实现解耦控制的动态补偿器设计

王 健

（上海市财政局）

摘 要

本文提出了用动态补偿器串联实现解耦控制。文中用“行次差”等新概念分析了有理分式阵的性质，并研究了受控系统开、闭环传递阵之间的关系，设计了动态补偿器，且给出其使用条件及计算公式。

一、引言

解耦问题是多输入多输出线性定常控制系统理论中的一个重要课题[1,2]。几十年来，Morse,Wonham和morgan做了不少工作，后者在1964年已使用状态变量的概念处理了状态向量反馈的解耦问题。1967年Falb和Wolvich[3]给出了综合设计方法。1970年，Wonham和Morse[4,5]根据能控子空间的观点，用几何方法推广了解耦问题。同年，Sato和Hopnesti又研究了部分解耦问题。1972年，Silverman给出了严格的设计程序。但如系统的状态变量不可量测，使用这些方法就有一定困难。为此，笔者用动态补偿器使闭环解耦。

设$G(s)$是原受控系统，在其左侧串联补偿器$G_P(s)$后使闭环$G_C(s)$成为非异对角阵（见图1）。显见，$G(s)$，$G_P(s)$和$G_C(s)$之间有关系式

$$G_P(s)=G^{-1}(s)G_C(s)[I-G_C(s)]^{-1}.$$

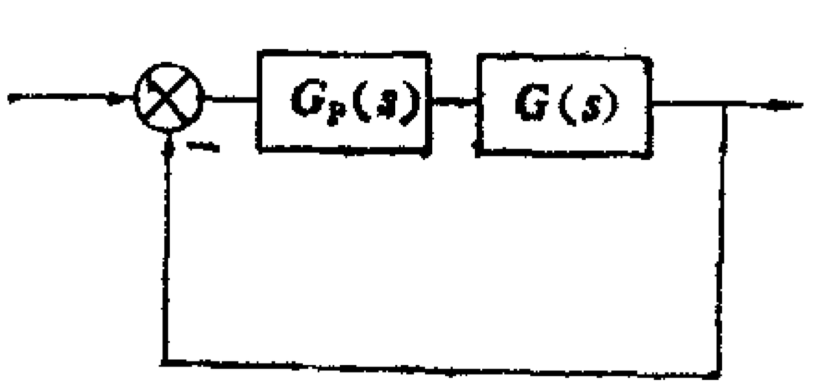

图 1

其中$G_C(s)$是根据系统的性能要求选定的，问题是如何选取$G_C(s)$，以保证得到的动态补偿器物理能实现，即$G_P(s)$为真有理分式阵。

二、有理分式阵的“行次差”和“正则性”

本文约定，文中的有理分式阵中，每行为非零向量。

定义．设$P(s)$是$m\times n$阶有理分式阵，

$$P(s)=M(s)/d(s). \tag{1}$$

其中$d(s)$是$P(s)$中所有非零元的分母的最小公倍式。按通常约定，它是首一多项式。$M(s)$是$m\times n$阶多项式矩阵。

1）记$M(s)$的第 i 行的行次为$\partial_{h_i}M(s)$，则称

本文于1983年2月18日收到。

$$w_i[P(s)] = \partial d(s) - \partial_{h_i} M(s),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

为P(s)第 i 行的行次差。

2）称M(s)的行次项系数阵$\Gamma_h M(s)$为P(s)的行次差系数阵$\Gamma_h P(s)$。

3）如果M(s)行正则，就称P(s)为行正则。

同样，对列可作相应定义。并见，$P^T(s)$第 i 行的行次差亦即P(s)第 i 列的列次差。下面仅对行进行讨论。

性质1. 若P(s)行正则，$w_i[P(s)]=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\Gamma_h P(s)=\Gamma_l P(s)$。

性质2. 设P(s)，Q(s)为n阶非异阵，且$w_i[P(s)]\geqslant 0$，$W_i[Q(s)]\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，则$w_i[P(s)Q^T(s)]\geqslant w_i[P(s)]$，$i=1,2,\cdots,n$，$w_i[P(s)Q(s)]\geqslant w_i[P(s)]$，$i=1,2,\cdots,n$。

定理1. 设P(s)为行正则，$P^{-1}(s)Q(s)$为真有理分式阵的充要条件为$w_i[P(s)]\leqslant w_i[Q(s)]$，$i=1,2,\cdots,n$。

定理2. 设P(s)是n阶方阵，具有1）$w_i[P(s)]=0$，$i=1,2,\cdots,n$；2）$\Gamma_h P(s)$为非异对角阵的充要条件是逆阵存在，且有相同性质，即

1）$w_i[P^{-1}(s)]=0$，$i=1,2,\cdots,n$；2）$\Gamma_h P^{-1}(s)$非异对角阵。

证明。$P(s)=M(s)/d(s)$，$M(s)=(m_{ij})_{n\times n}$，$\mathrm{adj}M(s)=(m^*_{ij})_{n\times n}$，并设$\partial d(s)=\delta$，则$\partial m_{ij}(s)<\delta=\partial m_{ii}(s)$，从而$\partial m^*_{ij}(s)<(n-1)\delta=\partial m^*_{ii}(s)$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.)$，$P^{-1}(s)$显然存在，且$P^{-1}(s)=d(s)\mathrm{adj}M(s)/\det M(s)$，而$\det M(s)=n\delta$，证毕。

定理3. 设P(s)是 n 阶方阵，$\Gamma_h P(s)$为非异对角阵，则 1）$w_i[P^T(s)]^{-1}=-w_i[P(s)]$，$i=1,2,\cdots,n$；2）$\Gamma_h[P^T(s)]^{-1}$为非异对角阵。

定理4. 设P(s)是n阶行正则阵，$w_i[P(s)]=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则1）$W_i[P^{-1}(s)]=w_i[P^T(s)]^{-1}=0$，$i=1,2,\cdots,n$；2）$\Gamma_l P^{-1}(s)=[\Gamma_h P(s)]^{-T}$。

三、开环与闭环传递函数阵的关系

如图2的系统中，开环传递阵$G_0(s)$与闭环传递阵$G_c(s)$有关系式$G_c(s)=G_0(s)[I+G_0(s)]^{-1}$，$G_0(s)=G_c(s)[I-G_c(s)]^{-1}$。令$\lim\limits_{s\to\infty}G_0(s)=D_0$，由于要在物理上可实现，规定$G_0(s)$，$I+G_0(s)$和$I+D_0$都是非异阵。这时，$\lim\limits_{s\to\infty}G_c(s)=D_c=D_0(I+D_0)^{-1}$或$D_0=D_c(I-D_c)^{-1}$。以上假定与$G_c(s)$，$I-G_c(s)$和$I-D_c$非异等价。

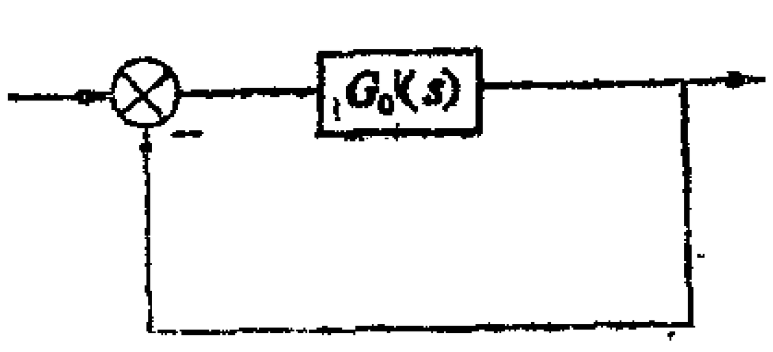

图2

定理5. 如$w_i[G_0(s)]\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots$，则$w_i[G_c(s)]=w_i[G_0(s)]$，$i=1,2,\cdots,n$。

证明。由定理4得$w_i(I+G_0(s))^{-1}=0$，则$w_i[G_c(s)]\geqslant w_i[G_0(s)]$。同理$w_i[I-G_c(s)]=0$，得证。

显见，定理中$w_i[G_0(s)]\geqslant 0$改成$w_i(G_c(s))\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，结论也成立。

引理. 设P(s)，Q(s)行正则，$w_i[Q(s)]=0$，$i=1,2,\cdots,n$。则P(s)Q(s)为行正则。

定理6. 如$w_i[G_0(s)]\geqslant 0$，则$G_0(s)$行正则的充要条件是$G_c(s)$为行正则。

在物理系统中，总是假定$G_0(s)$物理能实现，即开环与闭环传递函数阵具有相同的行次差与行正则性。

四、结　　论

在讨论的问题中，$G_0(s)=G(s)G_p(s)$，即$G_p(s)=G^{-1}(s)G_c(s)[I-G_c(s)]^{-1}$。这里的$G_c(s)$是非异对角阵，为使$G_p(s)$为真有理分式阵，有

定理7. 设$G(s)$行正则，则

1）$G(s)$使$G_p(s)$为真有理分式阵的充要条件为

$$w_i[G_c(s)]\geqslant w_i[G(s)],\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;$$

2）$G_c(s)$使$G_p(s)$为严格真有理分式阵的充要条件为

$$w_i[G_c(s)]> w_i[G(s)],\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

定理7要求$G(s)$行正则，对于一般情况，即$G(s)$只是非异阵的情形，由多项式矩阵理论可知，存在单位模阵$h(s)$，使$h(s)G(s)$为行正则阵，从而又有

定理8. $G_c(s)$使$G_p(s)$为真有理分式阵的充要条件是$w_i[h(s)G_c(s)]\geqslant w_i[h(s)G(s)]$，使$G_p(s)$为严格真有理分式的充要条件为$w_i[h(s)G_c(s)]> w_i[h(s)G(s)]$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

证明。$G^{-1}(s)G_c(s)=[h(s)G(s)]^{-1}[h(s)G_c(s)]$，由定理1及题设条件即得充分性。反之，$G_p(s)$为真有理分式阵，$G_P^T(s)$亦是。从而$w_i[G^{-1}(s)G_c(s)]^T\geqslant w_i[I-G_C^T(s)]\geqslant 0$或$w_i[G^{-1}(s)G_c(s)]\geqslant 0$，$i=1,\ 2,\cdots,n$，即$[h(s)G(s)]^{-1}[h(s)G_c(s)]=G^{-1}(s)G_c(s)$为真有理分式阵.

对于定理8还需阐明一点，使$G(s)$行正则的单位模阵并非唯一，但由于$[h_g(s)G(s)]^{-1}[h_g(s)G_c(s)]=[h(s)G_c(s)]$. 因此，只须找到一个使$G(s)$行正则的单位模阵$h(s)$就可以了.

综上所述，解耦步骤为：

1）判断$G(s)$行正则性，找单位模阵$h(s)$，使$h(s)G(s)$行正则。若已是行正则，就取$h(s)=I$.

2）选定满足以下条件的闭环传递函数阵$G_c(s)$

① $G_c(s)$非异对角阵；

② $I-D_c$非异，$D_c=\lim\limits_{s\to 8}G_c(s)$；

③ $w_i[h(s)G_c(s)]\geqslant w_i[h(s)G(s)]$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；

④ 按要求配置$G_c(s)$零极点。

3）按公式计算出$G_p(s)$。

这样得到的$G_p(s)$是真有理分式阵，若要求严格真有理分式阵，则把2）中③改成$w_i[h(s)G(s)]> w_i[h(s)G(s)]$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

本文讨论补偿器串联在左侧的情形，同法少讨论串联在右侧的情形. 另外，本文结果可容易地编制计算程序。不难看出，本文所述方法也完全适用于设计一般补偿器，限于篇幅，

对补偿器阶数限制及稳定性将另文讨论。

本文是在毕业论文基础上修改而成，自始至终受到何关钰同志的帮助，韩京清先生也对本文提出过宝贵意见，在此深表谢意。

参 考 文 献

〔1〕 谢绪恺，现代控制理论，辽宁人民出版社（1980）．

〔2〕 须田信英，矩阵在现代控制理论中的应用，科学出版社（1978）．

〔3〕 Falb P.L. & Wolvich W.A.,Decouping in the Design and Synthesis of Multivariable Systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-12 (1967), p.651-659.

〔4〕 Morse A.S. & Wonham W.M., Decoupling and pole assignment by dynamic compensation, SIAM J.Control, 8 (1970), p.317-337.

〔5〕 Wonhan W.M. & Morse A.S., Decoupling and pole assignment in linearmultivariable systemsia geometric approach, SIAM.J.Contnol, 8 (1970), p.1-18.

THE DESIGN OF A DYNAMICAL COMPENSATOR FOR REALIZING DECOUPLING CONTROL

Wang Chian

(Computer Office of Shanghai Municipal finance bureau)

Abstract

Series connection of dynamical compensators for realizing decoupling control is proposed in this paper. New concept of "the difference of row powers" is used to analyse the characteristics of rational faction matrices, to study the relations between open-loop and closed-loop transfer functions of the controlled system, to design dynamical compensator, and to deduce the use condition and calculation formula.