# 随机采样控制系统中二次型性能函数的计算

孙增圻
（清华大学）

摘　要

本文给出了在随机采样控制系统中计算连续的二次型性能函数的整套公式和算法，可用于计算机控制系统的分析和设计。

## 一、连续性能函数的离散表示

在计算机控制系统中，控制对象是时间的连续过程，而控制器是离散的。受控过程常常受到随机的干扰，同时在输出量中也常常包含随机的测量噪声。本文将给出在这样的系统中计算二次型性能函数的整套公式和算法。

设线性定常的连续过程为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{v}_C, \tag{1.1}$$

其中$\mathbf{x}\in R^n$，$\mathbf{u}\in R^m$，$\mathbf{v}_C\in R^n$。$\mathbf{v}_C$是随机的白噪声干扰，且有

$$E\mathbf{v}_C(t)=0,\ \ E\mathbf{v}_C(t_1)\mathbf{v}_C^T(t_2)=V_C\delta(t_1-t_2). \tag{1.2}$$

$\mathbf{u}(t)$是控制向量，它是零阶保持器的输出，即

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(kT),\ \ kT\leqslant t<(k+1)T. \tag{1.3}$$

其中T是采样周期，控制序列$\mathbf{u}(kT)$是离散控制器的输出。对于这种具有随机干扰的采样控制系统，其抗扰性能可用如下的二次型函数表示：

$$J=E\left\{\frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T}[\mathbf{x}^T(t)\bar{Q}_1\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}^T(t)\bar{Q}_2\mathbf{u}(t)]dt\right\}. \tag{1.4}$$

它是一个采样周期内平均的二次型损失函数的期望值，其中加权阵$\bar{Q}_1$和$\bar{Q}_2$可根据需要选择。例如选$\bar{Q}=C^TC$（C为输出矩阵），$\bar{Q}_2=0$，则J表示输出量的平均二次型损失函数；若选$\bar{Q}_1=0$，$\bar{Q}_2=I$（单位阵），则J表示控制量的平均能量损失。

若令$F(t)=e^{At}$和$G_1(t)=\int_0^t e^{A\tau}d\tau$，则据方程（1.1）和（1.3）可以得到

$$\mathbf{x}(kT+t)=F(t)\mathbf{x}(kT)+G_1(t)B\mathbf{u}(kT)+\int_0^t F(\tau)\mathbf{v}_C(kT+t-\tau)d\tau. \tag{1.5}$$

其中$0\leqslant t<T$。将式（1.5）代入（1.4），并考虑到$\mathbf{v}_C(kT+t-\tau)$（$0\leqslant\tau<t$）与$\mathbf{x}(kT)$和$\mathbf{u}(kT)$均不相关，从而得到性能函数J的等效的离散表示为

---

本文于1983年3月16日收到。

$$J=\frac{1}{T}E\{x^T(k)Q_1x(k)+2x^T(k)Q_{12}u(k)+u^T(k)Q_2u(k)\}+J_v. \tag{1.6}$$

其中$Q_1$，$Q_{12}$及$Q_2$如文献〔1〕中的式（2.10）—（2.12）所示，$J_v$可以求得为

$$J_v=\frac{1}{T}E\left\{\int_0^T\left[\int_0^t F(\tau)v_C(kT+t-\tau)d\tau\right]^T\overline{Q}_1\left[\int_0^t F(\sigma)v_C(kT+t-\sigma)d\sigma\right]dt\right\}$$

$$=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,\overline{Q}_1\int_0^T\int_0^t\int_0^t F(\sigma)V_C\sigma(\tau-\sigma)F^T(\tau)d\sigma d\tau dt$$

$$=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,\overline{Q}_1\int_0^T\int_0^t F(\tau)V_CF^T(\tau)d\tau dt$$

$$=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,\overline{Q}_1\int_0^T\int_\tau^T F(\tau)V_CF^T(\tau)dtd\tau$$

$$=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,\overline{Q}_1\int_0^T(T-\tau)F(\tau)V_CF^T(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

若令

$$\begin{cases} P_x=E\{x(k)x^T(k)\}, & P_{xu}=E\{x(k)u^T(k)\}, \\ P_u=E\{u(k)u^T(k)\}, & P_v=\frac{1}{T}\int_0^T(T-t)F(t)V_CF^T(t)dt. \end{cases} \tag{1.8}$$

则式（1.6）可以写成如下简洁的形式：

$$J=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,[Q_1P_x+Q_{12}P_{xu}^T+P_{xu}Q_{12}^T]+\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,Q_2P_u+J_v$$

$$=\frac{1}{T}\mathbf{tr}\,\hat{Q}P+\mathbf{tr}\,\overline{Q}_1P_v. \tag{1.9}$$

其中

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} P_x & P_{xu} \\ P_{xu}^T & P_u \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

## 二、离散化算法

根据式（1.5），连续的状态方程（1.1）可以离散化为

$$x(k+1)=Fx(k)+Gu(k)+v(k) \tag{2.1}$$

其中$F=F(T)$，$G=G_1(T)B$，$v(k)=\int_0^T F(\tau)v_C(kT+T-\tau)d\tau$。进一步可以求得离散白噪声序列的协方差为

$$V=Ev(k)v^T(k)=\int_0^T F(t)V_CF^T(t)dt. \tag{2.2}$$

文献〔1〕中给出了离散化计算$F$，$G$，$Q_1$，$Q_{12}$和$Q_2$的整套算法，从而根据式（1.10）可以组成矩阵$\hat{Q}$。这里首先讨论计算$P_v$的算法，下一节再根据控制器的结构讨论$P$的计算，最后根据式（1.9）即可算得$J$。

根据式（1.8），$P_v$可以分成两项进行计算，即

$$P_v = V - R. \tag{2.3}$$

其中V如式（2.2）所示，而

$$R = \int_0^T \frac{t}{T} F(t) V_C F^T(t) dt. \tag{2.4}$$

在式（2.2）中，令$M(t) = F(t)V_C F^T(t) = e^{At}V_C e^{A^T t}$，显然有$M(0) = V_C$，$M^{(k)}(t) = AM^{(k-1)}(t) + M^{(k-1)}(t)A^T$以及$M^{(k)}(0) = AM^{(k-1)}(0) + M^{(k-1)}(0)A^T$ $(k = 1,2,\cdots)$。根据台劳级数展开，有

$$\begin{cases} V = \int_0^T M(t)\, dt = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(k)}(0)}{k!} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(0) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k, \\ V_k = M^{(k)}(0) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{T}{k+1}(AV_{k-1} + V_{k-1}A^T), \\ V_0 = V_C T. \end{cases} \tag{2.5}$$

在式（2.4）中，令$N(t) = \frac{t}{T}F(t)V_C F^T(t) = \frac{t}{T}M(t)$，从而有$N(0) = 0$，$N^{(k)}(t) = \frac{1}{T}[kM^{(k-1)}(t) + tM^{(k)}(t)]$以及$N^{(k)}(0) = \frac{k}{T}M^{(k-1)}(0)$ $(k = 1, 2, \cdots)$．从而得到

$$\begin{cases} R = \int_0^T N(t)\, dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} N^{(k)}(0) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k, \\ R_k = N^{(k)}(0) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{k}{T} M^{(k-1)}(0) \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{k}{k+1} V_{k-1}, \\ R_0 = N(0)T = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

在离散化计算F，G，$Q_1$，$Q_{12}$，$Q_2$，V和R的过程中，为了保证数值计算的可靠性及获得足够的精度，算法中需要进一步增加关于采样周期的折半-加倍措施。文献[1]已给出了前五个量的加倍公式（见文[1]中式（4.4）—（4.8）），用文献[1]中类似的方法不难导出后两个量的加倍公式如下：

$$V(T) = V(\frac{T}{2}) + F(\frac{T}{2})\, V(\frac{T}{2})\, F^T(\frac{T}{2}), \tag{2.7}$$

$$R(T) = \frac{1}{2} R(\frac{T}{2}) + \frac{1}{2} F(\frac{T}{2}) [R(\frac{T}{2}) + V(\frac{T}{2})] F^T(\frac{T}{2}). \tag{2.8}$$

## 三、性能函数J的计算

设系统的量测方程为

$$y(k) = Cx(k) + w(k), \tag{3.1}$$

其中$y(k)$是r维量测向量，$w(k)$是随机的量测噪声，且有

$$Ew(k) = 0,\ Ew(k)w^T(j) = W\delta_{kj} \tag{3.2}$$

同时假定它与过程干扰v不相关。设离散的控制器可用如下一般形式的状态方程来描述：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_C(k)=F_C\mathbf{x}_C(k-1)+G_C\mathbf{y}(k-1), \\ \mathbf{u}(k)=C_C\mathbf{x}_C(k)+D_C\mathbf{y}(k), \end{cases} \tag{3.3}$$

结合方程（2.1），（3.1）和（3.3），控制对象的方程可以重新表示为

$$\mathbf{x}(k)=(F+GD_CC)\mathbf{x}(k-1)+GC_C\mathbf{x}_C(k-1)+GD_C\mathbf{w}(k-1)+\mathbf{v}(k-1), \tag{3.4}$$

控制器的方程可表示为

$$\mathbf{x}_C(k)=G_CC\mathbf{x}(k-1)+F_C\mathbf{x}_C(k-1)+G_C\mathbf{w}(k-1). \tag{3.5}$$

若令$\mathbf{z}(k)=[\mathbf{x}(k)\ \ \mathbf{x}_C(k)]^T$，则式（3.4）和（3.5）可以合并在一起写为

$$\mathbf{z}(k)=M\mathbf{z}(k-1)+\mathbf{v}_S(k-1), \tag{3.6}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix} F+GD_CC & GC_C \\ G_CC & F_C \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_S(k-1)=\begin{bmatrix} GD_C\mathbf{w}(k-1)+\mathbf{v}(k-1) \\ G_C\mathbf{w}(k-1) \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

若令$\mathbf{E}\mathbf{v}_S(k-1)\mathbf{v}_S^T(k-1)=V_S$，则不难求得

$$V_S=\begin{bmatrix} GD_CWD_C^TG^T+V & GD_CWG_C^T \\ G_CWD_C^TG^T & G_CWG_C^T \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

若令

$$\begin{aligned} P_z=\mathbf{E}\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)&=\begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) & \mathbf{E}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}_C^T(k) \\ \mathbf{E}\mathbf{x}_C(k)\mathbf{x}^T(k) & \mathbf{E}\mathbf{x}_C(k)\mathbf{x}_C^T(k) \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} P_x & P_{xx_c} \\ P_{xx_c}^T & P_{x_c} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

根据式（3.6），容易求得$P_z$满足如下的李雅普诺夫方程：

$$P_z=MP_zM^T+V_S. \tag{3.10}$$

通过求解上式而得到$P_z$，也即求得$P_x$，$P_{xx_c}$和$P_{x_c}$。根据式（3.1）和（3.3）可以进一步求得

$$P_{xu}=P_{xx_C}C^T+P_xC^TD_C^T,$$

$$P_u=C_CP_{x_C}C_C^T+D_CCP_xC^TD_C^T+D_CCP_{xx_C}C_C^T+C_CP_{xx_C}^TC^TD_C^T+D_CWD_C^T. \tag{3.12}$$

将$P_x$，$P_{xu}$，$P_u$连同前面求得的$Q_1$，$Q_{12}$，$Q_2$及$P_v$一并代入式（1.9）即可求得J。

若控制器具有卡尔曼滤波的结构形式，即

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k)=F\hat{\mathbf{x}}(k-1)+G\mathbf{u}(k-1), \\ \hat{\mathbf{x}}(k)=\bar{\mathbf{x}}(k)+K[\mathbf{y}(k)-C\bar{\mathbf{x}}(k)], \\ \mathbf{u}(k)=-L\hat{\mathbf{x}}(k). \end{cases} \tag{3.13}$$

式（3.13）可以化为式（3.3）所示的一般结构形式，其转换关系为

$$\begin{cases} F_C=(I-KC)(F-GL),\ \ G_C=F_CK, \\ C_C=-L,\ \ D_C=-LK, \\ \hat{\mathbf{x}}(k)=\mathbf{x}_C(k)+K\mathbf{y}(k), \end{cases} \tag{3.14}$$

从而可利用前面的结果来计算J。

在式（3.13）中，如果K是卡尔曼滤波增益矩阵，L是使式（1.4）极小的最优反馈控制规律，可以求得最优的性能函数J为[2]

$$J=\frac{1}{T}[\mathrm{tr}VS+\mathrm{tr}L^T(G^TSG+Q_2)LP_{\tilde{x}}]+J_v. \tag{3.15}$$

其中S是计算最优控制时离散Riccati方程的解，$P_{\tilde{x}}$是卡尔曼滤波状态估计误差协方差阵.

若控制器是直接的状态线性反馈，即

$$u(k)=-Lx(k), \tag{3.16}$$

这时只需在量测方程中令$C=I$，$w(k)=0$以及令式（3.3）中的$F_C=0$，$G_C=0$，$C_C=0$，$D_C=-L$，即可将其化为一般的控制器的结构形式，从而也可利用前面的结果来计算这时的J。如果L是使式（1.4）极小的最优反馈控制规律，则有[2]

$$J=\frac{1}{T}\mathrm{tr}VS+J_v \tag{3.17}$$

文献[3]给出了离散系统中相应于式（3.15）和（3.17）的结果。而本文的结果可适用于采样系统。同时本文还给出了计算J的更为一般的结果，它并不限于最优控制和最优状态估计的情况。本文结果可用于计算机控制系统中采样周期的选择、估计器的设计、反馈结构的简化及参数灵敏度的分析等许多方面。

本文的工作得到瑞典Chalmers大学 B. Qvarnström教授及 B. Lennartson的指导和帮助，在此谨表感谢。

## 参 考 文 献

〔1〕 孙增圻，采样控制系统中线性二次型最优控制器的设计，自动化学报，9（1983）.

〔2〕 Sun Zengqi and Lennartson B.,The Effect of long Sampling Intervals on the Disturbance Rejection in Stochastic Control Systems, Ph. D. Thesis, Chalmers University, Sweden (1981).

〔3〕 Åström K. J., Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York (1970) 281-282.

## COMPUTATION OF QUADRATIC PERFORMANCE FUNCTIONS IN STOCHASTIC SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS

Sun Zengqi
(Tsinghua University)

Abstract

A set of formulas and algorithms fer the computation of quadratic performance functions in stochastic Sampled-data control systems is given in this paper. It can be used in many aspects of computer control systems analysis and design.