = G_D^*(s)\mathbf{x}^*(s) + \mathbf{r}_D^*(s), \quad (9)$$

$$\mathbf{x}(z) = G_D(z)\mathbf{x}(z) + \mathbf{r}_D(z), \quad (10)$$

$$\mathbf{x}^*(s) = [I - G_D^*(s)]^{-1}\mathbf{r}_D^*(s). \quad (11)$$

$$\text{离散解: } \mathbf{x}(z) = [I - G_D(z)]^{-1}[G_I\mathbf{r}(z) + G_{II}\mathbf{r}(z)]. \quad (12)$$

$$\text{连续解: } \mathbf{x}(s) = G_D(s)[I - G_D^*(s)]^{-1}\mathbf{r}_D^*(s) + \mathbf{r}_D(s). \quad (13)$$

称系统(10)为原混合系统(1)的伴离散系统。

2. 构图法

对混合系统信号流图利用 Mason 公式首先解得 $G_D(s)$ 和 $\mathbf{r}_D(s)$, 根据 $G_D(z)$ 和 $\mathbf{r}_D(z)$ 构造伴离散系统的信号流图, 再利用一次 Mason 公式, 解得输出 $C(z)$, 详见文献 [2]。本文有关混合通道的几个定义, 就是由伴离散系统信号流图和原混合系统信号流图的对应关系引出的。

三、关于文献[3]的讨论及举例

1. 关于文献[3]的讨论

郭一新同志在文献[3]中提出一种计算采样数据系统(即本文混合系统)的输出量的方法。本文认为文献[3]定理一尚有可商讨之处, 现举一反例: 求图(1)的输出 $C(z)$ 。

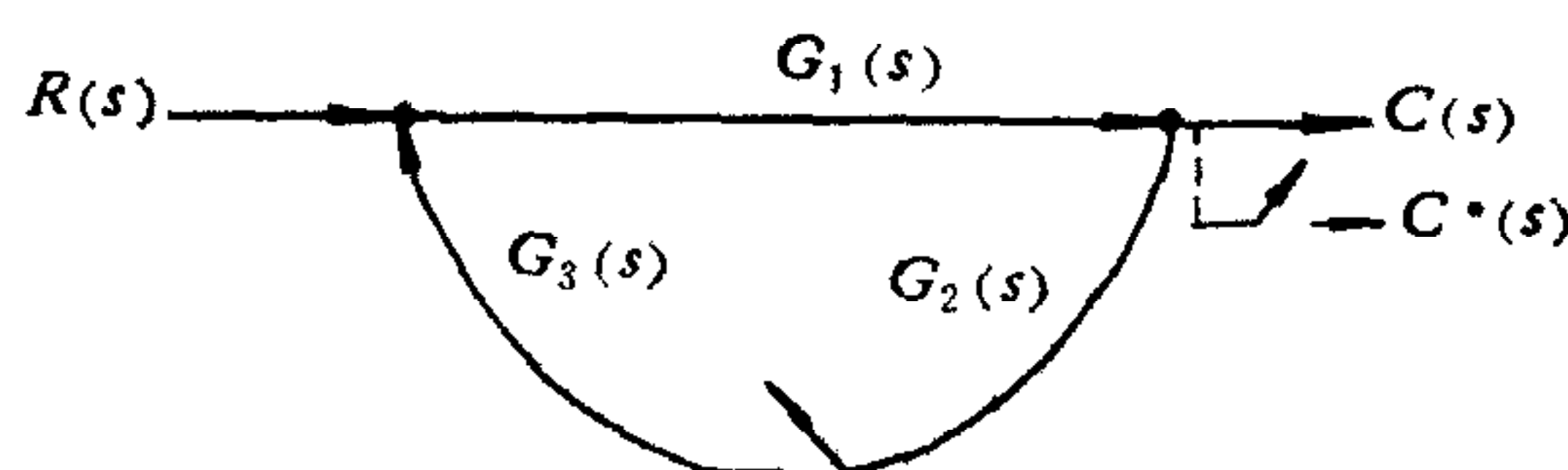


图 1

按文献[3]

$$C(z) = \frac{RG_1(z)}{1 - G_1G_2G_3(z)}, \quad (14)$$

按本文的方法

$$C(z) = \frac{RG_1G_3(z)G_1G_2(z)}{1 - G_1G_2G_3(z)} + RG_1(z). \quad (15)$$

显然结果有别, 读者可用其它方法验证。

1) 郭一新同志本人认为由文献[3]定理一得该式。

本文认为,文献[3]定理一对采样数据系统缺少精确的数学描述,部分沿用了连续系统中的一些拓扑概念,从而导致了其结论具有一定的局限性,文献[3]定理一只在一定范围内适用.

2. 举例

求图(2)所示混合系统的离散输出 $C(z)$, 其归一化系统如图(3)所示, $C(s) = X_3(s)$.

解. Q_1, Q_2, Q_3 和 Q_4 为混合前向通道; L_1, L_2 和 L_3 为混合回环; Q_1, Q_3 及 L_2 三混合通道与 L_1 离散互不接触, 所以, $\Gamma_z = 1 - L_{z1} - L_{z2} - L_{z3} + L_{z1}L_{z2}$,

$$\Gamma_{z1} = \Gamma_{z3} = 1 - L_{z1}, \Gamma_{z2} = \Gamma_{z4} = 1.$$

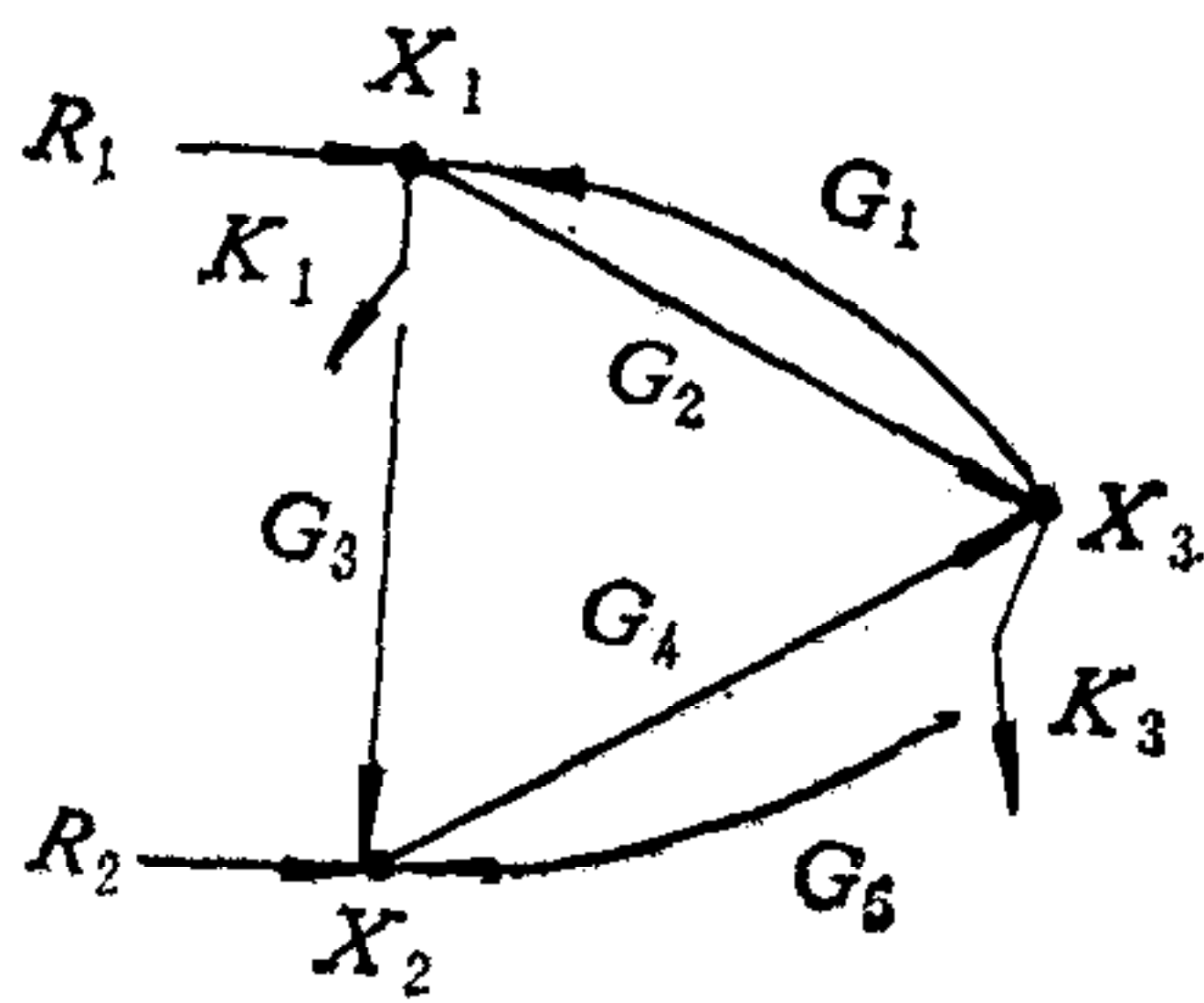


图 2

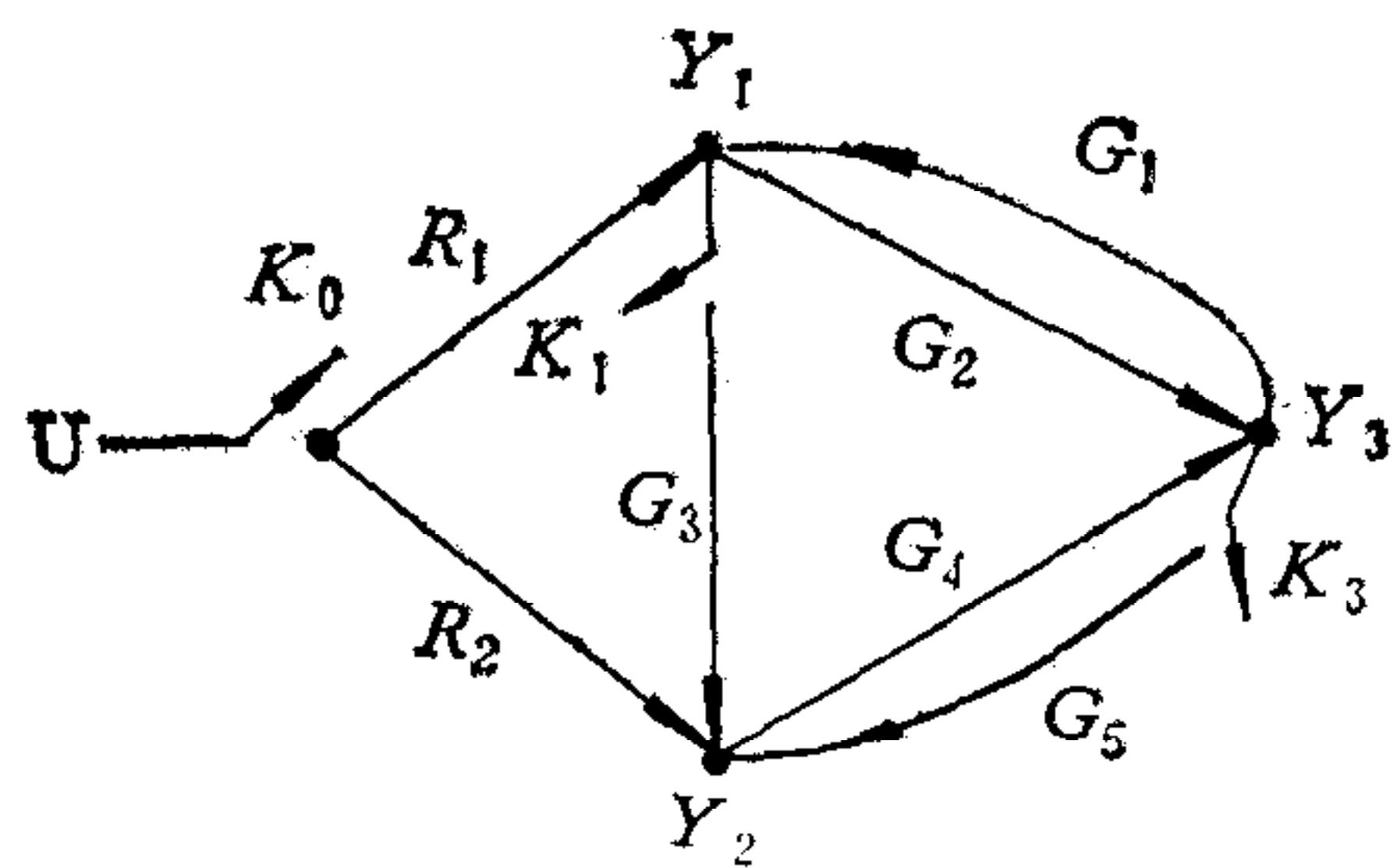


图 3

令 $W(s) = [1 - G_1(s)G_2(s)]^{-1}$.

混合通道

离散增益

$Q_1: K_0 \xrightarrow{R_1 G_2} K_3,$

$Q_{z1} = W R_1 G_2(z);$

$Q_2: K_0 \xrightarrow{R_1} K_1 \xrightarrow{G_3 G_4} K_3,$

$Q_{z2} = W R_1(z) W G_3 G_4(z);$

$Q_3: K_0 \xrightarrow{R_2 G_4} K_3,$

$Q_{z3} = W R_2 G_4(z);$

$Q_4: K_0 \xrightarrow{R_2 G_4 G_1} K_1 \xrightarrow{G_3 G_4} K_3,$

$Q_{z4} = W R_2 G_1 G_4(z) W G_3 G_4(z);$

$L_1: K_1 \xrightarrow{G_3 G_4 G_1} K_1,$

$L_{z1} = W G_1 G_3 G_4(z);$

$L_2: K_3 \xrightarrow{G_5 G_4} K_3,$

$L_{z2} = W G_4 G_5(z);$

$L_3: K_3 \xrightarrow{G_5 G_4 G_1} K_1 \xrightarrow{G_3 G_4} K_3,$

$L_{z3} = W G_1 G_4 G_5(z) W G_3 G_4(z).$

$C(z) = X_3(z) = Y_3(z)/U(z) = \Gamma_z^{-1}(Q_{z1}\Gamma_{z1} + Q_{z2}\Gamma_{z2} + Q_{z3}\Gamma_{z3} + Q_{z4}\Gamma_{z4})$

$= \frac{(Q_{z1} + Q_{z3})(1 - L_{z1}) + Q_{z2} + Q_{z4}}{1 - L_{z1} - L_{z2} - L_{z3} + L_{z1}L_{z2}}$

$= \frac{[W R_1 G_2(z) + W R_2 G_4(z)][1 - W G_1 G_3 G_4(z)] + W R_1(z) W G_3 G_4(z) + W R_2 G_1 G_4(z) W G_3 G_4(z)}{1 - W G_1 G_3 G_4(z) - W G_4 G_5(z) - W G_1 G_4 G_5(z) W G_3 G_4(z) + W G_1 G_3 G_4(z) W G_4 G_5(z)}$

对简单系统用公式法很方便,复杂系统用构图法较好,若系统极其复杂,倒不如用矩阵法。

本文受到方崇智先生、蔡宣三先生和吴麒先生的悉心指导和热情支持,在此深表感谢。

参 考 文 献

- [1] 宋 健等,第八届世界自控联 (IFAC) 大会论文评介(一),国外自动化,(1982),第五期, p. 133.
- [2] 沈 平,采样系统的信号流图计算,自动化与仪器仪表,(1983),第二期, p35.
- [3] 郭一新,采样数据系统输出量的最新计算方法,自动化学报,9(1983), p175.
- [4] Ragazzini, J. R., & Franklin, G. F., Sampled-data Control Systems, N. Y., McGraw-Hill. 1958.
- [5] Sedlar, M. & Bekey, G. A., Signal Flow Graphs of Sampled-Data Systems, A New Formulation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-12 (1967), p154.

THE OUTPUT EQUATION OF DISCRETE-CONTINUOUS HYBRID SYSTEMS—AN EXTENSION OF MASON'S FORMULA

FAN XIBO

(Tsinghua University)

ABSTRACT

In this paper, the mathematical model of discrete-continuous hybrid systems is established as a matrix equation. The output equation of hybrid systems is deduced from the model, which is an extension of the well-known Mason's formula. Two other methods are shown to be suitable in finding the solution, namely, the matrix method and the diagrammatic method. The conclusion in this paper is different from that in [3].

中国自动化学会第五届全国模式识别及机器智能学术会议

征 文 通 知

第五届全国模式识别及机器智能学术会议预定于一九八六年四月在西安召开。

征文内容: 模式分类与分析; 图象理解与识别; 语言理解与识别; 图象处理与图象数据压缩; 机器人学; 人工智能; 模式识别中的计算机视觉与专家系统; 模式识别中的计算机组织和系统; 工业应用; 生物医学应用; 遥感应用; 其它应用。

征文截止日期: 一九八五年十一月三十日

论文全文(包含摘要)以 4000 字为限。经评审决定接受的论文于一九八六年元月初通知论文作者。
联系人: 西北电讯工程学院信息工程系 李福全