三时标系统准最优控制的分解
——双参量奇异摄动方法

汤学炳
（江汉石油学院）

摘 要

本文介绍了三时标系统的一种分解设计方法。该方法能明显地降低系统的阶次，简化最优调节器的设计。

多时标系统在实际工程系统中广泛地存在着，它们一般都是具有不同快，慢模态的高阶系统。对于它们进行最优控制设计是非常困难的，所以寻求有效的简化方法就十分必要。文〔1〕提出了线性系统的准最优控制问题，文〔2〕成功地解决了双时标系统准最优控制的分解，文〔3〕则提出了含有一个大参量和一个小参量的准最优设计问题。

本文用双参量奇异摄动方法[4]解决含有两个小参量的三时标系统的准最优控制问题。基本思想是将一个高阶系统分解为三个独立的低阶子系统，并分别设计三个子系统的调节器，它们的合成控制就是原系统的准最优控制。

设所考虑的线性定常系统为

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + B_1u, \tag{1.1}$$

$$\lambda\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + B_2u, \tag{1.2}$$

$$\mu_0\dot{x}_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + B_3u. \tag{1.3}$$

初始条件 $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, $x_3(0) = x_{30}$.

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3. \tag{2}$$

式中x_1，x_2，x_3分别是n_1，n_2，n_3维状态向量；u是m维控制向量；y是p维输出向量；矩阵A_{ij}，B_i，C_i，$i,j=1,2,3$，分别为具有相应阶次的常数矩阵；λ，μ_0是大于零的小参量，而且当$\lambda\to$时，μ_0/λ^2（至少μ_0/λ）$\to 0$。

现在的问题是寻求系统（1），（2）的最优控制u_{opt}，使性能指标J取极小。

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y^Ty + u^TRu)\,dt, \quad R>0. \tag{3}$$

设A_{33}和$A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$非奇异。令$\lambda\to 0$，从而有$\mu_0\to 0$，则由（1.2）和（1.3）式可得

本文于1983年4月12日收到。

$$\bar{x}_2 = -A_2^{-1}A_1\bar{x}_1 - A_2^{-1}E_2\bar{u}, \tag{4}$$

$$\bar{x}_3 = -A_{33}^{-1}A_3\bar{x}_1 - A_{33}^{-1}E_3\bar{u}. \tag{5}$$

式中　$A_1 = A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}$； $A_2 = A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$； $A_3 = A_{31} - A_{32}A_2^{-1}A_1$； $E_2 = B_2 - A_{23}A_{33}^{-1}B_3$； $E_3 = B_3 - A_{32}A_2^{-1}E_2$。将（4）和（5）代入（1.1）和（2）式得

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_0\bar{x}_1 + B_0\bar{u}, \tag{6}$$

$$\bar{y} = C_0\bar{x}_1 + D_0\bar{u}. \tag{7}$$

式中　$A_0 = A_{11} - A_{12}A_2^{-1}A_1 - A_{13}A_{33}^{-1}A_3$；　$B_0 = B_1 - A_{12}A_2^{-1}E_2 - A_{13}A_{33}^{-1}E_3$； $C_0 = C_1 - C_2A_2^{-1}A_1 - C_3A_{33}^{-1}A_3$；$D_0 = -(C_2A_2^{-1}E_2 + C_3A_{33}^{-1}E_3)$. 初始条件$x_{10} = \bar{x}_1(0)$. 方程（6）和（7）为系统的降阶模型，它反映了系统的慢模态，阶次为n_1。设其性能指标为

$$J_s = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\bar{y}^T\bar{y} + \bar{u}^T R\bar{u})\,dt. \tag{8}$$

条件1. 如果（A_0，B_0，C_0）是可稳定的和可检测的，则式（6）、（7）、（8）存在最优控制$\bar{u}$。

$$\bar{u} = -(R + D_0^TD_0)^{-1}(D_0^TC_0 + B_0^TK_s)\bar{x}_1. \tag{9}$$

式中K_s为黎卡提方程（10）的半正定解。

$$-K_s(A_0 - B_0(R + D_0^TD_0)^{-1}D_0^TC_0) - (A_0 - B_0(R + D_0^TD_0)^{-1}D_0^TC_0)^TK_s + K_sB_0(R + D_0^TD_0)^{-1}B_0^TK_s - (C_0^TC_0 - C_0^TD_0(R + D_0^TD_0)^{-1}D_0^TC_0) = 0. \tag{10}$$

为了引入边界层校正，设慢变量在快的瞬变过程中为常数，即有x_1 = 常数，$\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_3 = 0$。令　$x_2 - \bar{x}_2 = x_{m2}$，　$x_3 - \bar{x}_3 = x_{m3}$，　$u - \bar{u} = u_m$，　$y - \bar{y} = y_m$，可得

$$\lambda\dot{x}_{m2} = A_{22}x_{m2} + A_{23}x_{m3} + B_2u_m, \tag{11.1}$$

$$\mu_0\dot{x}_{m3} = A_{32}x_{m2} + A_{33}x_{m3} + B_3u_m, \tag{11.2}$$

$$y_m = C_2x_{m2} + C_3x_{m3}. \tag{12}$$

引入扩展变换$\tau = t/\lambda$，并设$\mu_0 = \mu\lambda$，μ是大于零的小参量。这样，（11）式可表示为

$$\frac{dx_{m2}(\tau)}{d\tau} = A_{22}x_{m2}(\tau) + A_{23}x_{m3}(\tau) + B_2u_m(\tau), \tag{13.1}$$

$$\mu\frac{dx_{m3}(\tau)}{d\tau} = A_{32}x_{m2}(\tau) + A_{33}x_{m3}(\tau) + B_3u_m(\tau). \tag{13.2}$$

不难看出，令$\mu\to0$，可将（13）式分解为两个子系统。快子系统 I 为

$$\frac{d\bar{x}_{m2}(\tau)}{d\tau} = A_2\bar{x}_{m2} + E_2\bar{u}_m(\tau), \tag{14}$$

$$\bar{y}_m = C\bar{x}_{m2} + D\bar{u}_m. \tag{15}$$

式中$C=C_2-C_3A_{33}^{-1}A_{32}$，$D=-C_3A_{33}^{-1}B_3$。初始条件 $\overline{x}_{m2}(0)=x_{20}-\overline{x}_2$。(14) 和(15)式为 (13) 式在$\tau$时标中的降阶模型，阶次为$n_2$。设其性能指标为

$$J_m=\frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}(\overline{y}_m^T\overline{y}_m+\overline{u}_m^T R\overline{u}_m)d\tau. \tag{16}$$

条件2. 如果（A_2，E_2，C）是可稳定的和可检测的，则（14），（15），(16) 式的最优控制是：

$$\overline{u}_m=-(R+D^TD)^{-1}(D^TC+E_2^TK_m)\overline{x}_{m2}. \tag{17}$$

式中K_m为黎卡提方程（18）的半正定解。

$$-K_m(A_2-E_2(R+D^TD)^{-1}D^TC)-(A_2-E_2(R+D^TD)^{-1}D^TC)^TK_m+$$
$$K_mE_2(R+D^TD)^{-1}E_2{}^TK_m-(C^TC-C^TD(R+D^TD)^{-1}D^TC)=0. \tag{18}$$

快子系统Ⅱ为

$$\frac{dx_f(\theta)}{d\theta}=A_{33}x_f(\theta)+B_3u_f(\theta), \tag{19}$$

$$y_f(\theta)=C_3x_f(\theta). \tag{20}$$

式中$x_f=x_{m3}-\overline{x}_{m3}$； $\overline{x}_{m3}=-A_{33}^{-1}A_{32}\overline{x}_{m2}-A_{33}^{-1}B_3\overline{u}_m$； $u_f=u_m-\overline{u}_m$； $y_f=y_m-\overline{y}_m$； $\theta=\tau/\mu=t/\mu_0$。设其性能指标为

$$J_f=\frac{\mu_0}{2}\int_0^{\infty}y_f{}^Ty_f+u_f{}^TRu_f)d\theta. \tag{21}$$

条件3. 如果（A_{33}，B_3，C_3）是可稳定的和可检测的，则（19），（20），(21) 式的最优控制为

$$u_f=-R^{-1}B_3{}^TK_fx_f. \tag{22}$$

式中K_f为黎卡提方程（23）的半正定解。

$$-K_fA_{33}-A_{33}^TK_f+K_fB_3R^{-1}B_3{}^TK_f-C_3{}^TC_3=0. \tag{23}$$

根据以上求得的在三种时标t，τ，θ中的各子系统的最优控制，可以获得系统的合成控制 $u_c=\overline{u}+\overline{u}_m+u_f$，并表示为

$$\begin{aligned}u_c=&-\{[I-(I-R^{-1}B_3{}^TK_fA_{33}^{-1}B_3)(R+C^TD)^{-1}(D^TC+E_2{}^TK_m)A_2^{-1}E_2-\\&R^{-1}B_3{}^TK_fA_{33}^{-1}(A_{32}A_2^{-1}E_2+E_3)](R+D_0{}^TD_0)^{-1}(D_0{}^TC_0+B_0{}^TK_s)+\\&(I-R^{-1}B_3{}^TK_fA_{33}^{-1}B_3)(R+D^TD)^{-1}(D^TC+E_2{}^TK_m)A_2^{-1}A_1+R^{-1}B_3{}^T\\&K_fA_{33}^{-1}(A_{32}A_2^{-1}A_1+A_3)\}x_1-[(I-R^{-1}B_3{}^TK_fA_{33}^{-1}B_3)(R+D^TD)^{-1}\\&(D^TC+E_2{}^TK_m)+R^{-1}B_3{}^TK_fA_{33}^{-1}A_{32}]x_2-R^{-1}B_3{}^TK_fx_3.\end{aligned} \tag{24}$$

令$[B_2{}^T,\ B_3{}^T/\mu]=\tilde{B}_2{}^T$，$\begin{bmatrix}K_m & \mu K_f\\ \mu K_f^T & \mu K_f\end{bmatrix}=P$，$Z=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}$则（24）式简化为

$$\begin{aligned}u_c=-\Bigg\{&\left(I-R^{-1}\tilde{B}_2{}^TP\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E_2\\ E_3\end{bmatrix}\right)(R+D_0{}^TD_0)^{-1}(D_0{}^TC_0+B_0{}^TK_s)+\\&R^{-1}\tilde{B}_2{}^TP\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_1\\ A_3\end{bmatrix}\Bigg\}_{\mu=0}x_1-R^{-1}\tilde{B}_2{}^TPz\,|_{u=0}.\end{aligned} \tag{25}$$

式中$K_f=[K_m(B_2R^{-1}B_3^TK_f-A_{23})-(C_2^TC_3+A_{32}^TK_f)](A_{33}-B_3R^{-1}B_3^TK_f)^{-1}$。

为了说明（25）式的 u_c 是系统（1），（2）的准最优控制，将（1）和（2式改写为

$$\dot{x}_1=A_{11}x_1+\tilde{A}_{12}z+B_1u, \tag{26.1}$$

$$\lambda\dot{z}=\tilde{A}_{21}x_1+\tilde{A}_{22}z+\tilde{B}_2u, \tag{26.2}$$

$$y=C_1x_1+\tilde{C}_2z. \tag{27}$$

式中 $\tilde{A}_{12}=[A_{12}\ \ A_{13}]$；$\tilde{A}_{21}=\begin{bmatrix}A_{21}\\A_{31}/\mu\end{bmatrix}$；$\tilde{A}_{22}=\begin{bmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}/\mu&A_{33}/\mu\end{bmatrix}$；$\tilde{B}_2=\begin{bmatrix}B_2\\B_3/\mu\end{bmatrix}$；$\tilde{C}_2=[C_2\ \ C_3]$。令$\lambda\to0$，得（26）和（27）式的降阶模型为

$$\bar{z}=-\tilde{A}_{22}^{-1}A_{21}\bar{x}_1-\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2x, \tag{28}$$

$$\dot{\bar{x}}_1=\tilde{A}_0\bar{x}_1+\tilde{B}_0\bar{u}, \tag{29}$$

$$\bar{y}=\tilde{C}_0\bar{x}_1+\tilde{D}_0\bar{u}. \tag{30}$$

式中 $\tilde{A}_0=A_{11}-\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$；　$\tilde{B}_0=B_1-\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$；　$\tilde{C}_0=C_1-\tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$；$\tilde{D}_0=-\tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$。可以证明它等于前面的降阶模型．由

$$\tilde{A}_{22}^{-1}=\begin{bmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}/\mu&A_{33}/\mu\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_2^{-1}&-\mu A_2^{-1}A_{23}A_{33}^{-1}\\-A_{33}^{-1}A_{32}A_2^{-1}&\mu A_{33}^{-1}(I+A_{32}A_2^{-1}A_{23}A_{33}^{-1})\end{bmatrix}, \tag{31}$$

可得

$$\tilde{A}_0=A_{11}-\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}=A_{11}-A_{12}A_2^{-1}A_1-A_{13}A_{33}^{-1}A_3=A_0, \tag{32}$$

$$\tilde{B}_0=B_1-\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2=B_1-A_{12}A_2^{-1}E_2-A_{13}A_{33}^{-1}E_3=B_0. \tag{33}$$

同理$\tilde{C}_0=C_0$，$\tilde{D}_0=D_0$。故（29），（30）式分别等于（6），（7）式．

同样可得到（26），（27）式在$\tau=t/\lambda$中的快子系统：

$$\frac{dz_m}{d\tau}=\tilde{A}_{22}z_m+\tilde{B}_2u_m, \tag{34}$$

$$y_m=\tilde{C}_2z_m. \tag{35}$$

式中 $z_m=z-\bar{z}$；$y_m=y-\bar{y}$。（34），（35）式就是子系统（11），（12）．它在相应性能指标下的最优控制为

$$u_m=-R^{-1}\tilde{B}_2^T\tilde{P}z_m. \tag{36}$$

式中$\tilde{P}$为黎卡提方程（37）的半正定解。

$$-\tilde{P}\tilde{A}_{22}-\tilde{A}_{22}^T\tilde{P}+\tilde{P}\tilde{B}_2R^{-1}\tilde{B}_2^T\tilde{P}-\tilde{C}_2^T\tilde{C}_2=0. \tag{37}$$

根据文[2]，可得到合成控制：

$$\tilde{u}_c=\bar{u}+u_m=-[((I-R^{-1}\tilde{B}_2^T\tilde{P}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2)(R+D_0^TD_0)^{-1}(D_0^TC_0+B_0^TK_s)+R^{-1}\tilde{B}_2^T\tilde{P}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}]x_1-R^{-1}\tilde{B}_2^T\tilde{P}z. \tag{38}$$

由(32)和(33)式可得$\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}=\begin{bmatrix}A_2&0\\0&A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_1\\A_3\end{bmatrix}$；$\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2=\begin{bmatrix}A_2&0\\0&A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E_2\\E_3\end{bmatrix}$.

代入（25）式，则$\mathbf{u}_c$可表示为

$$\mathbf{u}_c=-\left[\left(\left(I-R^{-1}\tilde{B}_2^TP\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2\right)(R+D_0^TD_0)^{-1}(D_0^TC_0+B_0^TK_s)+R^{-1}\tilde{B}_2^TP\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}\right)\mathbf{x}_1-P^{-1}\tilde{B}_2^TP\mathbf{z}\right] \tag{39}$$

比较（38）与（39）式，除$\tilde{P}$与P的区别外其它完全相同，而P是$\tilde{P}$的$O(\mu)$近似，所以$\mathbf{u}_c$是$\tilde{\mathbf{u}}_c$的$O(\mu)$近似。又知$\tilde{\mathbf{u}}_c$是$\mathbf{u}_{opt}$的$O(\lambda)$近似，所以$\mathbf{u}_c$是原系统的准最优控制。

定理. 如果满足条件1到3，则存在$\lambda^*>0$，$\mu_0^*>0$，当$\lambda\in(0,\ \lambda^*]$，$\mu_0\in(0,\mu_0^*]$时，则调节器问题（1），（2）和（3）的准最优解$\mathbf{u}_c$存在，且$\mathbf{u}_c$为最优控制$\mathbf{u}_{opt}$的$O(\varepsilon)$近似，$\varepsilon=\max\{\lambda,\ \mu\}$。

将合成控制$\mathbf{u}_c$表示为规范形式：

$$\mathbf{u}_c=-R^{-1}B^TK\,\mathbf{x}\Big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu_0=0}} \tag{40}$$

式中 $B^T=[B_1^T\ \ B_2^T/\lambda\ \ B_3^T/\mu_0]$；$K=\begin{bmatrix}K_s & \lambda K_n\\ \lambda K_n^T & \lambda P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_s & \lambda K_{n1} & \mu_0K_{m2}\\ \lambda K_{n1}^T & \lambda K_m & \mu_0K_l\\ \mu_0K_{n2}^T & \mu_0K_l^T & \mu_0K_l\end{bmatrix}$；

$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$；$K_n^T=\begin{bmatrix}K_{n1}^T\\ \mu K_{n2}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(H_1-H_2H_4^{-1}H_3)^{-1}(G_1-H_2H_4^{-1}G_2)\\ \mu H_4^{-1}(G_2-H_3K_{n1}^T)\end{bmatrix}$，其中$H_1=A_{22}^T-K_mS_2-K_lS_{23}^T$，$H_2=A_{32}^T-K_mS_{23}-K_lS_3$，$H_3=A_{23}^T-K_lS_{23}^T$，$H_4=A_{33}^T-K_lS_3$，$G_1=(K_mS_{21}+K_lS_{31}-A_{12}^T)K_s-K_mA_{21}-K_lA_{31}-C_2^TC_1$，$G_2=(K_lS_{31}-A_{13}^T)K_s-K_lA_{31}-C_3^TC_1$，$S_2=B_2R^{-1}B_2^T$，$S_3=B_3R^{-1}B_3^T$，$S_{23}=B_2R^{-1}B_3^T$，$S_{21}=B_2R^{-1}B_1^T$，$S_{31}=B_3R^{-1}B_1^T$。

例. 考虑系统$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \lambda\dot x_2\\ \mu_0\dot x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.325 & 0\\ 0.04 & -0.4 & 0.32\\ 0 & 0 & -0.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$，

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_3\end{bmatrix},\quad J=\frac{1}{2}\int_0^\infty(\mathbf{y}^T\mathbf{y}+\mathbf{u}^T\mathbf{u})dt,\quad \lambda=0.1,\quad \mu_0=0.01.$$

可求得最优控制$\mathbf{u}_{opt}$的$K_{opt}=\begin{bmatrix}1.602885 & 0.206588 & 0.072395\\ 0.206588 & 0.333632 & 0.044734\\ 0.072395 & 0.044734 & 0.0299195\end{bmatrix}$，　合成控制$\mathbf{u}_c$中的

$$K=\begin{bmatrix}1.518137 & 0.211213 & 0.074949\\ 0.211213 & 0.293945 & 0.042066\\ 0.074947 & 0.042066 & 0.023607\end{bmatrix}.$$

比较K_{opt}和K，可见具有很好的近似性。

参 考 文 献

〔1〕 Sannuti P and Kokotovic P.V, Near-optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method, IEEE Trans.Automat Control AC-15(1969) 15-21.

〔2〕 Chow.J.H and Kokotovic.P.V, A Decompositions of Near-optimum Regulators for Systems With Slow and Fast Modes, IEEE Trans. Automat Control AC-21(1976), 701-705.

〔3〕 Mahmoud.M.S, Near-optimal Control Design for Three-Time Scales System, Preprints of the 2nd World IFAC Symposium, Large Scale Systems: Theory and Applications, (1980)221-228.

〔4〕 O'Malley.R.E, Introduction to Singular Rerturbations, Academic Press (1974).

A DECOMPOSITION OF NEAR-OPTIMAL CONTROL FOR THREE-TIME-SCALE SYSTEMS—THE TWO-PARAMETER SINGULAR PERTURBATION METHOD

Tang Xuebing
JiangHan Petroleum Institute

Abstract

In this paper, a decomposed design method is proposed for three-time-scale systems. It can obviously reduce the system order and Simplify the optimal regulator design.