

线性离散多变量系统 基于Markov参数阵的递推测辨方法

樊晓平

(长沙铁道学院)

摘 要

本文依据系统的输入输出观测数据提出一种线性离散多变量系统递推测辨新方法。该方法基于系统的脉冲响应阵描述,利用最小二乘法估计系统的Markov参数阵。在系统存在有色噪声的情况下,本文利用扩充最小二乘法(ELS)对估计算法进行了有效的修正。

一、引 言

自七十年代以来,多变量系统测辨问题已受到国内外系统理论学者等的普遍关注,发表了大量的文献与专著^[1-2],这或许是由于多变量系统客观地描述了大多数实际系统的缘故。在线性多变量系统测辨中,一般常用四类模型,即传递函数矩阵模型、脉冲响应矩阵模型、输入输出差分方程模型和状态空间模型。由于现代系统理论广泛采用状态空间描述,且因其本身的许多突出优点,线性多变量系统状态空间模型测辨尤其受到重视,发表的文献也最多^[3,4]。另一方面,由于状态空间模型的结构指数较难确定,人们也常常寻求其他的测辨方法。应用较广的是首先将系统的状态空间模型化为等效的传递函数矩阵模型^[5,6]或脉冲响应矩阵模型^[7],估计其模型参数后再利用最小实现算法得到希望的状态空间模型。这类方法虽然估计的参数较状态空间模型的多,但因其避免了繁复的典范结构确定问题,故算法较简便。

鉴此,本文拟提出一种递推估计脉冲响应矩阵模型中Markov参数矩阵的新方法,并对有色噪声情况下的参数估计算法进行有效修正。

二、问题的表述

考虑图1所示的 m 输入 p 输出线性离散多变量系统,它可用如下的脉冲响应矩阵形式表示:

$$\underline{y}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \underline{u}(k-1-i) + \underline{v}(k). \quad (1)$$

式中 k 为离散时间; M_i 是 $p \times m$ 维系统 Markov 参数矩阵; \underline{v} 是 p 维噪声向量。

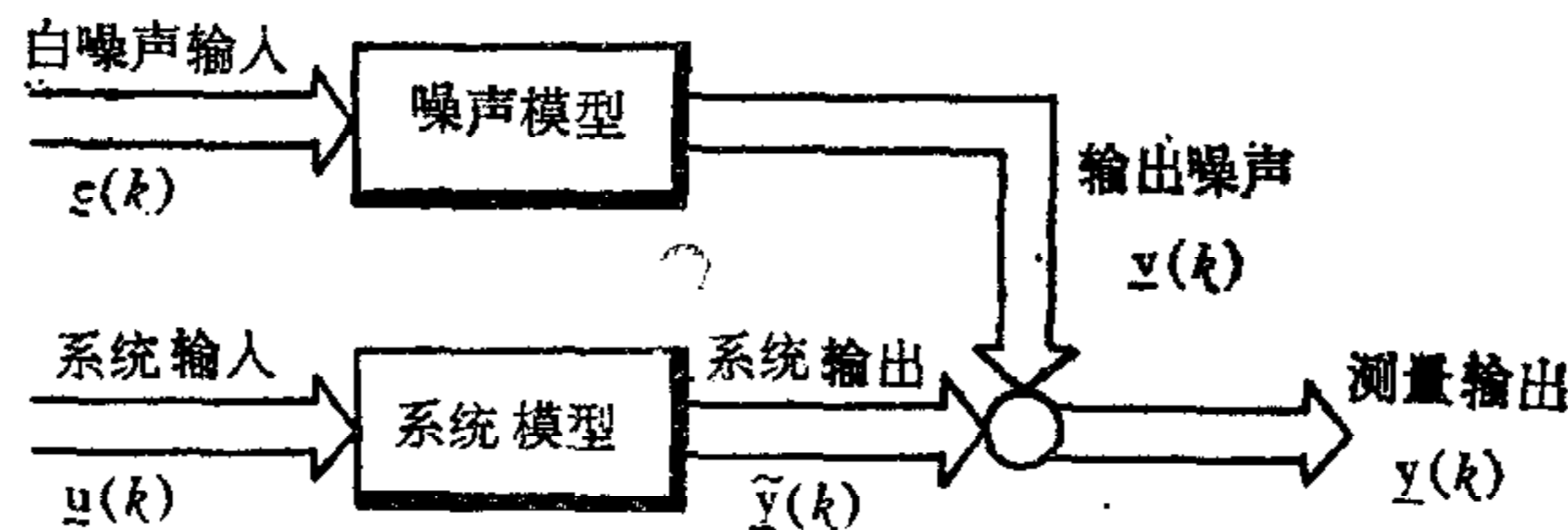


图 1 线性离散多变量系统

图 1 所示系统也可表达为状态空间形式:

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k), \quad (2)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + \underline{v}(k). \quad (3)$$

式中 \underline{x} 是 n 维系统状态向量; A , B , C 是相应维数的系统定常矩阵。

可以证明, Markov 参数矩阵与系统矩阵之间有如下关系式:

$$M_i = C A^i B, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

且系统的 Markov 参数在线性变换下保持不变。

然而, 对于任意一组 Markov 参数矩阵, 总存在着多组矩阵三元序 $\{A, B, C\}$ 满足关系式 (4), 即根据系统的脉冲响应矩阵描述并不能得到唯一的状态空间描述。只有在对系统矩阵指定了特定的典范形式之后, Markov 参数矩阵与典范矩阵三元序 $\{A^*, B^*, C^*\}$ 之间才存在一一对应关系。为此, 人们提出了多种典范形式^[8, 9], 以获得唯一的状态空间模型。

于是, 问题就化为依据系统的输入输出观测数据, 借助系统的脉冲响应矩阵 (式(1)), 递推估计出系统的 Markov 参数矩阵, 以适应系统在线测辨, 进而实现自适应控制的要求。

三、在线测辨算法

可以看到, (1) 式描述的是一个有无穷参数的系统, 而要估计无穷多个参数既不现实也不可能。实际上, 只要系统稳定, 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = 0, \quad (5)$$

(1) 式的无穷级数就可以在 l 项后截断而不致引起多大的误差。此处 l 系完全描述系统 (1) 行为所需的最少 Markov 参数矩阵数, 其值与系统的可观性指数和可控性指数有关^[7]。且 l 的取值与系统矩阵 A 的特征值有关。矩阵 A 的特征值比一小得越多, l 的值就越小; 反之, A 的特征值越接近一, l 的值便越大。

于是, 在如上条件下, 系统 (1) 就化为 (6) 式的有穷级数形式:

$$\underline{y}(k) = \sum_{i=0}^{l-1} M_i \underline{u}(k-1-i) + \underline{v}(k). \quad (6)$$

式中 l 的确定见第五节, 此处设为已知量。

对于 k 组输入输出数据采样值, (6) 式扩充为如下矩阵方程形式:

$$Y_k = M u_k + V_k. \quad (7)$$

$$\text{式中 } Y_k = \{\underline{y}(1) \ \underline{y}(2) \ \cdots \ \underline{y}(k)\}, \quad (8)$$

$$M = \{M_0 \ M_1 \ \cdots \ M_{l-1}\}, \quad (9)$$

$$V_k = \{\underline{v}(1) \ \underline{v}(2) \ \cdots \ \underline{v}(k)\}, \quad (10)$$

$$u_k = \begin{bmatrix} \underline{u}(0) & \underline{u}(1) & \cdots & \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(-1) & \underline{u}(0) & \cdots & \underline{u}(k-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{u}(1-l) & \underline{u}(2-l) & \cdots & \underline{u}(k-l) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由最小二乘法可求得系统 Markov 参数矩阵的估计关系式

$$\hat{M}^k = Y_k u_k^T (u_k u_k^T)^{-1}. \quad (12)$$

式中 \hat{M}^k 表示第 k 步得到的 Markov 参数估计值。

通过适当的简化运算, 可以求得系统 Markov 参数矩阵的递推估计关系式为

$$\hat{M}^{k+1} = \hat{M}^k + \{\underline{y}(k+1) - \hat{M}^k \underline{u}_{k+1}\} \frac{\underline{u}_{k+1}^T P_k}{1 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1}}, \quad (13)$$

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \underline{u}_{k+1} \underline{u}_{k+1}^T P_k}{1 + \underline{u}_{k+1}^T P_k \underline{u}_{k+1}}. \quad (14)$$

$$\text{其中 } \underline{u}_{k+1} = \{\underline{u}^T(k) \ \underline{u}^T(k-1) \ \cdots \ \underline{u}^T(k-l+1)\}^T. \quad (15)$$

由 (13), (14) 二式可以看到, 该算法仅包含有代数求逆过程, 避免了大矩阵求逆, 因而使计算量大大减少。又因该算法本身就具备递推的性质, 并不需存贮所有历史数据, 故存贮容量也大为减少。

为启动上述递推算法, 可设初值

$$\hat{M}^0 = 0, \quad (16)$$

$$P_0 = \gamma I, \ \gamma \gg 1. \quad (17)$$

此后, 随着输入输出观测数据的逐步增多, 算法将渐近收敛至稳态值。

应当指出, 文献[11]也考虑了利用递推算法估计系统 Markov 参数矩阵的问题, 但文中给出的算法是不正确的。

四、修正算法

前面讨论了系统 Markov 参数矩阵的估计问题, 同时给出了相应的递推估计算法。然而, 由于未虑及系统噪声模型的特性, 在有色噪声的情况下, 算法只能给出有偏且不相容的估计

结果。为完成系统的载噪测辨, 考虑由下式描述的噪声模型:

$$\underline{v}(k) = \sum_{i=0}^{\sigma} J_i \underline{e}(k-1-i) + \underline{e}(k). \quad (18)$$

式中 J_i 是噪声模型的权矩阵, \underline{e} 是 p 维零均值有限方差高斯白噪声过程, σ 假设是预知的。

将噪声模型 (18) 代入系统方程 (6), 可得描述该载噪系统的关系式

$$\underline{y}(k) = \sum_{i=0}^{l-1} M_i \underline{u}(k-1-i) + \sum_{i=0}^{\sigma} J_i \underline{e}(k-1-i) + \underline{e}(k). \quad (19)$$

当 k 取不同数值时, 上式扩充为如下形式:

$$Y_k = \Omega w_k + E_k. \quad (20)$$

式中

$$\Omega = \{M_0 \ M_1 \ \dots \ M_{l-1} \mid J_0 \ J_1 \ \dots \ J_{\sigma}\} = \{M \mid J\}, \quad (21)$$

$$E_k = \{\underline{e}(1) \ \underline{e}(2) \ \dots \ \underline{e}(k)\}, \quad (22)$$

$$w_k = \begin{bmatrix} \underline{u}(0) & \underline{u}(1) & \dots & \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(-1) & \underline{u}(0) & \dots & \underline{u}(k-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{u}(1-l) & \underline{u}(2-l) & \dots & \underline{u}(k-1) \\ \hline \underline{e}(0) & \underline{e}(1) & \dots & \underline{e}(k-1) \\ \underline{e}(-1) & \underline{e}(0) & \dots & \underline{e}(k-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{e}(-\sigma) & \underline{e}(1-\sigma) & \dots & \underline{e}(k-\sigma-1) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Y_k 的定义与 (8) 式相同。

对 (20) 式应用最小二乘法, 可得参数估计式

$$\hat{\Omega}^k = Y_k w_k^T (w_k w_k^T)^{-1}. \quad (24)$$

式中 $\hat{\Omega}^k$ 表示根据 k 组数据求得的 Ω 的估计值。

从 (20) 式可以看到, 系统的残差序列是白噪声过程, 因而 (24) 式给出的是无偏且相容的估计结果。然而, 由于 $\underline{e}(k)$ 是未知量, (24) 式实际上并不能真正给出希望的结果。但是, 若采用 $\underline{e}(k)$ 的估计值:

$$\hat{\underline{e}}(k) = \begin{cases} \underline{y}(k), & k \leq 0, \\ \underline{y}(k) - \hat{\Omega}^k \hat{W}_k, & k > 0. \end{cases} \quad (25)$$

式中 $\hat{W}_k = \{\underline{u}^T(k-1) \ \dots \ \underline{u}^T(k-l) \mid \hat{\underline{e}}^T(k-1) \ \dots \ \hat{\underline{e}}^T(k-\sigma-1)\}^T, \quad (26)$

并同时用 $\hat{\underline{e}}(k)$ 替代 $\underline{e}(k)$ 构成 \hat{w}_{k+1} , 则 (24) 式仍可给出渐近无偏和渐近相容的估计结果:

$$\hat{\Omega}^k = Y_k \hat{w}_k^T (\hat{w}_k \hat{w}_k^T)^{-1}. \quad (27)$$

式中 $\hat{\omega}_k$ 是用 \hat{e} 替代 e 后所生成的 w_k 矩阵。与前节类似，可得载噪情况下参数矩阵 Ω 的递推估计关系

$$\hat{\Omega}^{k+1} = \hat{\Omega}^k + \frac{(\underline{y}(k+1) - \hat{\Omega}^k \hat{w}_{k+1}) \hat{w}_{k+1}^T \hat{P}_k}{1 + \hat{w}_{k+1}^T \hat{P}_k \hat{w}_{k+1}}, \quad (28)$$

$$\hat{P}_{k+1} = \hat{P}_k - \frac{\hat{P}_k \hat{w}_{k+1} \hat{w}_{k+1}^T \hat{P}_k}{1 + \hat{w}_{k+1}^T \hat{P}_k \hat{w}_{k+1}} \quad (29)$$

而初始状态可置为

$$\hat{\Omega}^0 = 0, \quad (30)$$

$$\hat{P}_0 = \gamma I, \quad \gamma \gg 1. \quad (31)$$

关系式 (25)，(26) 及 (28) — (31) 就是最终算法，其程序框图如图 2 所示。

测辨出系统的 Markov 参数矩阵，便较易构成系统的典范状态空间模型。事实上，根据 N. K. Sinha 等人的观点^[7]，只需要 $\sigma_c + \sigma_o - 1$ 个 Markov 参数就足以确定状态空间模型参数 A, B, C。其中 σ_c 是系统的可控性指数， σ_o 是系统的可观性指数。

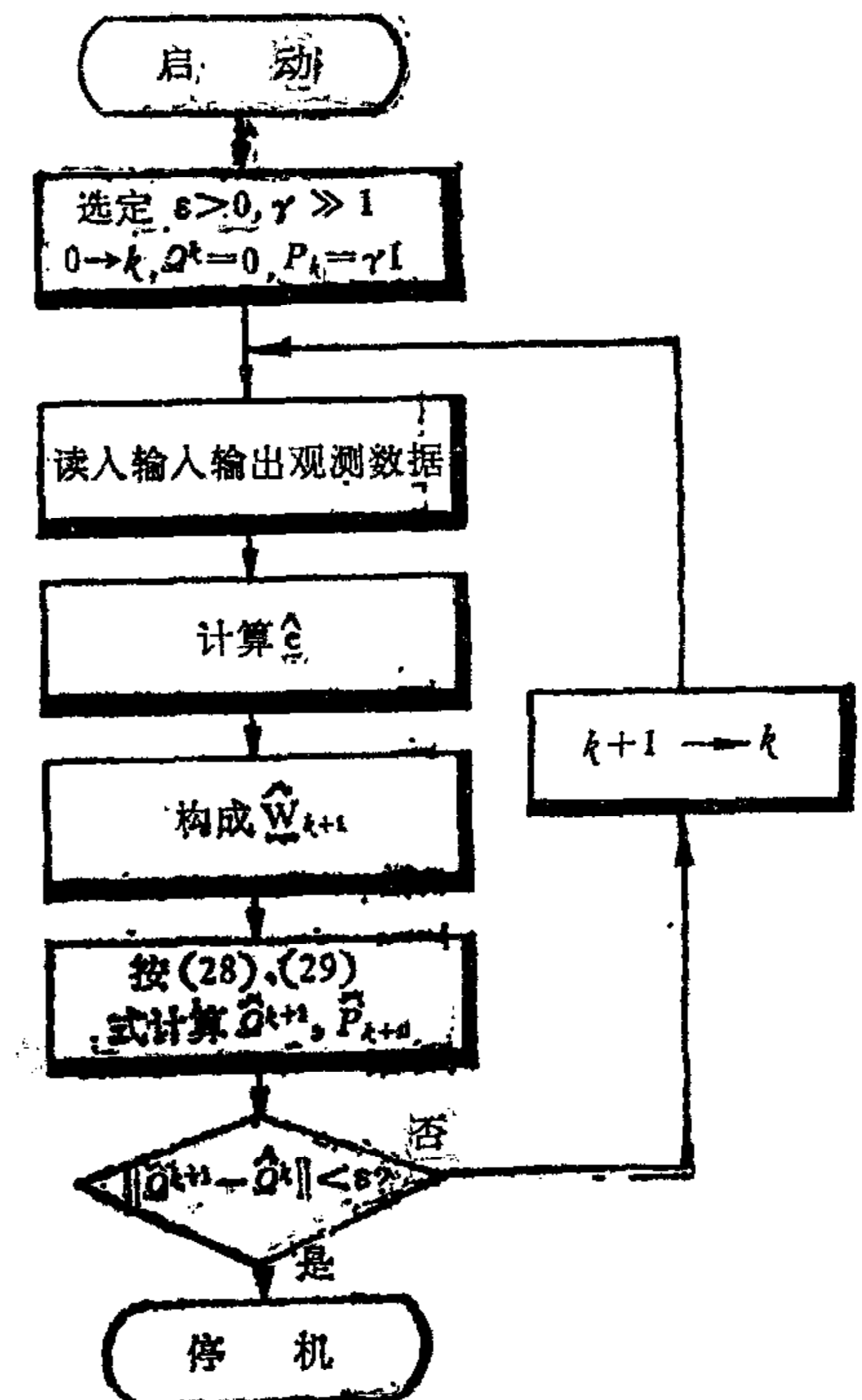


图 2 递推测辨程序框图

五、结构确定与精度分析

前已推导了估计系统 Markov 参数矩阵的递推算法，但并未讨论结构参数的确定问题。本节拟就此作专门研究。

系统的结构参数 l 不仅取决于系统的可控性和可观性指数，而且还依赖于系统状态空间参数矩阵 A 的特征值大小。由于 l 取较大值并不会降低估计结果的精度，故实际测辨时 l 可先取一个较大值，通过前面推导的递推估计算法估计出系统的 Markov 参数，并确定系统矩阵 A, B, C，然后再检验矩阵 A 的特征值大小。若所有特征值均远小于 1，则此时的参数估计结果是足够精确的；若某些特征值较接近于 1，则可另选一更大的 l ，重复估计系统的 Markov 参数矩阵。若前后两次估计结果相差甚微，说明结果足够精确。否则便应重选 l 值并重复上述步骤，直至获得满意的结果为止。

由于实际测辨时的结构参数往往取得较大，势必导致算法的计算量和存贮容量增大。然而，由于文中提出的参数估计算法具备递推的性质，实际增加的计算量和存贮容量很小，算法仍然十分有效。

应当指出, 在以前的算法中^[7], 人们往往没有考虑到 l 的值决定于系统参数矩阵 A 的特征值大小这一事实, 因而由此所得到的各种分析与综合结果都不够全面。按照本文的观点, 在考虑到各种因素的作用而得出结构参数之后, 则可望在保证必要的参数估计精度的同时, 使参数估计的运算复杂性及计算机内存容量达到极小。

另一方面, 当系统的结构参数 l 取不同值时, 尽管估计结果从统计意义上仍是无偏的, 但其方差显然各不相同。事实上, 系统行为的真实描述式 (1) 是一个无穷级数, 而当结构参数取 l 值时的系统近似描述式 (6) 则是一个有限项级数。显然, 近似式取的项数越多, 逼近的程度就越好。亦即 l 的值越大, 系统参数的估计精度就越高, 方差就越小。然而, l 值取得越大, 参数估计的任务就越重, 相应的计算量和存贮容量就越大。因此, l 值的选取必须在计算量和估计精度之间进行折衷考虑。这也是在选取结构参数时必须加以考虑的因素之一。

六、仿真结果

为验证本文提出的系统 Markov 参数矩阵的递推估计算法及其修正算法的正确性, 在日立 M-150 计算机上对一个单输入双输出系统进行了仿真验算。该系统的结构为

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.012 \\ 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0.4 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.36 & 0.14 \\ 0.20 & 0.29 & 0.17 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \underline{v}(k).$$

容易算得, 该系统的真实 Markov 参数为

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.29 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.17 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0.02144 \\ 0.0414 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

系统输入 $u(k)$ 采用零均值 PRBS-M 序列, 系统输出则直接由系统方程和选定的输入信号产生, 而系统的噪信比由下式定义 (见图 1):

$$\sigma_{N/ZS}(i) \triangleq \frac{\sigma_{v1}}{\sigma_{\tilde{y}1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N v_i^2(k)}{\sum_{k=1}^N \tilde{y}_i^2(k)}}. \quad (32)$$

式中 N 是数据长度, 此处取 127。

1) $\underline{v}(k)$ 采用零均值 PRBS-M 序列。当选取 $l=8$ 时的估计结果如表 1 所示, 根据这些 Markov 参数, 并设模型阶已知, 可分别得到如下矩阵;

表 1 白噪声时的参数估计结果

参 数	情 况 I	情 况 II
	$\sigma_{NZS}(1) = 0.70\%$ $\sigma_{NZS}(2) = 0.76\%$	$\sigma_{NZS}(1) = 6.23\%$ $\sigma_{NZS}(2) = 6.80\%$
M_0	$\begin{bmatrix} 0.15333 \\ 0.23333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.220 \\ 0.300 \end{bmatrix}$
M_1	$\begin{bmatrix} 0.360 \\ 0.290 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.360 \\ 0.290 \end{bmatrix}$
M_2	$\begin{bmatrix} 0.140 \\ 0.170 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.140 \\ 0.170 \end{bmatrix}$
M_3	$\begin{bmatrix} 0.02144 \\ 0.0414 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.02144 \\ 0.0414 \end{bmatrix}$
M_4	$\begin{bmatrix} -0.001104 \\ -0.063627 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001104 \\ -0.19696 \end{bmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots

表 2 有色噪声时的参数估计结果

参 数	情 况 I	情 况 II
	$\sigma_{NZS}(1) = 0.94\%$ $\sigma_{NZS}(2) = 0.89\%$	$\sigma_{NZS}(1) = 8.53\%$ $\sigma_{NZS}(2) = 8.05\%$
M_0	$\begin{bmatrix} 0.12372 \\ 0.20842 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2330 \\ 0.22245 \end{bmatrix}$
M_1	$\begin{bmatrix} 0.36382 \\ 0.20842 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.38035 \\ 0.30206 \end{bmatrix}$
M_2	$\begin{bmatrix} 0.14709 \\ 0.17759 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.15863 \\ 0.20958 \end{bmatrix}$
M_3	$\begin{bmatrix} 0.026282 \\ 0.043387 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.037349 \\ 0.065918 \end{bmatrix}$
M_4	$\begin{bmatrix} -0.0045815 \\ 0.0087128 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.006515 \\ 0.0041865 \end{bmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0123 \\ 1 & 0 & -0.1005 \\ 0 & 1 & 0.398 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.15333 & 0.360 & 0.140 \\ 0.23333 & 0.290 & 0.170 \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.012962 \\ 1 & 0 & -0.10153 \\ 0 & 1 & 0.39386 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.36 & 0.14 \\ 0.30 & 0.29 & 0.17 \end{bmatrix}.$$

上面各式的下标 1, 2 分别与表 1 中的情况 I, II 相对应。

2) $\underline{v}(k)$ 作为白噪声驱动线性系统的输出。在取 $l=8$ 时得系统 Markov 参数的估计结果如表 2 所示。

由这些 Markov 参数及已知的模型阶数, 可以算得如下矩阵:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.007 \\ 1 & 0 & -0.0844 \\ 0 & 1 & 0.3816 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.12372 & 0.36382 & 0.14709 \\ 0.20842 & 0.30610 & 0.17759 \end{bmatrix};$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.011589 \\ 1 & 0 & -0.087603 \\ 0 & 1 & 0.42848 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.2330 & 0.38035 & 0.15863 \\ 0.22245 & 0.30206 & 0.20958 \end{bmatrix}.$$

当选取 $l=9$ 时, 系统 Markov 参数的估计值变化不大, 说明结果足够精确。

七、结 论

多变量系统脉冲响应矩阵模型载噪情况下的测辨问题, 虽然也有多种方法, 但它们或者是“成批处理”型方法, 不适于系统的在线测辨; 或者算法太复杂而较难实现。本文提出的测辨新方法则既可进行在线测辨, 又具有算法简便、计算量小、存贮容量省等优点, 并能给出无偏且相容的估计值。仿真结果表明, 新算法(含修正算法)即使在噪声信号较强的情况下, 也仍能得到很好的估计结果。

本文是作者在导师、长沙铁道学院张启人教授的悉心指导下完成的, 其中曾蒙上海交通大学张钟俊教授多次指点, 谨此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Niedersinski, A. & A. Hajdasinski, Multivariable System Identification—A Survey, Proc. 5th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, 1979, 43-76.
- [2] El-Sherief, H. & N. K. Sinha, Identification and Modelling for Linear Multivariable Discrete-Time Systems: A Survey, J. of Cybernetics, 9 (1979), 43-71.
- [3] El-Sherief, H. & N. K. Sinha, Stochastic Approximation Algorithm for the Identification of Multivariable Systems, 1979 Joint Automatic Control Conference, Philadelphia, 1978, 113-120.
- [4] El-Sherief, H., Parametric Identification of a State-Space Model of Multivariable Systems Using the Extended Least Squares Method, IEEE 1980 Systems/Man/Cybernetics, Oct. 8-10, 1980, 323-327.
- [5] Lin, P. L. & Y. C. Wu, Identification of Multi-Input Multi-Output Linear Systems from Frequency Response Data, ASME J. DSMC, 14 (1982), 58-64.
- [6] El-Sherief, H. & N. K. Sinha, Identification of Multivariable Systems in Transfer-Function Matrix Form, J. of Cybernetics 9(1979), 113-125.
- [7] Sinha, N. K. & A. Sen, On-Line Identification of Multivariable System, Ident. and Syst. Para. Est., N. S. Rajbman (Ed.), Pt. 3, North-Holland, Amsterdam, 1978, 1501-1510.
- [8] Guidorzi, R., Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems, Automatica, 11 (1975), 361-374.
- [9] Sinha, N. K. & P. Rozsa, Some Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 23 (1976), 865-883.

**RECURSIVE IDENTIFICATION APPROACH TO
LINEAR MULTIVARIABLE DISCRETE SYSTEMS BASED
ON MARKOVIAN PARAMETER MATRICES**

Fan Xiaoping
(Changsha Railway Institute)

ABSTRACT

In this paper a new recursive approach to the identification of linear discrete multivariable systems based on the system input-output observations is presented. Least squares method is utilized to estimate the Markovian parameter matrices of the system described by an impulse response matrix presentation. In case of colored noises the proposed approach is modified efficiently in terms of the Extended Least Squares (ELS) method.

中国自动化学会控制理论委员会学术活动一览表
(1978—1985)

		时间	地点	备注
全国控制理论及其应用学术交流	第一届	1979,5	厦门	科学出版社出版了论文集
	第二届	1980,11	桂林	
	第三届	1982,6	峨嵋	
	第四届	1983,12	昆明	
	第五届	1985,9	屯溪	有预印本
国际会议和专题学术会议	工作会议	1979,12	石家庄	
	中美双边控制科学讨论会	1981,7	上海	科学出版社出版了论文集
	控制理论应用效果分析讨论会	1983,6	大庆	与应用委员会联合召开
	系统辨识与参数估计讨论会	1984,9	重庆	
	控制系统设计学术讨论会	1984,11	西安	
	北京国际系统与控制学术会议	1984,5	北京	与系统工程学会联合召开

(郑应平 王恩平)