第 11 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 4
1985 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1985

二次型最优系统的两个频域必要条件

李 安 龙
(海 军 工 程 学 院)

摘　　要

本文推广了文献 [1] 提出的最优系统的一个频域必要条件，并给出了另外一个频域必要条件，结论适用于多输入线性系统.

设多输入线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}$为 m 维输入向量，A, B 为相应维数的矩阵. 给定二次型性能指标

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt, \tag{2}$$

其中 Q 为非负定矩阵；R 为正定矩阵. 由反馈控制规律

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} \tag{3}$$

确定的性能指标(2)为最小，并产生一最优闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

本文给出这种最优系统在频域内所必须满足的两个条件，即

定理. 若 $\lambda_i, \gamma_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是系统 (1)和由最优控制规律(3)产生的闭环系统(4)的极点，则下述不等式成立

$$\sum_{i=1}^{n} [(R_e\gamma_i)^2 - (I_m\gamma_i)^2] \geqslant \sum_{i=1}^{n} [(R_e\lambda_i)^2 - (I_m\lambda_i)^2], \tag{5}$$

$$\prod_{i=1}^{n} |\gamma_i| \geqslant \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \tag{6}$$

在证明定理之前，先给出两个引理.

引理 1. 设 A, B 是两个 $n \times n$ 埃尔米特矩阵，当 $A \geqslant B$，即 $A - B$ 是非负定矩阵时，则[3]

$$\lambda_i(A) \geqslant \lambda_i(B), i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A), \lambda_1(B) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(B)$分别为矩阵 A, B的特征根，进一步有

$$\det A \geqslant \det B.$$

引理 2[3]. 设 A, B 分别为$m \times n$ 与 $n \times m$矩阵，I_m, I_n 分别为 m, n 阶单位矩阵，则

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

本文于 1983 年 7 月 18 日收到.

定理的证明．使用记号

$$\Phi(s)=(sI_n-A)^{-1},\quad \phi(s)=\det(sI_n-A)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n),$$

$$\phi_c(s)=\det(sI_n-A+BK)=(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\cdots(s-\gamma_n).$$

可以证明(见文献[2]，p76)，二次型最优系统满足频率条件

$$[I_m+R^{1/2}K\Phi(-j\omega)BR^{-1/2}]^T[I_m+R^{1/2}K\Phi(j\omega)BR^{-1/2}]\geqslant I_m. \tag{7}$$

当上式两边为矩阵时，上式意指左边与右边之差为一非负定矩阵，由引理 2 可得

$$\begin{aligned}\det[I_m+R^{1/2}K\Phi(j\omega)BR^{-1/2}]&=\det[I_n+\Phi(j\omega)BR^{-1/2}R^{1/2}K]\\&=\det\Phi(j\omega)\cdot\det[\Phi^{-1}(j\omega)+BK]\\&=\det(j\omega I_n-A)^{-1}\cdot\det(j\omega I_n-A+BK)=\frac{\phi_c(j\omega)}{\phi(j\omega)}.\end{aligned} \tag{8}$$

同理

$$\det[I_m+R^{1/2}K\Phi(-j\omega)BR^{-1/2}]^T=\frac{\phi_c(-j\omega)}{\phi(-j\omega)}. \tag{9}$$

由引理 1 及(7)—(9)式可得

$$\frac{\phi_c(j\omega)\phi_c(-j\omega)}{\phi(j\omega)\phi(-j\omega)}\geqslant 1,$$

即

$$\phi_c(j\omega)\phi_c(-j\omega)-\phi(j\omega)\phi(-j\omega)\geqslant 0. \tag{10}$$

将 $\phi_c(j\omega)$，$\phi(j\omega)$ 的展开式代入上式，则有

$$\begin{aligned}&\phi_c(j\omega)\phi_c(-j\omega)-\phi(j\omega)\phi(-j\omega)\\&\quad=(j\omega-\gamma_1)\cdots(j\omega-\gamma_n)(-j\omega-\gamma_1)\cdots(-j\omega-\gamma_n)\\&\qquad-(j\omega-\lambda_1)\cdots(j\omega-\lambda_n)(-j\omega-\lambda_n)\cdots(-j\omega-\lambda_n)\\&\quad=\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i^2-\lambda_i^2)\omega^{2n-2}+(\cdots)\omega^{2n-4}+\cdots\\&\qquad+\left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^2-\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

上式左边是 ω 的偶函数多项式，其非负的必要条件是首项系数与常数项均非负，即

$$\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i^2-\lambda_i^2)\geqslant 0, \tag{11}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^2-\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2\geqslant 0. \tag{12}$$

因为 $\phi_c(s)$和 $\phi(s)$ 均为实系数多项式，其复根必定以共轭的形式出现．若γ_i 是 $\phi_c(s)$ 的复根，则 $\bar{\gamma}_i$ 也是 $\phi_c(s)$ 的一个复根，因而

$$\begin{aligned}\gamma_i^2+\bar{\gamma}_i^2&=(R_e\gamma_i+jI_m\gamma_i)^2+(R_e\gamma_i-jI_m\gamma_i)^2\\&=2[(R_e\gamma_i)^2-(I_m\gamma_i)^2],\end{aligned}$$

$$\gamma_i^2\bar{\gamma}_i^2=(\gamma_i\bar{\gamma}_i)^2=|\gamma_i|^4.$$

若 γ_i 是 $\phi_c(s)$ 的实根，则 $I_m\gamma_i=0$，$R_e\gamma_i=\gamma_i$，因而

$$\gamma_i^2=(R_e\gamma_i)^2-(I_m\gamma_i)^2;\gamma_i^2=|\gamma_i|^2.$$

总之

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(R_e\gamma_i)^2-(I_m\gamma_i)^2],\quad \prod_{i=1}^{n}\gamma_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right)^2.$$

同理可得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(R_e\lambda_i)^2-(I_m\lambda_i)^2],\quad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\left(\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)^2.$$

将以上四式代入(11),(12)式,即得定理中的(5),(6)式.

定理中的(5)式和(6)式说明,最优闭环系统极点比其开环系统极点,平均而言,在左半平面上远离虚轴和原点.因此系统稳定性提高,过渡过程时间缩短.另外,容易证明,当(5),(6)式不等于零时,它们也是充分条件.对于有一对主导极点的高阶系统,当其开环和闭环主导极点满足式(5),(6)时(n 取 2),则该闭环系统具有最优或近似最优的性质,这在工程设计中是有意义的.

在文献[1]中,Koussiouris 曾在 n 为偶数时给出过不等式 (5),当 n 为奇数时,却给出了一个与(5)式反号的不等式,笔者认为是推导错误所致.

参 考 文 献

[1] T. G. Koussiouris, A Necessary Condition for Optimization in the Frequency Domain, *Int. J. Contr.* **36** (1982), 213—215.
[2] B. D. O. Anderson & J. B. Moore, 线性最优控制,龙云程译,科学出版社,1982.
[3] 须田信英等,自动控制中的矩阵理论,曹长修译,科学出版社,1982.

TWO NECESSARY CONDITIONS FOR QUADRATIC OPTIMAL SYSTEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN

LI ANLONG
(Engineering Institute of the Navy)

ABSTRACT

A necessary condition in [1] is generalized for quadratic optimal systems in the frequency domain, and another necessary condition is also presented. The two necessary conditions hold for multi-input linear systems.