

# 一类非平稳随机序列的最优滤波和预测

赵希人

(哈尔滨船舶工程学院)

## 摘 要

本文针对一类非平稳随机序列提出一种最优的滤波方法。文中用Z变换导出了这种最优滤波器的传递函数及物理可实现的解，举例说明了这种最优滤波器的具体算法，并把这种滤波器的性能与卡尔曼滤波器的性能进行了比较。最后，简单地介绍了它的应用。

## 一、问题的提法

本文所考察的一类非平稳随机序列模型是

$$\left. \begin{aligned} x(k) &= a_1 x(k-1) + \dots + a_n x(k-n) + b_0 u(k) \\ &\quad + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m), \\ z(k) &= x(k) + v(k), \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $n \geq m$ ;  $\{x(k), k=1, 2, \dots\}$  为系统输出序列，通常称之为信号序列;  $\{u(k), k=1, 2, \dots\}$  为系统输入序列，通常是已知的非随机序列;  $\{z(k), k=1, 2, \dots\}$  为测量输出序列;  $\{v(k), k=1, 2, \dots\}$  为白色或时间相关的干扰序列，且  $E v(k) = 0$ ,  $E v^2(k) = \sigma^2$ ,  $k=1, 2, \dots$ ，而  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  均为系统参数，这里假定为常数。

上述一类非平稳随机序列模型在无线电导航，通信和自动控制中经常遇到。本文的目的是针对系统模型(1)提出一种最优的滤波和预测方法。

为此，把信号序列  $\{x(k), k=1, 2, \dots\}$  和干扰序列  $\{v(k), k=1, 2, \dots\}$  通过实际的滤波器用图1(a)表示，把信号序列  $\{x(k), k=1, 2, \dots\}$  通过预期的滤波器用图1(b)表示。图中  $H(z)$  为预期滤波器的传递函数;  $X_h(k)$  为预期的输出信号，对于滤波来说  $X_h(k) = X(k)$ ，对于预测来说  $x_h(k) = x(k+l)$ ,  $l=1, 2, \dots$ ，而  $W(z)$  就是欲求的最优滤波器传递函数。

由图1可知，信号误差序列总能量P为

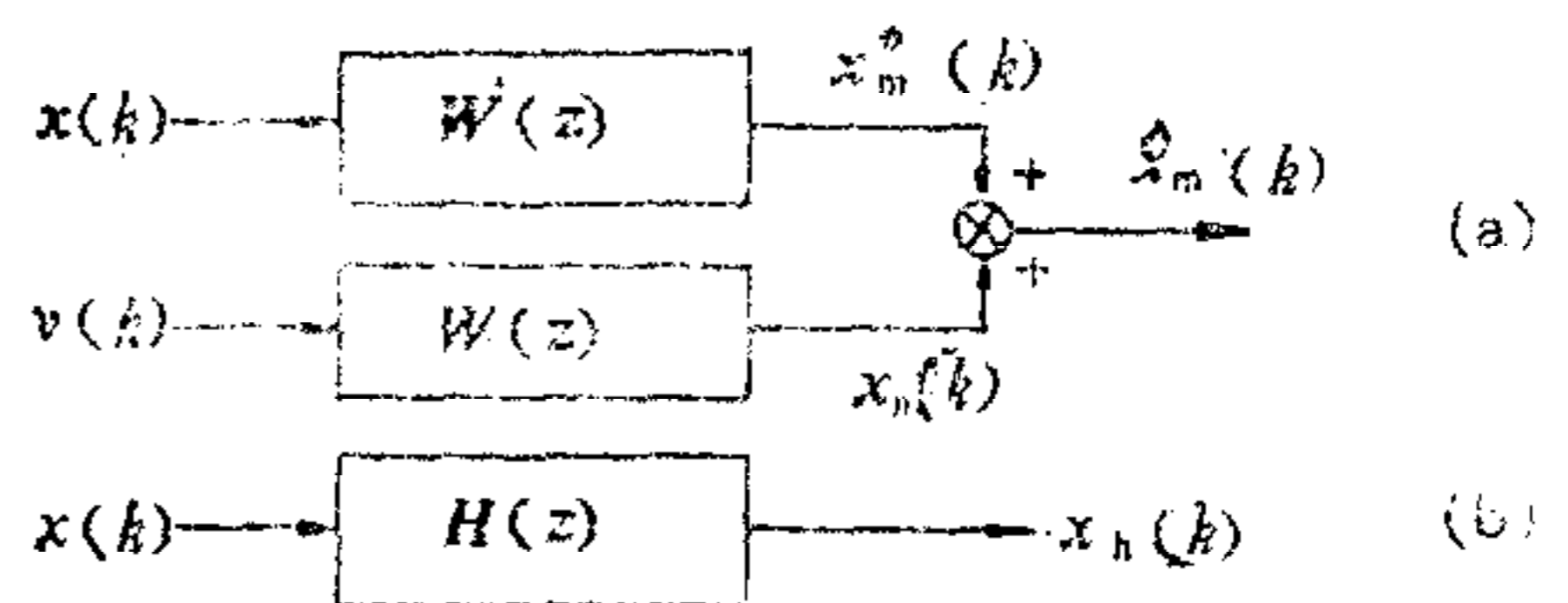


图1 信号序列  $x(k)$  和干扰序列  $v(k)$  通过滤波器的方块图表示

而  $x_h(k) = x(k+l)$ ,  $l=1, 2, \dots$ ，而

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \{X_m^*(k) - X_h(k)\}^2. \quad (2)$$

滤波器输出的干扰序列均方误差  $\sigma_n^2$  为

$$\sigma_n^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_n^2(k).$$

由Z变换理论,  $\sigma_n^2$  还可表示为

$$\sigma_n^2 = R_{x_n}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_n^*(z) |W(z)|^2 \frac{dz}{z}. \quad (3)$$

其中  $R_{x_n}(k)$  为  $X_n(k)$  的自相关函数;  $R_n(k)$  为  $v(k)$  的自相关函数;  $S_n^*(z)$  为  $R_n(k)$  的Z变换.

本文的目的是求  $W(z)$ , 使

$$\varepsilon^2 = P + \sigma_n^2 = \min. \quad (4)$$

## 二、最优滤波、预测方程及物理可实现的解

按帕斯瓦尔 (Parseval) 公式, 有

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{\infty} \{x_m^*(k) - x_h(k)\}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} | \{x_m^*(z) - x_h(z)\} |^2 \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |x(z)|^2 \{W(z) - H(z)\} \{W(z^{-1}) - H(z^{-1})\} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= P + \sigma_n^2 \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |x(z)|^2 \{W(z) - H(z)\} \{W(z^{-1}) - H(z^{-1})\} \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_n^*(z) W(z) W(z^{-1}) \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (5)$$

如果方程 (5) 中的  $W(z)$  是使方程 (4) 成立的最优滤波器传递函数, 现在用  $W(z) + \gamma \eta(z)$  代替方程 (5) 中的  $W(z)$ , 其中  $\gamma$  是与  $z$ ,  $W(z)$ ,  $\eta(z)$  均无关的参量,  $\eta(z)$  为  $z$  的任意函数, 且  $\eta(z) \neq 0$ , 这时方程 (5) 可写成

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{r_1-2} \{ \{A_0^T i^{2-} \cdot L(i+1)\} \cdot \{C \cdot P(i+1) C^T + R(i+1)\} \times \\ &\quad \{A_0^T i^{-2-} \cdot L(i+1)\}^T \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 + \delta\varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |x(z)|^2 [W(z) + \gamma\eta(z) - H(z)] [W(z^{-1}) + \gamma\eta(z^{-1}) - H(z^{-1})] \frac{dz}{z} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_n^*(z) [W(z) + \gamma\eta(z)] [W(z^{-1}) + \gamma\eta(z^{-1})] \frac{dz}{z} \\
&= \varepsilon^2 + \frac{\gamma}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ |x(z)|^2 \eta(z^{-1}) [W(z) - H(z)] + S_n^*(z) \eta(z^{-1}) W(z) \} \frac{dz}{z} \\
&\quad + \frac{\gamma}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ |x(z)|^2 \eta(z) [W(z^{-1}) - H(z^{-1})] + S_n^*(z) \eta(z) W(z^{-1}) \} \frac{dz}{z} \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ |x(z)|^2 |\eta(z)|^2 + S_n^*(z) |\eta(z)|^2 \} \frac{dz}{z} \tag{6}
\end{aligned}$$

令  $\frac{\partial}{\partial \gamma} (\varepsilon^2 + \delta\varepsilon^2) |_{\gamma=0} = 0$ , 则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ \eta(z^{-1}) [ |x(z)|^2 (W(z) - H(z)) + S_n^*(z) W(z) ] \} \frac{dz}{z} + \\
&\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \{ \eta(z) [ |x(z)|^2 (W(z^{-1}) - H(z^{-1})) + S_n^*(z) W(z^{-1}) ] \} \frac{dz}{z} = 0 \tag{7}
\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \eta(z^{-1}) \{ |x(z)|^2 [W(z) - H(z)] + S_n^*(z) W(z) \} \frac{dz}{z} = 0. \tag{8}$$

注意到方程 (8) 中的  $\eta(z^{-1}) \neq 0$ , 所以可得

$$|x(z)|^2 [W(z) - H(z)] + S_n^*(z) W(z) = 0. \tag{9}$$

由 (6) 式又知  $\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\varepsilon^2 + \delta\varepsilon^2) > 0$ , 因此方程 (9) 就是使 (4) 式成立的最优滤波器所应满足的方程式。

由 (9) 式可得

$$W(z) [ |x(z)|^2 + S_n^*(z) ] = |x(z)|^2 H(z). \tag{10}$$

$$(|x(z)|^2 + S_n^*(z)) = \psi_1(z) \psi_2(z). \tag{11}$$

其中  $\psi_1(z)$  的所有极点、零点均在单位圆内, 而  $\psi_2(z)$  的所有极点、零点均在单位圆外。由谱密度的性质, 这一点总是可以实现的。把 (11) 式代入 (10) 式有

$$W(z) \psi_1(z) = \frac{|x(z)|^2 H(z)}{\psi_2(z)}. \tag{12}$$

考虑到物理可实现性, 即  $t < 0$  时系统无输出, 则

$$W(z) \psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{|x(z)|^2 H(z)}{\psi_2(z)} z^{k-1} dz.$$

于是物理可实现的最优滤波器传递函数 $W(z)$ 为

$$W(z) = \frac{1}{\psi_1(z)} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{|x(z)|^2 H(z)}{\psi_2(z)} z^{k-1} dz. \quad (13)$$

### 三、举 例

**例1.** 信号为阶跃形式时的最优滤波。已知 $x(k) = A, k = 1, 2, \dots, \{v(k), k = 1, 2, \dots\}$  为白噪声序列且 $E v(k) = 0, E v(k)v(l) = \sigma^2 \delta_{kl}, H(z) = 1$ 。试求最优滤波器传递函数及滤波方程。

由题意可知 $x(z) = \frac{Az}{z-1}, S_n^*(z) = \sigma^2$ ，于是

$$\begin{aligned} |x(z)|^2 &= \frac{A^2}{(z-1)(z^{-1}-1)} \\ |x(z)|^2 + S_n^*(z) &= \frac{\sigma^2 z^{-1}(z-z_1)(z^{-1}-z_1)}{(z-1)(z^{-1}-1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $z_1 = (1 + A^2/2\sigma^2) - \sqrt{(1 + A^2/2\sigma^2)^2 - 1} < 1$ 。由(11)式及(14)式，可得

$$\psi_1(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{z_1}} \frac{(z-z_1)}{(z-1)}, \quad \psi_2(z) = \frac{\sigma(z^{-1}-z_1)}{\sqrt{z_1}(z^{-1}-1)}. \quad (15)$$

于是，
$$\frac{|x(z)|^2 H(z)}{\psi_2(z)} = \frac{A^2 \sqrt{z_1}}{\sigma(z-1)(z^{-1}-z_1)}. \quad (16)$$

把上式及(15)式代入(13)式，得到最优传递函数 $W(z)$ 为

$$W(z) = \frac{(1-z_1)z}{z-z_1}. \quad (17)$$

最优滤波方程为

$$\hat{X}_m(k) - z_1 \hat{X}_m(k-1) = (1-z_1)z(k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

如果在该滤波器中所用到的系统参数 $A$ 与真实系统参数 $A$ 出现误差时，不难证明，滤波误差的均值仍收敛于零。事实上，由 $z$ 变换的终值定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E \hat{X}_m(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \bar{W}(z) X(z) \frac{z-1}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z_1^*)z}{z-z_1^*} \frac{Az}{z-1} \frac{z-1}{z} \\ &= A. \end{aligned}$$

其中 $z_1^* = [1 + (A + \delta)^2/2\sigma^2] - \sqrt{[1 + (A + \delta)^2/2\sigma^2]^2 - 1}$ 。所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \tilde{X}_m(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [E \hat{X}_m(k) - x(k)] = 0, \text{ 另外, 当 } k \rightarrow \infty \text{ 时滤波器的均方误差为}$$

$$\sigma_{\hat{x}_m}^2 = \frac{\sigma^2(1-z_1)}{(1+z_1)}. \quad (19)$$

**例2.** 信号为速度阶跃时的最优滤波。已知信号  $x(k) = x(k-1) + A$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $x(0) = 0$ , 测量噪声  $v(k)$  为白色序列, 且  $E v(k) = 0$ ,  $E v(k)v(l) = \sigma^2 \delta_{kl}$ ,  $H(z) = 1$ , 求最优滤波器传递函数及滤波方程。

由题意可知  $x(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$ ,  $S_n^*(z) = \sigma^2$ , 其中  $T$  为取样周期, 于是

$$\begin{aligned} |x(z)|^2 + S_n^*(z) &= \frac{A^2 T^2}{(z-1)^2 (z^{-1}-1)^2} + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2 z^{-2} [z^4 - 4z^3 + (6 + A^2 T^2 / \sigma^2) z^2 + 4z - 1]}{(z-1)^2 (z^{-1}-1)^2} \\ &\triangleq \frac{\sigma^2 z^{-2} (z - A^* e^{j\phi})(z - A^* e^{-j\phi})(z - \frac{1}{A^*} e^{j\phi})(z - \frac{1}{A^*} e^{-j\phi})}{(z-1)^2 (z^{-1}-1)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

显然,  $A^*$ ,  $\phi$  应满足如下方程

$$\left. \begin{aligned} A^* \cos \phi + \frac{1}{A^*} \cos \phi &= 2, \\ \frac{1}{A^{*2}} + A^{*2} + 4 \cos^2 \phi &= 6 + A^2 T^2 / \sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

解方程组 (21), 可得

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \cos^{-1} [\sqrt{(AT/4\sigma)^2 + 1} - AT/4\sigma], \\ A^* &= B - \sqrt{B^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中  $B = \sqrt{(AT/4\sigma)^2 + 1} + AT/4\sigma > 1$ . 于是

$$|x(z)|^2 + S_n^*(z) = \frac{\sigma^2 (z^2 - 2A^* \cos \phi z + A^{*2})(z^{-2} - 2A^* \cos \phi z^{-1} + A^{*2})}{A^{*2} (z-1)^2 (z^{-1}-1)^2}. \quad (23)$$

由 (11) 式及 (23) 式, 可得

$$\psi_1(z) = \frac{\sigma (z^2 - 2A^* \cos \phi z + A^{*2})}{A^* (z-1)^2}, \quad (24)$$

$$\psi_2(z) = \frac{\sigma (z^{-2} - 2A^* \cos \phi z^{-1} + A^{*2})}{A^* (z^{-1}-1)^2}. \quad (25)$$

由 (13) 式, (24) 式和 (25) 式不难求出物理可实现的最优滤波器传递函数为

$$W(z) = \frac{(1 - A^{*2})z^2 + (2A^{*2} - 2A^* \cos \phi)z}{z^2 - 2A^* \cos \phi z + A^{*2}}. \quad (26)$$

最优滤波方程为

$$\begin{aligned} \hat{X}_m(k) - 2A^* \cos \phi \hat{X}_m(k-1) + A^{*2} \hat{X}_m(k-2) &= (1 - A^{*2})z(k) + (2A^{*2} \\ &\quad - 2A^* \cos \phi)z(k-1), \end{aligned} \quad (27)$$

$k = 1, 2, \dots$ , 其中  $A^*$ ,  $\phi$  均由 (22) 式给出。

这种最优滤波器对于系统模型参数  $A$  出现误差时具有克服发散的性能。如果在滤波器中所用到的系统参数  $A$  与真实系统参数  $A$  出现误差时, 即 (20) 式至 (22) 式中的  $A$  用  $A + \delta$

代替，这时传递函数中的  $A^*$  可由  $\bar{A}^*$  代替， $\varphi$  可由  $\bar{\varphi}$  代替，此时滤波器仍有收敛性。这是因为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \tilde{X}_m(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x(k) - E \hat{X}_m(k)\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} \{1 - W^*(z)\} x(z) \frac{z-1}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{(1 - \bar{A}^{*2})z^2 + (2\bar{A}^{*2} - 2\bar{A}^* \cos \bar{\varphi})z}{z^2 - 2\bar{A}^* \cos \bar{\varphi} z + \bar{A}^{*2}} \right] \frac{ATz}{(z-1)^2} \frac{z-1}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \bar{A}^{*2} \bar{B}_2 AT(z-1) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{其中 } \bar{B}_2 = \frac{1}{(1 - 2\bar{A}^* \cos \bar{\varphi} + \bar{A}^{*2})^2}. \quad (30)$$

事实上，如果把 (26) 式所表示的传递函数用熟悉的方块图表示，则如图 2 所示。

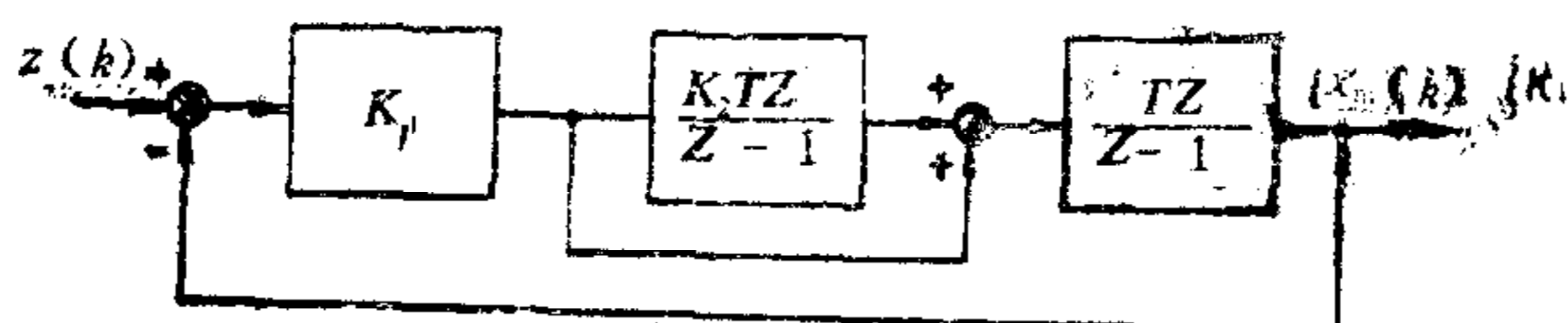


图 2 信号为速度阶跃时的最优滤波器方块图

图中  $K_1 = \frac{2 \cos \varphi - 2A^*}{TA^*}$ ;  $K_2 = \frac{1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2}}{T(2A^* \cos \varphi - 2A^{*2})}$ 。显见，这是一个二阶结构无静差系统。

当  $k \rightarrow \infty$  时，滤波的均方误差  $\sigma_{\hat{x}_m}^2$  为

$$\sigma_{\hat{x}_m}^2 = \sigma^2 \frac{1 - 2A^{*2} + 2A^* \cos \varphi - 6A^{*3} \cos \varphi + 5A^{*4}}{(1 - A^{*2})(1 + 2A^* \cos \varphi + A^{*2})} \quad (31)$$

**例 3.** 信号为速度阶跃时的最优预测。已知条件与例 2 相同。这里要求  $x_h(k) = x(k+l)$ ,  $l=1, 2, \dots$ , 求最优预测传递函数及预测方程。

由题意可知  $X(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$ ,  $S_n^*(z) = \sigma^2$ ,  $H(z) = z^l$ ,  $l=1, 2, \dots$ , 利用例 2 的结果，可归纳为

第一步，由 (25) 式及题意有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{|x(z)|^2}{\psi_2(z)} z^{k-1} dz = \frac{A^2 T^2 A^*}{\sigma} \left\{ B_1 l(k) + \frac{B_2}{T} k \right\}.$$

$$\text{其中 } B_1 = \frac{1 - A^{*2}}{(1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2})^2}; \quad B_2 = \frac{1}{(1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2})}$$

第二步，令

$$\beta(k) = \frac{A^2 T^2 A^*}{\sigma} \left\{ B_1 l(k+l) + \frac{B_2}{T} (k+l) \right\}, \quad k \geq 0,$$

$$\beta(k) = 0, \quad k < 0.$$

第三步,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta(k) z^{-k} = \frac{\sigma}{A^*} \frac{(1 - A^{*2})z^2 + (2A^{*2} - 2A^* \cos \varphi)z + \frac{1}{T}(1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2})z(z-1)}{(z-1)^2}.$$

第四步, 由 (13), (24) 及上式, 最优预测传递函数  $W(z)$  为

$$W(z) = \frac{(1 - A^{*2})z^2 + (2A^{*2} - 2A^* \cos \varphi)z + \frac{1}{T}(1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2})z(z-1)}{z^2 - 2A^* \cos \varphi z + A^{*2}}, \quad (32)$$

最优预测滤波方程为

$$\begin{aligned} \hat{X}_m(k) - 2A^* \cos \varphi \hat{X}_m(k-1) + A^{*2} \hat{X}_m(k-2) &= (1 - A^{*2})z(k) + (2A^{*2} \\ &- 2A^* \cos \varphi)z(k-1) + \frac{1}{T}(1 - 2A^* \cos \varphi + A^{*2})[z(k) - z(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

#### 四、与卡尔曼滤波器相比较

现在, 通过一例来比较当系统参数  $a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  出现误差时 (从实际应用来讲这种误差必然存在) 卡尔曼滤波器和本文滤波器的性能, 并考察本文例 2 中所叙述的模型<sup>[2]</sup>, 即系统模型为  $x(k) = x(k-1) + A, k = 1, 2, \dots, x(0) = 0, A > 0$  为常数. 由于许多实际因素的影响, 在卡尔曼滤波器中所取的系统模型有误差, 即  $\bar{x}(k) = \bar{x}(k-1) + A - \delta, \delta > 0$  为常数, 测量系统模型为  $z(k) = \bar{x}(k) + v(k)$ , 其中  $\{v(k), k = 1, 2, \dots\}$  为白色序列,  $E v(k) = 0, E v(k)v(l) = \sigma^2 \delta_{kl}$ .

如果用卡尔曼滤波器对上述系统滤波, 不难计算, 其估计误差为

$$\bar{X}(k) = x(k) - \hat{X}(k) = \frac{k-1}{2} \delta - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k v(j),$$

而滤波的均方误差为

$$P_k = E[\bar{X}(k)]^2 = \frac{(k-1)^2}{4} \delta^2 + \frac{1}{k} \sigma^2.$$

其中  $x(k)$  为系统的真实状态,  $\hat{X}(k)$  为按本文所取的系统模型所得到的最优估计. 显见, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $E \bar{X}(k) \rightarrow \infty, P_k \rightarrow \infty$ , 即出现了发散现象.

如果采用本文的滤波器对上述系统模型滤波时, 即使模型参数  $A$  出现误差, 由 (29) 式及 (31) 式可知, 仍然具有收敛性, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \bar{X}_m(k) = 0, \quad \sigma_{\hat{x}_m}^2 < \infty.$$

### 五、应 用

利用本文的结果可以设计数字式锁相滤波器。例如某无线电射频相位所携带的信号随时间线性变化，即  $x(k) = x(k-1) + A$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $x(0) = 0$ ，而接收机接收到的信息不仅包含有用的射频信号，而且还包含有大气无线电噪声。现在要求设计一个滤波器，能在有干扰的接收信息中较精确地提取出信号。这个问题实际上和例 2 的情况完全一样。具体设计可以表示为如图 3 所示的结构图。

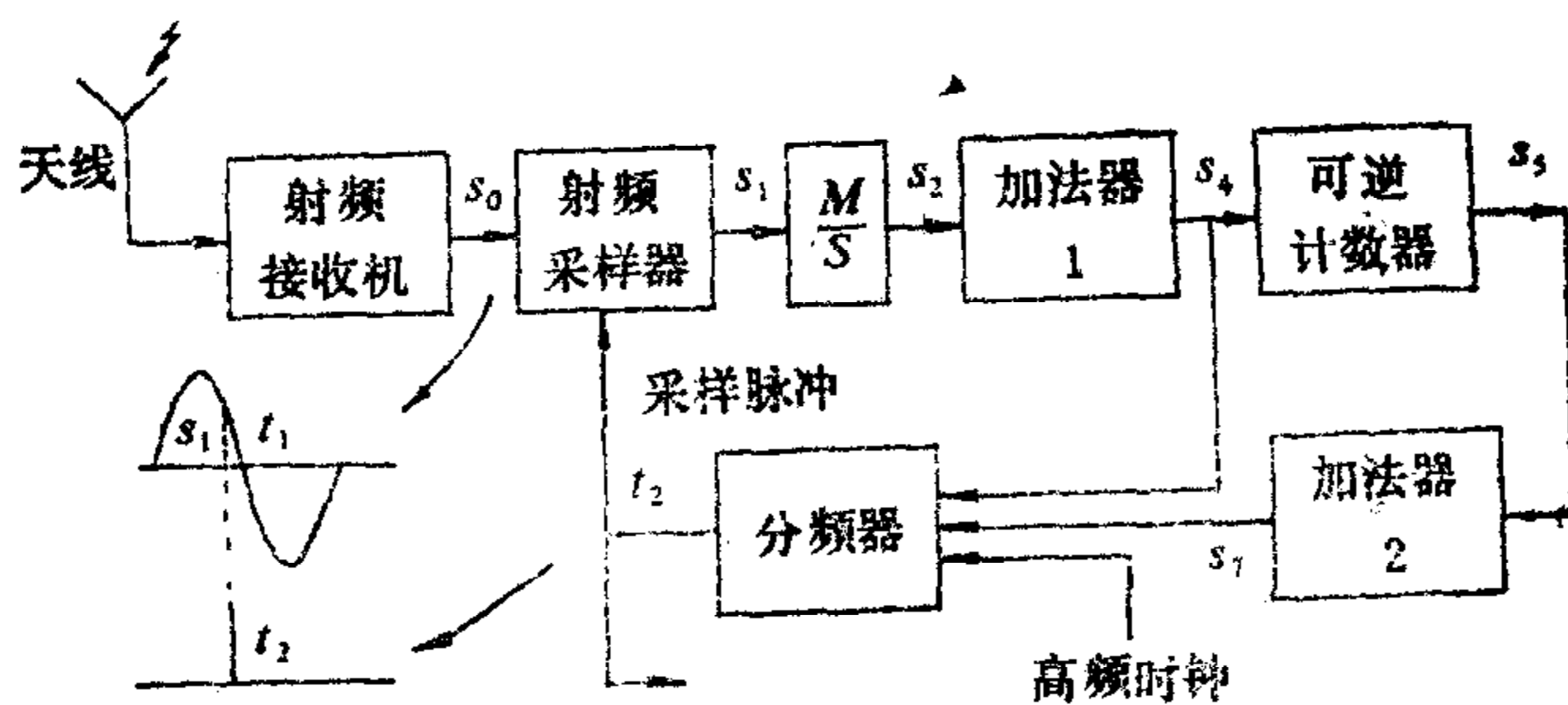


图 3 数字式锁相滤波器物理结构图

图中  $S_0(t) = S_A \sin \omega t + N(t)$ ， $S_A$  为射频信号振幅， $N(t)$  为大气无线电噪声； $S_1(k) = S_A \sin [t_1(k) - t_2(k)] + N(k)$ ， $k = 1, 2, \dots$ ； $S_2(k) = \frac{1}{b} S_1(k)$ ， $k = 1, 2, \dots$ ， $b$  为量化单位。

设  $S_3(k)$  为加法器 1 内的数，则有

$$S_3(k) = S_3(k-1) + S_2(k) - P S_4(k)$$

$$S_4(k) = \begin{cases} 1, & S_3(k) \geq P, \\ 0, & -P < S_3(k) < P, \\ -1, & S_3(k) \leq -P, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

其中  $P$  为某正整数，且  $P \gg 1$ 。

$$S_5(k) = S_5(k-1) + S_4(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

设  $S_6(k)$  为加法器 2 内的数，则有

$$S_6(k) = S_6(k-1) + S_5(k) - q S_7(k)$$

$$S_7(k) = \begin{cases} 1, & S_6(k) \geq q, \\ 0, & -q < S_6(k) < q, \\ -1, & S_6(k) \leq -q, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

其中  $q$  为某正整数，且  $q \gg 1$ 。

$t_2(k) = t_2(k-1) + a S_4(k) + a S_7(k)$ ， $k = 1, 2, \dots$ 。其中  $a$  为定时器跳步， $T$  为采样周期。



经分析和简化, 上述物理系统的方块图如图4所示。图中  $K_1 = \frac{S_A \cdot a}{bPT}$ ,  $K_2 = \frac{1}{Tq}$ 。

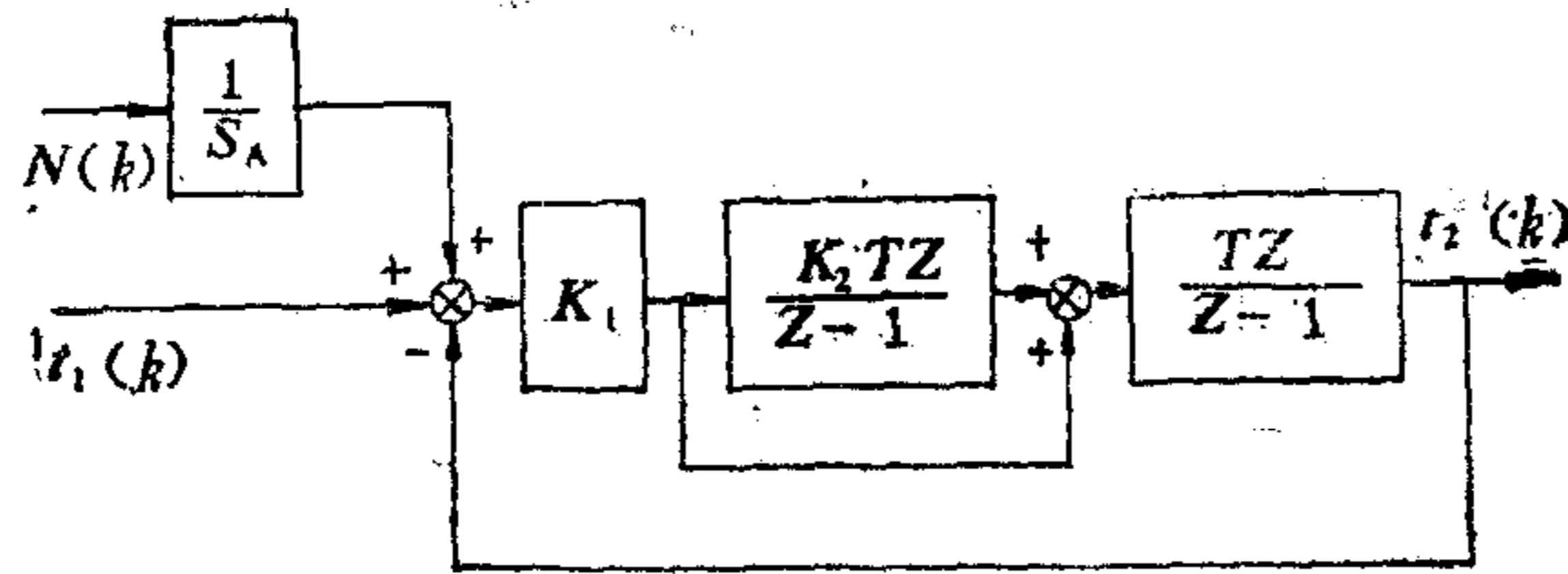


图4 数字式锁相滤波器控制方块图

可以看出, 该锁相滤波器的结构形式同图2完全一样。因此, 它不仅具有跟踪信号不发散的性能, 而且适当选择参数  $P$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $b$  会使滤波效果达到最佳。

### 参 考 文 献

- [1] Kalman R. E. , A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans ASME, J. Basic Eng. **82D**(1960). p34-45.
- [2] 中国科学院数学研究所概率组, 离散时间系统滤波的数学方法, (1975) p. 136-139.
- [3] 安鸿志, 加权滤波方法, 数学的实践与认识, **4** (1973) .
- [4] 索洛多夫尼柯夫, 线性自动控制系统统计动力学 (中译本) (1966) .
- [5] Jaffe R. and Richtin E. , Design and performance of phaselock circuits of a wide range of performance over a wide range of input signal to noise ratios, IRE trans. on information theory, (1955) .

## OPTIMAL FILTERING AND PREDICTION FOR A KIND OF NONSTATIONARY STOCHASTIC SEQUENCE

Zhao Xiren

(Harbin Ship—building Engineering Institute)

### Abstract

An optimal filtering method is presented for a kind of nonstationary stochastic sequence in this paper. Transfer function of the optimal filter and physically realizable solution are derived with z-transform. The algorithm of this optimal filter is explained by examples. A comparison is made between the performance of this filter and that of kalman filter. Finally, the application of this filter is presented briefly.