增刊 第1期
1985年8月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATIC SINICA

11卷

线性不确定系统能控性问题初探

陈云烽
（中山大学）

摘 要

本文讨论了带有不确定系数的线性系统的能控性问题，导出了判定系统完全能控的一个充分条件，并举出了计算实例。

本文讨论的不确定系统是指[1]：描述系统的微分方程的某些系数不是准确给定的量，而只是一个区间。文〔1〕指出了这种系统的一些问题，如怎样判定其能控性、能观测性。在什么条件下能把它的极点作任意配置等。本文沿用Kalman关于线性系统完全能控的概念，初步讨论了线性不确定系统的能控性判定问题，得到一个充分条件和有关的估计式。

一、问题提法

考虑实系数定常线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t), \tag{1}$$

式中$\mathbf{x}$是n维状态变量；$\mathbf{u}$是m维控制变量；A，B分别是$n\times n$，$n\times m$阶实矩阵，其元素分别是

$$a_{ij}=\bar{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}, \quad b_{ij}. \tag{2}$$

这里，$\bar{a}_{ij}$表示a_{ij}的平均值（或叫标称值），ε_{ij}表示可在一定范围中变化。若记

$$\bar{A}=(\bar{a}_{ij}), \quad A_{\varepsilon}=(\varepsilon_{ij}), \tag{3}$$

并称$\bar{A}$为标称阵，A_{ε}为不确定阵，则系统（1）可写成

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\bar{A}\mathbf{x}(t)+A_{\varepsilon}\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}. \tag{4}$$

现在，提出如下问题：[1]假设标称系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\bar{A}\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t) \tag{5}$$

是Kalman意义下完全能控的[2]，那么ε_{ij}在多大的范围内变化时，系统（4）方能保持完全能控？

当矩阵B不是常数阵，而是t的函数阵B(t)时，也可提相应的问题，不过只有在区间〔t_0，t_1〕内才是能控的。

本文于1983年3月14日收到。

二、基本结果

依假设，标称系统（5）完全能控，故对任意$t_1>0$，矩阵

$$W(0,\ t_1)\triangleq\int_0^{t_1}e^{\bar{A}(t_1-\tau)}BB^{T}e^{\bar{A}^{T}(t_1-\tau)}d\tau \tag{6}$$

可逆[2]式中，角标“T”表示矩阵的转置。如果记

$$G(0,\ t_1)\triangleq\int_0^{t_1}e^{-\bar{A}\tau}BB^{T}e^{-\bar{A}^{T}\tau}d\tau, \tag{7}$$

那么，因为$e^{\bar{A}t_1}$与$W(0,\ t_1)$均可逆，所以$G(0,\ t_1)$也是可逆阵。

其次，微分方程（4），当初值$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$时，等价于积分方程

$$\mathbf{x}(t)=e^{\bar{A}t}\left[\mathbf{x}_0+\int_0^{t}e^{-\bar{A}\tau}(B\mathbf{u}(\tau)+A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau))d\tau\right], \tag{8}$$

从而，如果在区间$t\in[0,\ t_1]$上取$\mathbf{u}(t)$为

$$\mathbf{u}(t)=-B^{T}e^{-\bar{A}t}G^{-1}(0,\ t_1)\left[\mathbf{x}_0+\int_0^{t_1}e^{-\bar{A}\tau}A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau)d\tau\right], \tag{9}$$

代入（8）式即得

$$\mathbf{x}(t)=e^{\bar{A}t}\left[\boldsymbol{\zeta}(t)-C(t)\int_0^{t_1}e^{-\bar{A}\tau}A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau)d\tau+\int_0^{t}e^{-\bar{A}\tau}A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau)d\tau\right],$$

$$0\leqslant t\leqslant t_1; \tag{10}$$

式中，

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=(I-C(t))\mathbf{x}_0; \tag{11}$$

$$C(t)=G(0,\ t)G^{-1}(0,\ t_1). \tag{12}$$

这里，I 表示单位矩阵。由（11），（12）两式，可见$C(t_1)=I$，$\boldsymbol{\zeta}(t_1)=0$。所以，依式（10）应有$\mathbf{x}(t_1)=0$。这就表明：式（9）的控制函数$\mathbf{u}$能将系统（4）的状态由初态$\mathbf{x}(0)$跃迁到零终态$\mathbf{x}(t_1)=0$。因而，只要积分方程（10）的解$\mathbf{x}(t)$存在，则系统（4）在$[0,\ t_1]$上完全能控。记

$$K(t,\tau)=\begin{cases}e^{\bar{A}t}(I-C(t))e^{-\bar{A}\tau}, & 当\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1;\\ -e^{\bar{A}t}C(t)e^{-\bar{A}\tau}, & 当\ 0\leqslant t<\tau\leqslant t_1.\end{cases} \tag{13}$$

则方程（10）可写成

$$\mathbf{x}(t)=\int_0^{t_1}K(t,\tau)A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau)\,d\tau+e^{\bar{A}t}\boldsymbol{\zeta}(t). \tag{14}$$

这是一个Fredholm积分方程[3]。在Banach空间$C^n[0,\ t_1]$上定义映射到自身的算子

$$(R\mathbf{x})(t)\triangleq\int_0^{t_1}K(t,\ \tau)A_\varepsilon\mathbf{x}(\tau)d\tau+e^{\bar{A}t}\boldsymbol{\zeta}(t), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\cdot)=(\alpha_1(\cdot),\ \alpha_2(\cdot),\ \cdots,\ \alpha_n(\cdot))^{T}\in C^n[0,\ t_1].$$

其范数为

$$\|\boldsymbol{\alpha}(\cdot)\| \stackrel{\triangle}{=} \max_{0\leqslant t\leqslant t_1} \|\boldsymbol{\alpha}(t)\|. \tag{16}$$

而

$$\|\boldsymbol{\alpha}(t)\| \stackrel{\triangle}{=} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i(t)|. \tag{17}$$

与此向量范数相容的矩阵范数应定义为[4]

$$\|Q\| \stackrel{\triangle}{=} \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|q_{ij}|\right). \tag{18}$$

式中，$Q=(q_{ij})$。

这时，对任意$\mathbf{x}(\cdot)$，$\mathbf{y}(\cdot)\in C^n[0,\ t_1]$，有

$$\begin{aligned}&\|(R\mathbf{y})(\cdot)-(R\mathbf{x})(\cdot)\|\\&=\left\|\int_0^{t_1}K(t,\tau)A_\varepsilon(\mathbf{y}(\tau)-\mathbf{x}(\tau))\,d\tau\right\|\\&\leqslant t_1\sup_{0\leqslant\tau,t\leqslant t_1}\|K(t,\tau)\|\,\|A_\varepsilon\|\,\|\mathbf{y}(\cdot)-\mathbf{x}(\cdot)\|.\end{aligned}$$

如果

$$\left(t_1\sup_{0\leqslant\tau,t\leqslant t_1}\|K(t,\tau)\|\right)\|A_\varepsilon\|<1, \tag{19}$$

则算子R是压缩算子[3]。根据压缩映射原理，R有唯一不动点，因而，方程（14）有唯一解$\mathbf{x}(t)$，$t\in[0,\ t_1]$。

如果记

$$k(t_1)\stackrel{\triangle}{=}t_1\sup_{0\leqslant\tau,t\leqslant t_1}\|K(t,\tau)\|, \tag{20}$$

$$\mu\stackrel{\triangle}{=}\sup_{t_1>0}\frac{1}{k(t_1)}. \tag{21}$$

这里，μ可以是有限正数，也可以是$+\infty$。那么，如果

$$\|A_\varepsilon\|<\mu, \tag{22}$$

则必有$t_1>0$，使得

$$\|A_\varepsilon\|<\frac{1}{k(t_1)}\leqslant\mu. \tag{23}$$

由于条件（23）与条件（19）等价，所以，根据上述的论述，如下定理成立.

定理1. 如果标称系统（5）完全能控，而且不确定阵A_ε满足条件（22），则不确定系统（4）（即是系统（1））仍保持完全能控.

推论. 如果标称系统（5）完全能控，而且

$$|\varepsilon_{ij}|<\frac{\mu}{n},\quad i,j=1,2,\cdots,n, \tag{24}$$

则不确定系统（1）仍保持完全能控.

只要注意到矩阵范数的定义式（18），即可得此推论。

如果记

$$\tilde{G}(t_0,t_1)\overset{\triangle}{=}\int_{t_0}^{t_1} e^{\bar{A}(t_0-\tau)}B(\tau)B^T(\tau)e^{\bar{A}^T(t_0-\tau)}d\tau, \tag{25}$$

$$\tilde{K}(t,\tau)\overset{\triangle}{=}\begin{cases} e^{\bar{A}(t-t_0)}(I-\tilde{G}(t_0,t)\tilde{G}^{-1}(t_0,t_1))e^{\bar{A}(t_0-\tau)}, & 当\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1; \\ -e^{\bar{A}(t-t_0)}\tilde{G}(t_0,t)\tilde{G}^{-1}(t_0,t_1)e^{\bar{A}(t_0-\tau)}, & 当0\leqslant t<\tau\leqslant t_1; \end{cases} \tag{26}$$

$$\tilde{k}(t_0,t_1)\overset{\triangle}{=}(t_1-t_0)\sup_{t_0\leqslant\tau,t\leqslant t_1}\|\tilde{K}(t,\tau)\|, \tag{27}$$

类似定理1的论证，可得

定理2. 如果标称系统

$$\dot{x}(t)=\bar{A}x(t)+B(t)u(t) \tag{28}$$

在$[t_0,t_1]$上完全能控，并且

$$\|A_\varepsilon\|\leqslant\frac{1}{\tilde{k}(t_0,t_1)}, \tag{29}$$

则不确定系统

$$\dot{x}(t)=\bar{A}x(t)+A_\varepsilon x(t)+B(t)u(t) \tag{30}$$

在$[t_0, t_1]$上仍保持完全能控。

三、例 子

例1. 讨论如下系统的能控性问题：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u. \tag{31}$$

这时，标称系统是完全能控的。其次，令

$$\eta=\frac{t}{t_1},\qquad \xi=\frac{\tau}{t_1},$$

则式（13）所定义的矩阵$K(t,\tau)=K(t_1\eta,t_1\xi)$应为

$$K(t_1\eta,t_1\xi)=\begin{cases}\begin{pmatrix}(1-\eta)^2(1+2\eta) & t_1(1-\eta)^2[\eta-\xi(1+2\eta)]\\ -\dfrac{6}{t_1}\eta(1-\eta) & (1-\eta)(1-3\eta+6\xi\eta)\end{pmatrix}, & 当0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant1;\\ \begin{pmatrix}-\eta^2(3-2\eta) & -t_1\eta^2[(2-\eta)-\xi(3-2\eta)]\\ -\dfrac{6}{t_1}\eta(1-\eta) & -\eta[(4-3\eta)-6\xi(1-\eta)]\end{pmatrix}, & 当0\leqslant\eta<\xi\leqslant1.\end{cases}$$

在区域 $0\leqslant\eta, \xi\leqslant1$上，各元绝对值 $|k_{11}|$, $|k_{12}|$, $|k_{21}|$, $|k_{22}|$ 的上确界分别为1，$\frac{4}{27}t_1$，$\frac{3}{2t_1}$和1，从而，（21）式所定义的值 $\mu\geqslant\frac{2}{3}$。根据定理1，当$|\varepsilon_{i1}|+|\varepsilon_{i2}|\leqslant\frac{2}{3}$, $i=1, 2$时，系统（31）保持完全能控。

例2. 考虑系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}u, \tag{32}$$

在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，对应的标称系统完全能控。当 $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，按式（26）可算出 $\tilde{K}(t, \tau)$ 为

$$\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}(\pi-4t)\cos(t-\tau)-\sin(t+\tau)-\sin(3t-\tau)\\ (\pi-4t)\sin(t-\tau)-\cos(t+\tau)+\cos(3t-\tau)\\ (4t-\pi)\sin(t-\tau)-\cos(t+\tau)+\cos(3t-\tau)\\ (\pi-4t)\cos(t-\tau)+\sin(t+\tau)-\sin(3t-\tau)\end{pmatrix},$$

当 $0\leqslant t<\tau\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\tilde{K}(t,\tau)$ 为

$$\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}-4t\cos(t-\tau)-\sin(t+\tau)-\sin(3t-\tau)\\ -4t\sin(t-\tau)-\cos(t+\tau)+\cos(3t-\tau)\\ 4t\sin(t-\tau)-\cos(t+\tau)+\cos(3t-\tau)\\ -4t\cos(t-\tau)+\sin(t+\tau)+\sin(3t-\tau)\end{pmatrix}.$$

因而可按式求得 $k(0, \frac{\pi}{2})\leqslant2(1+\pi)$。根据定理 2 可得：当

$$|\varepsilon_{i1}|+|\varepsilon_{i2}|<\frac{1}{2(1+\pi)},\quad i=1,\ 2$$

时，系统（32）在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 区间上保持完全能控。

参 考 文 献

〔1〕关肇直，数学物理和系统科学中的几个问题，应用数学和计算机应用，№1,(1980), 48-59.

〔2〕关肇直，陈翰馥，线性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社（1975）.

〔3〕Curtain R. F. and Pritchard, A. J. Functional Analysis in Moden Applied Mathematics, Academic Press, 1977.

〔4〕须田信英等，自动控制中的矩阵理论（中译本），科学出版社（1979）.

ON COTROLLABILITY OF LINEAR SYSTEMS WITH INACCURATE COEFFICIENTS

Chen Yunfeng
(Zhongshan University)

Abstract

In this paper, cotrolla-bility of linear systems with inaccurate coefficients is discussed. A sufficient condition for the above problem is derived. Some examples are also given.