增刊 第1期
1985年8月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

参数插入法在解Riccati代数矩阵方程中的应用

路精保
（北京航空学院）

摘 要

本文叙述了用参数插入方法求解Riccati代数矩阵方程的原理，并加以证明。给出一种新的Riccati代数矩阵方程的求解算法。用本方法求解了一个十二维方程，说明本算法计算量较少，且可提高精度。

Riccati代数矩阵是现代控制理论中经常用到的方程。本文在文〔1〕的基础上把解该方程的迭代法及插入法的优点集中起来，探讨插入法在Riccati代数矩阵方程初始迭代值选择上的应用。

一、问题的提出

动态系统E：$\dot{X}=AX+BU$在性能指标$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (X'QX+U'RU)dt$下有最优控制$U^*=-R^{-1}B'KX$。这里K满足Riccati代数矩阵方程

$$A'K+KA+Q-KSK=0(\text{其中}S=BR^{-1}B'). \qquad (1)$$

取迭代形式为

$$\left.\begin{aligned}&(A-SK_i)'K_{i+1}+K_{i+1}(A-SK_i)=-Q-K_iSK_i, i=0,1,\cdots\\&\delta K_{i+1}(A-SK_i)+(A-SK_i)'\delta K_{i+1}=\delta K_iS\delta K_i,\\&K_{i+1}=K_i+\delta K_{i+1}, \qquad i=2,\ 3,\ \cdots.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

这就是Kleinman加速收敛迭代[2]，但它不太适用于K_0的选取。本文的目的是选一个与加权阵Q，R有关，但又不必依赖于开环或闭环特征根的初始阵，以加快迭代收敛。

二、插入法原理

在（1）式中引入参数ε，0⩽ε⩽1，有

$$A'(\varepsilon)K(\varepsilon)+K(\varepsilon)A(\varepsilon)+\varepsilon Q(\varepsilon)-K(\varepsilon)S(\varepsilon)K(\varepsilon)=0, \qquad (3)$$

本文于1983年2月27日收到。

使$A(0)$为渐近稳定，$A(1)=A$，$Q(1)=Q$，$S(1)=S$，于是（1）式的解等价于（3）式在$\varepsilon=1$时的解。

定理。设矩阵$A(\varepsilon)$，$S(\varepsilon)$和$Q(\varepsilon)$为ε的连续函数并且可微，对所有的$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$值$R(\varepsilon)$为正定阵，而且对任何$C'(\varepsilon)C(\varepsilon)=Q(\varepsilon)$和$\varepsilon$，$[A(\varepsilon), C(\varepsilon)]$为完全可观。如果在$\varepsilon=0$时$A(\varepsilon)$是渐近稳定的，则

$$H[K(\varepsilon),\ \varepsilon]=A'(\varepsilon)K(\varepsilon)+K(\varepsilon)A(\varepsilon)-K(\varepsilon)S(\varepsilon)K(\varepsilon)+\varepsilon Q(\varepsilon)=0 \qquad (4)$$

的正定解在$\varepsilon=0$时为孤立零阵。

下面叙述几个引理，然后证明该定理。

引理1.
$$cs(ABC)=(C'\otimes A)csB. \qquad (5)$$

符号cs表示按列展开矩阵为列向量；$\otimes$为克罗内克积[3]。

引理2.
$$\frac{dCD}{dB}=\frac{dC}{dB}(I_q\otimes D)+(I_p\otimes C)\frac{dD}{dB}. \qquad (6)$$

式中
$$B\in R^{p\times q}.$$

引理3.
$$\frac{d}{dB}(A\otimes C)=\frac{dA}{dB}\otimes C+\left[A\otimes\frac{\partial C}{\partial b_{ij}}\right]. \qquad (7)$$

引理4.
$$(A\otimes C)(B\otimes C)=AB\otimes CD. \qquad (8)$$

引理5.
$$\frac{dK'}{d(csK)'},\quad I_n\otimes rsI_n \qquad (9)$$

符号rs表示按行展开矩阵为行向量；$K\in R^{n\times n}$。

引理6.
$$\frac{dcsK}{d(csK)'}=I_{nn},\quad I_{nn}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}_{nn\times nn}. \qquad (10)$$

引理7. $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)=A\otimes B\otimes C.$ (11)

引理8. $I_{nn}=I_n\otimes I_n.$ (12)

引理9. $rsI_n\cdot(I_n\otimes A)=rsA.$ (13)

引理10. $(rsA\otimes I_n)\cdot(I_n\otimes csK)=KA'$ (14)

引理11. 将（4）式H按列展成列向量csH，对列向量csK求导后有

$$\Omega=\frac{dcsH}{d(csK)'}=I_n\otimes(A-SK)'+(A-SK)'\otimes I_n. \qquad (15)$$

证明.

$$csH=cs(A'K)+cs(KA)-cs(KSK)+cs(\varepsilon Q) \qquad \text{（由引理1）}$$
$$=(I_n\otimes A')csK+(A'\otimes I_n)csK-[(SK)'\otimes I_n]csK+cs(\varepsilon Q),$$

$$\Omega=(A-SK)'\otimes I_n+I_n\otimes A'-\left\{\left[\frac{dK'S'}{d(csK)'}\right]\otimes I_n\right\}(I_{nn}\otimes csK).$$

（由引理6，2，3，7）（16）

（16）式最后一项为

$$\left[\frac{dK'S'}{d(csK)'}\otimes I_n\right](I_{nn}\otimes csK)$$

$$=\left\{\left(\frac{dK'}{d(csK)'}(I_{nn}\otimes S')\right)\otimes I_n\right\}\cdot(I_{nn}\otimes csK) \quad \text{(由引理2, } q=nn\text{)}$$

$$=\{[(I_n\otimes rsI_n)(I_{nn}\otimes S')]\otimes I_n\}(I_{nn}\otimes csK) \quad \text{(由引理5)}$$

$$=\{[(I_n\otimes rsI_n)\cdot(I_n\otimes I_n\otimes S')]\otimes I_n\}(I_{nn}\otimes csK) \quad \text{(由引理8,7)}$$

$$=\{(I_n\cdot I_n)\otimes[rsI_n(I_n\otimes S')]\otimes I_n\}(I_{nn}\otimes csK) \quad \text{(由引理4,7)}$$

$$=[I_n\otimes(rsS')\otimes I_n]\cdot[I_n\otimes I_n\otimes csK] \quad \text{(由引理9,7,8)}$$

$$=(I_n\cdot I_n)\otimes\{[rsS')\otimes I_n][I_n\otimes csK]\} \quad \text{(由引理4)}$$

$$=I_n\otimes(KS). \quad \text{(由引理10, } S'=A\text{)} \quad (17)$$

将（17）代入（16）式，注意到$S'=S$，$K'=K$，则可得到（15）式，引理证毕。

把K和H阵映射为向量形式k和h，其雅克比阵可由下面克罗内克积表示（由引理11）：

$$\Omega(\varepsilon)=I_n\otimes[A(\varepsilon)-S(\varepsilon)\cdot K(\varepsilon)]'+[A(\varepsilon)-S(\varepsilon)\cdot K(\varepsilon)]'\otimes I_n.$$

由文[3]可知

$$\Omega(\Omega(\varepsilon))=\{\lambda_i+\lambda_j,j;\quad i,j=1,2,\cdots,n\},$$

这里，$\lambda_i\in\Omega[A(\varepsilon)-S(\varepsilon)K(\varepsilon)]$。Ω（矩阵）表示该矩阵的特征根集合。当$\varepsilon=0$，$K(0)=0$，则Ω(0)的特征根为A(0)各种可能的两个特征根之和[3]。由于A(0)是渐近稳定的，所以$\lambda_i+\lambda_j$有负实部，且不等于零，所以Ω(0)非奇异，且$K=0$对应的$H(K,\varepsilon)=0$.是孤立的(isolated)。对（4）式进行微分，得到

$$[A(\varepsilon)-S(\varepsilon)K(\varepsilon)]'\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}+\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}[A(\varepsilon)-S(\varepsilon)\cdot K(\varepsilon)]+G(\varepsilon)=0. \quad (18)$$

式中 $$G(\varepsilon)=\alpha'(\varepsilon)K(\varepsilon)+K(\varepsilon)\alpha(\varepsilon)-K(\varepsilon)\xi(\varepsilon)K(\varepsilon)+Q(\varepsilon)+\varepsilon\beta(\varepsilon), \quad (19)$$

$$\alpha(\varepsilon)=\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon},\quad \xi(\varepsilon)=\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial\varepsilon},\quad \beta(\varepsilon)=\frac{\partial Q(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}. \quad (20)$$

当$\varepsilon=0$时，方程（18）简化为

$$A'(0)\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}+\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}A(0)+Q(0)=0. \quad (21)$$

这是形如$A'X+XA=-Q$的Ляпунов方程。若A(0)是渐近稳定的，则$\frac{dK(0)}{d\varepsilon}$有正定解。由于K(ε)是ε的连续函数，$\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$是正定的，于是孤立零阵$K=0$在小的ε变动中成为正定阵。因此若A(ε)在$\varepsilon=0$渐近稳定，而且当$\varepsilon\to0$时满足上面的条件，则正定阵K(ε)有极限$\lim\limits_{\varepsilon\to0}K(\varepsilon)=0$变为一孤立零阵。

三、计算方法

按照上述推导，取

$$A(\varepsilon)=(\varepsilon^2a_{ij}+(a_{ij}-a_0+\varepsilon^2a_0-\varepsilon^2a_{ij})\delta_{ij}], \quad (22)$$

$$S(\varepsilon)=S, \quad (23)$$

$$Q(\varepsilon)=Q. \quad (24)$$

式中a_0为一常数，$a_0=\max\limits_{i}\{1,\ \max(a_{ii})+1\}$。同时，用欧拉积分公式

$$K_i(\varepsilon)=K_{i-1}+\Delta\varepsilon\frac{dK_{i-1}(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{25}$$

以上四式再加上（18），（19），（20）式就构成了插入法求解K(1)的基本公式。然后利用K(1)做为（2）式的K_0，由（2）式求得K。计算步骤如下：

1）设置初始值 $\varepsilon=0$，$K(0)=0$，$\Delta\varepsilon=\frac{2}{n}$；

2）由（18）式计算$\frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon}$；

3）由（25）式计算$K_i(\varepsilon)$；

4）当$\varepsilon<1$时返回2）；

5）解出K（1）做为Kleinman方法的迭代初值$K_0=K(1)$，由（2）式求解K，直到迭代收敛为止。

四、计算例子

下面是个十二维例子：

矩阵A

-.12870E+1	.3980E-2	0	0	0	0	0	-.17668E+2	-.70900E+0	0	0	0
.24377E+3	-.74200E+0	0	0	0	0	0	-.86182E-1	0	-.24377E+3	-.15014E+3	
.12000E+3	0	0	.10000E+1	.10000E+1	0	0	0	0	0	0	0
-.26485E+2	.40818E+1	0	-.40000E+1	0	0	0	-.36357E+3	-.14591E+2	0	0	0
0	0	0	0	0	.10000E+1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-.55000E+2	-.13500E+2	0	0	0	0	0	0
.30000E+1	0	0	0	0	0	-.30000E+1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-.18749E-2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-.27614E+2	.27614E+2	.17008E+2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-.61592E+0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-.10000E+1	-.615925E+0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-.10000E+1

矩阵S

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	.10576+E2	0	0	0	0	0	.22994E+0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	.22994E+0	0	0	0	0	0	4994E−2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

矩阵 Q

.14400E+4	0	0	.12000E+2	12000E+2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	.12000E+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.12000E+2	0	0	.10000E+0	.10000E+0	0	0	0	0	0	0	0
.12000E+2	0	0	.10000E+0	.10000E+0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	.60000E+1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

经过七次Ляпунов 方程迭代(迭代次数分别为五，七，七，七，七，七，七次)之后，得到矩阵K(1)：

.55017E+3	.19656E+1	.12663E+2	.34350E+1	.37825E+1	.22475E+0
.19656E+1	.98438E-2	.37766E-1	.10714E-1	.10171E-1	.71725E-3
.12663E-2	.37766E-1	.68033E+0	.83678E-1	.95859E-1	.52896E-3
.34353E+1	.10714E-1	.83678E-1	.22783E-1	.25328E-1	.14048E-2
.37825E+1	.10171E-1	.95859E-1	.25328E-1	.30986E-1	.17988E-2
.22475E+0	.71725E-3	.52896E-2	.14048E-2	.17988E-2	.11764E-3
0	0	0	0	0	0
-.11358E+4	-.54426E+1	-.21474E+2	-.59040E+1	-.60337E+1	-.43390E+1
-.14071E+2	-.53577E-1	-.31018E+0	-.85300E-1	-.95104E-1	-.59471E-2
-.56064E+2	-.43913E+0	-.53774E+0	-.20294E+0	-.44244E-1	-.43258E-2
-.31689E+2	-.26937E+0	-.21372E+0	-.99856E-1	.87982E-2	.29334E-3
.12766E+1	.58872E-2	.25485E-1	.68999E-2	.73385E-2	.62860E-3

0	-.11358E+4	-.14071E+2	-.56064E+2	-.31689E+2	.12766E+1
0	-.54426E-1	-.53577E-1	-.43913E+0	-.26937E+0	.58872E-2
0	-.21474E-2	-.31018E+0	-.53774E+0	-.21372E+0	.25485E-1
0	-.59040E+1	-.85300E-1	-.20294E+0	-.99856E-1	.68999E-2
0	-.60337E+1	-.95104E-1	-.44244E-1	.87982E-2	.73385E-2
0	-.43390E+0	-.59471E+2	-.43258E-2	.29334E-3	.62860E-3
0	0	0	0	0	0
0	.37160E+4	.30875E+2	.25229E+3	.15816E+3	-.38513E+1
0	.30875E+2	.36972E+0	.15673E+1	.88812E+0	-.35655E-1
0	.25229E+3	.15673E+1	.47929E+2	.29384E+2	-.14373E-1
0	.15816E+3	.88812E+0	.29384E+2	.31614E+2	.19538E+0
0	-.38513E+1	-.35655E-1	.-14373E-1	.19538E+0	.13446E-1

将K(1)做为K_0，经过四次（七，六，六，六次）Ляпунов方程迭代后，得到Riccati方程的解为矩阵K：

迭代收敛判别取相对误差限为0.001。

$$
\left(\begin{matrix}
.44954E+3 & .15241E+1 & .10162E+2 & .27847E+1 & .32284E+1 & .17278E+0 \\
.15241E+1 & .67412E-2 & .30646E-1 & .82328E-2 & .95330E-2 & .61758E-3 \\
.10162E+2 & .30646E-1 & .58715E+0 & .66330E-1 & .77101E-1 & .39263E-2 \\
.27847E+1 & .82328E-2 & .66330E-1 & .18294E-1 & .21259E-1 & .10699E-2 \\
.32284E+1 & .95330E-2 & .77101E-1 & .21259E-1 & .24809E-1 & .12670E-2 \\
.17278E+0 & .6758\ E-3 & .39263E-2 & .10699E-2 & .12670E-2 & .75936E-4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.88468E+3 & -.40342E+1 & -.16902E+2 & -.45337E+1 & -.52310E+1 & -.33950E+0 \\
-.10730E+2 & -.39351E-1 & -.23702E+0 & -.64585E-1 & -.75699E-1 & -.44055E-2 \\
-.44543E+2 & -.24310E+0 & -.68749E+0 & -.18080E+0 & -.20108E+0 & -.14179E-1 \\
-.26191E+2 & -.14294E+0 & -.39577E+0 & -.10416E+0 & -.11584E+0 & -.81502E-2 \\
.91935E+0 & .46786E-2 & .16992E-1 & .44952E-2 & .51003E-2 & .36426F-3
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
0 & -.88468E+3 & -.10730E+2 & -.44543E-2 & -.26191E+2 & .91935E+0 \\
0 & -.40342E+1 & -.39351E-1 & -.24310E+0 & -.14294E+0 & .46786E-2 \\
0 & -.16902E+2 & -.23702E+0 & -.68749E+0 & -.39577E+0 & .16992E+1 \\
0 & -.45337E+1 & -.64585E-1 & -.18080E+0 & -.10410E+0 & .44952E-2 \\
0 & -.52310E+1 & -.75699E-1 & -.20108E+0 & -.11584E+0 & .51003E-2 \\
0 & -.33950E+0 & -.44055E-2 & -.14179E-1 & -.81502E-2 & .36426E-3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .28145E+4 & .22823E+2 & .18156E+3 & .11488E+3 & -.27839E+1 \\
0 & .22823E+2 & .26964E+0 & .11576E+1 & .68031E+0 & -.24109E-1 \\
0 & .18156E+3 & .11576E+1 & .15091E+2 & .93700E+1 & -.18132E+0 \\
0 & .11488E+3 & .68031E+0 & .93700E+1 & .60225E+1 & -.10516E+0 \\
0 & -.27839E+1 & -.24109E-1 & -.18132E+0 & -.10516E+0 & .35413E-2
\end{matrix}\right)
$$

若用Kleinman的起始增益方法[2]

$$
K_0 = BR^{-1}B'\left\{\int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau\right\}^{-1} \tag{26}
$$

（K_0仅与A，B，R阵有关，与Q阵无关，一般距K较远。）在同样的迭代收敛判别限下，则需十次Ляпунов迭代（+，+－，+－，+－，+－，+－，+－，+－，+－，+－）。显然，仅考虑 Riccati 方程初值K_0确定之后的计算量，参数插入方法远远小于起始增益方

法（约占四分之一左右）。若计入插入方法中用列的Ляпунов迭代，并且不计入用起始增益方法求解初始K_0的计算量，本方法的总的计算量也比起始增益方法减少约四分之一。值得注意的是，本方法对高阶方程及条件严的方程也易于得到较好的收敛效果。同时，当增加收敛判别精度时，本方法还可以进一步提高计算精度。

参 考 文 献

〔1〕 Jamshidi, M. and Böttiger, A Parameter Imbedding Solutinn of Algebraic Matrix Riccati Equation, Int. J. Control **25** (1977), 271-281.

〔2〕 Van Dierendonck A. J. and Hartman, Quadattic Methodolegy, Volume Ⅱ Documentation of Computer Programs, AD-A006732.

〔3〕 须田信英，児玉慎三，池田雅夫著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社（1979）.

AN APPLICATION OF PARAMETER IMBEDDING METHOD TO SOLVING ALGEBRAIC MATRIX RICCATI EQUATION

Lu Jingbao

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, the principle of solving algebraic matrix Riccati equation by the parameter imbedding method is discribed and then a theorem is proved. A new algorithm for solving algebraic matrix Riccati equation is presented An example corresponding to a 12-dimension system is given, which shows that for the algorithm, less calculation is required and accuracy can be increased.