增刊 第1期
1985年8月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

11卷

一种设计多变量线性系统输出反馈控制器的算法

刘长樵

（哈尔滨电工学院）

摘 要

本文介绍一种计算多变量线性系统输出反馈控制器的算法。本算法首先计算具有二次型性能指标的全状态反馈增益，然后用罚函数法确定输出反馈增益的初始值，最后用Fletcher-Reeves共轭梯度法求得最优输出反馈控器参数。文中附有钢丝滚球实验装置的输出反馈控制系统计算实例及所构成的实时控制系统的响应曲线。

一、引 言

文献〔1, 2〕提出了输出反馈控制方法。如被控对象模型为n阶，输出量有r个，那么设计者可以以低于（n—r）阶的输出反馈动态补偿器获得满意的闭环响应[3]。只要补偿器的阶数足够高（最多n—r阶），总能使系统稳定。然而，对于不稳定对象，输出反馈动态补偿器参数初始值的选择比较困难，而且在利用优化方法计算时，常常因搜索步长不当而使系统参数进入不稳定区域，因性能指标值极度增大而使计算机溢出。本算法首先计算基于二次型指标的全状态反馈增益，然后利用罚函数法确定输出反馈控制器参数的初始值，最后用Fletcher-Reeves优化方法进行最优输出反馈控制计算。在优化搜索过程中对闭环系统的特征根加以检查，并调整步长以防止计算机溢出。本文采用了文献〔4〕的算法以免文献〔1,2〕中出现的收敛问题。

二、输出反馈控制问题

设系统方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu\ , \tag{1}$$

$$y = Cx\ . \tag{2}$$

其中 $x \in O^n$，$u \in O^m$，$y \in O^r$。输出反馈控制

$$u = Fy\ , \tag{3}$$

本文于1983年4月11日收到。

使性能指标

$$J(F)=\frac{1}{2}t_r[K_1X_0] \tag{4}$$

为最小。其中 $E[x(0)x'(0)]=X_0$，K_1 为满足方程

$$K_1(A+BFC)+(A+BFC)'K_1+Q+C'F'RFC=0 \tag{5}$$

的解阵。由文献[1,3]得

$$\frac{\partial J(F)}{\partial F}=[RFC+B'K_1]MC'. \tag{6}$$

性能指标也可写成

$$J(F)=\frac{1}{2}E\int_0^\infty(x'Qx+u'Ru)dt. \tag{7}$$

M满足方程

$$(A+BFC)M+M(A+BFC)'+X_0=0. \tag{8}$$

从下面的分析可见输出反馈动态补偿器[2]问题也可以归结为上述输出反馈控制问题。设补偿器为

$$\dot{w}=Ew+Ny, \tag{9}$$

$$u=Gw+Hy. \tag{10}$$

其中 $w\in O^l$。求E，N，G和H，使

$$J(E,N,G,H)=\frac{1}{2}E\int_0^\infty(x'Qx+u'R_1u+\dot{w}'R_2\dot{w})dt \tag{11}$$

为最小。定义

$$L=[H\ \ G],\quad D=[N\ \ E],\quad B_0=\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix},$$

$$Q_0=\begin{bmatrix}Q&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \hat{C}=\begin{bmatrix}C&0\\0&I\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix},$$

$$A_0=\begin{bmatrix}A&0\\0&0\end{bmatrix},\quad I_0=\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix},$$

$$\hat{Q}=Q_0+\hat{C}'L'R_1L\hat{C}'+\hat{C}D'R_2D\hat{C},$$

$$\hat{A}=A_0+B_0L\hat{C}+I_0D\hat{C}. \tag{12}$$

补偿器的设计问题可表达为求性能指标

$$\hat{J}(L,D)=\frac{1}{2}t_r[KZ_0]+t_r[(\hat{A}+\hat{A}'K+\hat{Q})S]. \tag{13}$$

其中 $[z(0)z'(0)]=Z_0$，一般取 $Z_0=I$；S为拉格朗日乘子矩阵，K，S满足方程

$$K\hat{A}+\hat{A}'K+\hat{Q}=0, \tag{14}$$

$$\hat{A}S+S\hat{A}'+Z_0=0. \tag{15}$$

由文献[2]得

$$\frac{\partial\hat{J}(L,D)}{\partial D}=I_0KS\hat{C}'+R_2D\hat{C}SC', \tag{16}$$

$$\frac{\partial\hat{J}(L,D)}{\partial L}=B_0'KS\hat{C}'+R_1L\hat{C}S\hat{C}'. \tag{17}$$

如果定义一组增广矩阵

$$A_e=A_0,\ C_e=\hat{C},\ B_e=[B_0\ \ I_0],$$

$$Q_e=Q_0,\quad x_e=\begin{bmatrix} x\\ w\end{bmatrix},\quad R_e=\begin{bmatrix} R_1 & 0\\ 0 & R_2\end{bmatrix},$$

$$y_e=\begin{bmatrix} y\\ w\end{bmatrix},\quad u_e=\begin{bmatrix} u\\ \dot{w}\end{bmatrix},\quad F_e=\begin{bmatrix} L\\ D\end{bmatrix}, \tag{18}$$

则由式（13）到（17）所描述的问题就可以用式（1）到（6）来表达。

三、算　法

根据输出反馈控制问题的表达式，可以列出求解步骤如下：

（1）如被控对象本身稳定，任取L，D，否则按下面的方法计算L，D的初始值。

（2）由式（14），（15）解得K，S。

（3）由式（13），（16）和（17）用共轭梯度法求得 $\hat{J}$ 为最小值时的 D°，L°。当 $\left\|\frac{\partial\hat{J}}{\partial D}\right\|$，$\left\|\frac{\partial\hat{J}}{\partial L}\right\|$ 足够小时计算终止，否则重复步骤（2），（3）。为防止因优化搜索步长过大而使计算机溢出，对 $\hat{A}$ 的特征值加以检查。一般应另选一组L，D，并重新计算 D°，L°，如两次结果相一致则计算结束。

当被控对象本身不稳定时，如任意选取L，D，则无法按以上步骤开始计算。但只要（1）式满足可控性条件，总可求得全状态反馈控制

$$u=[F\ \vdots\ \bar{F}]\begin{bmatrix} C\\ \bar{C}\end{bmatrix}x. \tag{19}$$

其中 $\begin{bmatrix} C\\ \bar{C}\end{bmatrix}$ 为单位阵，并记 $[F\ \vdots\ \bar{F}]=\hat{F}$。显然 $\bar{F}\bar{C}x$ 相应于由不可直接测得的状态所构成的反馈控制作用。输出反馈初始值的选择可以看作是使式（4）最小，但同时要求 $\bar{F}=0$。为此，定义[6]

$$\bar{J}(\hat{F})=J(F)+\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}\gamma\bar{F}\bar{F}'\right]. \tag{20}$$

其中 γ 为罚因子。因此可得

$$\frac{\partial\bar{J}}{\partial\hat{F}}=\frac{\partial J}{\partial\hat{F}}+[O_{m,r}\ \vdots\ \gamma\bar{F}]. \tag{21}$$

其中 $O_{m,r}$ 为 $m\times r$ 零阵。不稳定对象时的L，D初始值的选取可按下述方法进行：第一，取单位加权阵计算式（1）的全状态反馈增益，按式（12），（18）构造增广矩阵和 $\hat{F}_e$；第二，将 $\hat{F}_e$ 和 $C_e=I$ 按式（5），（6），（8），（20）和（21）用共轭梯度法计算新的 $\hat{F}_e$；第三，按 $\gamma(i+1)=\gamma(i)\beta$（$\beta>1$ 增大罚因子，i为重复计算的次数）重复第二、第三步，直至 $\|\bar{F}\|$ 足够小时的 F_e 便为L，D的初始值。如果从不同的 $\hat{F}_e$ 值开始计算都不能使 $\|\bar{F}\|$ 有足够小的结果，则应提高补偿器的阶数重新按上述方法选取输出反馈的初始值[3]。

四、示　　例

设著名的钢丝与滚球实验装置（Ball and Beam）的数学模型为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -223.0 & -13.7 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -109.0 \end{bmatrix},$$

$$C=[\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,].$$

采用二阶动态补偿器之后，增广系统的全状态反馈阵和计算结果为

$$\hat{F}_e=\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 2.75 & 1.24 & 0.89 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & -1.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L=[\,7.57 \quad -0.99 \quad -1.12\,],$$

$$D=\begin{bmatrix} 0.56 & -2.45 & 1.26 \\ 9.70 & -1.12 & -2.06 \end{bmatrix}.$$

例中 $x_e=[x_1 x_2 w_1 w_2 x_2 x_3 x_4]'$；加权阵为 $q_{11}=500$； $q_{22}=q_{33}=q_{44}=1$； $R_1=10$； $R_2=1$．图 1 为利用 LSI11/23 所构成的 Ball and Beam 装置输出反馈控制系统的响应曲线[7]．

本实验工作承墨尔本大学J. H. Anderson 教授指教在此谨表示感谢．

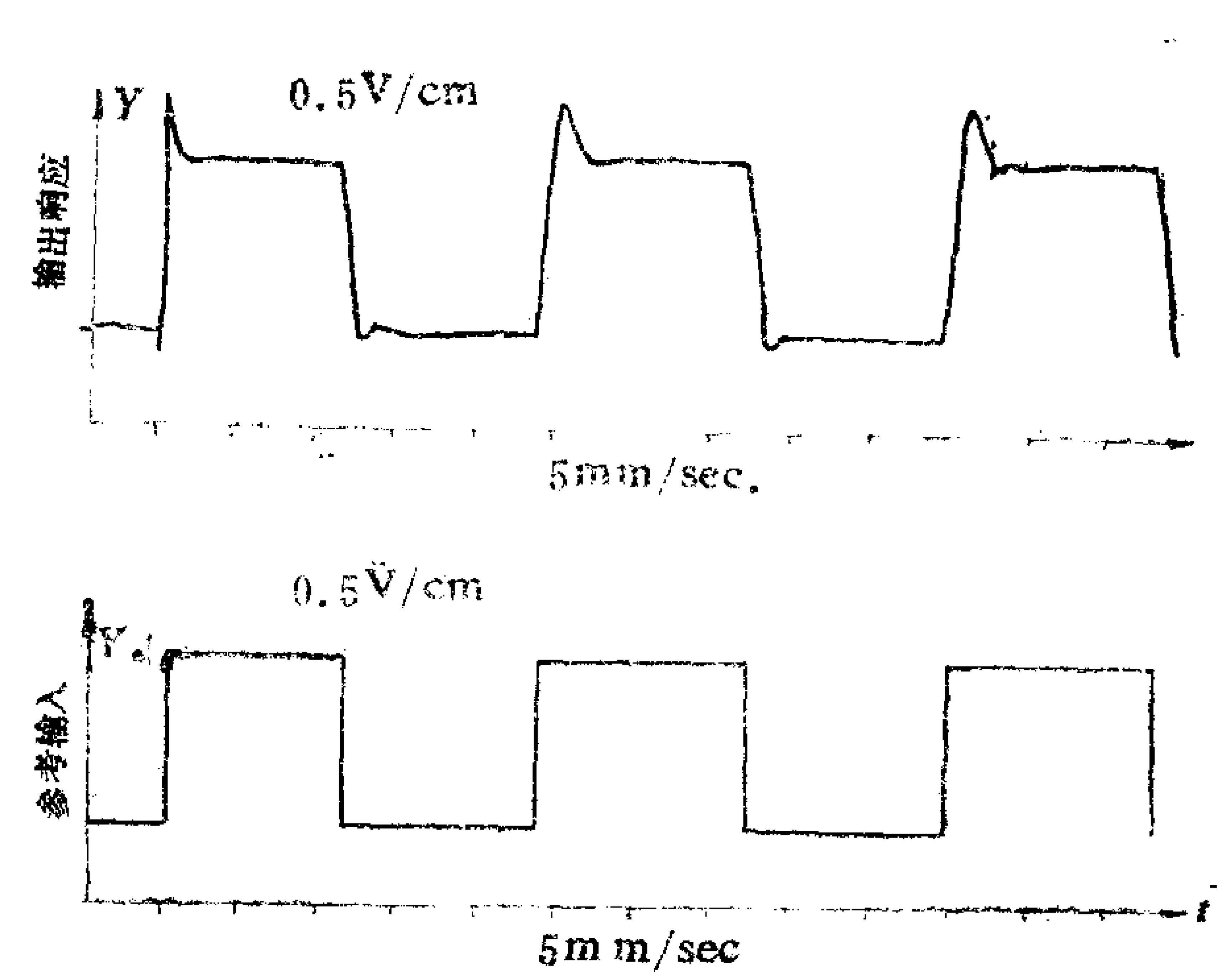

图 1　输出反馈动态补偿器控制系统响应

参考文献

〔1〕 Levine W. S. & Athans M., On the Determination of the Optimal Constant Output-feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**15**, (1970), 44-48.

〔2〕 Johnson T. L. & Athans M., On the Design of Optimal Constrained Dynamic Compensators for Linear Constant Systems, IEEE. Trans. Automat. Contr., AC-**15**, (1970), 658-660.

〔3〕 Levine W. S. Johnson. T. L. & Athans M., Optimal Limited State Variable Feedback Controllers for Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**16**, (1971), 785-793.

〔4〕 Soderstrom T., On Some Algorithms for Design of Optimal Constrained Regulators, IEEE. Trans. Automat. Contr., AC-**23**, (1978), 1100-1101.

〔5〕 Choi s. s. & Sirisena H. R., Computation of Optimal Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**19**, (1974), 257-258.

〔6〕 Choi S. S. & Sirisena H. R. Computation of Optimal Output Feedback Controls for Unstable Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**22**, (1977), 134-136.

〔7〕 Liu Changqiao (刘长樵), Corke P. I., Jamieson I. D. & Anderson J. H., Simulation and Real-time Control of Some Dynamical Systems Using Mini-, Micro-computers, Australia 2nd Conference on Control Engineering Aug. (1982).

AN ALGORITHM FOR DESIGNING OUTPUT FEEDBACK CONTROLLER OF A LINEAR MUITIVARIABLE SYSTEM

Liu Changqiao
(Harbin Institute of Electrical Technology)

Abstract

An algorithm for designing output feedback controller of a linear multivariable system is presented in this paper. Full state feedback gain with quadratic index is first computed. Penalty weight method is then used to determine the initial value of the output feedback control. And finally, parameters of the optimal output feedback controller are determined by Fletcher-Reeves conjugate gradient method. Computation results of the algorithm and the performance of a real time control system based on the results are also given.