增刊 第1期
1985年8月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

11卷

求解Lyapunov矩阵方程的一种算法

王子才 权太范
(哈尔滨工业大学)

摘 要

本文根据Schwarz矩阵的性质，提出了求解Lyapunov矩阵方程的一种递推算法。这种算法只需解N阶线性方程组，计算程序较简单，运算速度快，占用内存少，适应于求解高阶Lyapunov矩阵方程。

一、引 言

在现代控制理论中，Lyapunov矩阵方程（以下简称LMEQ）起了非常重要的作用。关于LMEQ的解法，Bellman[1]首先提出了把N阶LMEQ化为N^2阶线性方程组的思想，但系统阶数较高时，算法占用的内存很大。为此，本文提出用稳定判据中常用的Schwarz矩阵把N阶LMEQ化为N阶线性方程组求解的递推算法。用本算法曾解决了某飞行器设计中的一些问题[2]。

二、算 法

设LMEQ为

$$A'P+PA=-Q, \tag{1}$$

其中A，P，$Q\in R^{n\times n}$，P，Q为正定对称阵，且A为稳定矩阵。

设A的Schwarz矩阵为

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & & \\ s_1 & 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & & \\ 0 & s_2 & 0 & 1 \quad 0 \quad \cdots 0 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix}=\hat{P}A\hat{P}^{-1}, \tag{2}$$

其中线性变换$\hat{P}$，对单变量系统和多变量系统可分别用文[3]，[4]的方法构造，故有

$$S'F+FS=C. \tag{3}$$

本文于1983年6月27日收到。

其中
$$F=\hat{p}'^{-1}P\hat{p}^{-1}, \tag{4}$$
$$C=-\hat{p}'^{-1}Q\hat{p}^{-1}, \tag{5}$$
令f_i，c_i分别表示矩阵F，C的列向量，则式（3）可写成
$$S'(f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n)+(f_1,f_2,\cdots\cdots,f_n)S=(c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n) \tag{6}$$
由上式可得递推公式
$$S_i f_{i+1}=-S'f_i-f_{i-1}+c_i,\quad (i=1,2,\cdots n-1), \tag{7}$$
$$(S'+S_nI)f_n=-f_{n-1}+c_n. \tag{8}$$
式中　$f_0=0$。可见，若能求出f_1，则由递推公式（7），（8）可求得 $f_i(i=2,3,\cdots,n)$。最后由式（4）求出解P。

由（8）式得
$$f_n=(S'+S_nI)^{-1}(-f_{n-1}+c_n), \tag{9}$$
由（7）式有
$$S'f_{n-1}+f_{n-2}+S_{n-1}f_n=c_{n-1}, \tag{10}$$
把（9）式代入（10）式，并经整理可得
$$\Delta_1 f_{n-1}+f_{n-2}=\Delta_2. \tag{11}$$
其中
$$\Delta_1=S'-S_{n-1}(S'+S_nI)^{-1};$$
$$\Delta_2=c_{n-1}-S_{n-1}(S'+S_nI)^{-1}c_n.$$
由式（7），（8）可知，$f_i(i=2,3,\cdots,n)$ 均可由f_1表出。即
$$f_{i+1}=D_if_1+W_i,\quad (i=1,2,\cdots n-1) \tag{12}$$
其中
$$D_i=-(S'D_{i-1}+D_{i-2})/s_i,$$
$$W_i=-(S'W_{i-1}+W_{i-2}-c_i)/s_i,$$
$$D_{-1}=0,\quad D_0=I,$$
$$W_{-1}=W_0=0,\quad S_0=0.$$
（因A为稳定阵，故$S_i\neq0$）由（12）式得
$$f_{n-1}=D_{n-2}f_1+W_{n-2}, \tag{13}$$
$$f_{n-2}=D_{n-3}f_1+W_{n-3}. \tag{14}$$
把（13），（14）式代入（11）式，并整理可得关于f_1的线性方程组。即，
$$Gf_1=M. \tag{15}$$
其中
$$G=\Delta_1D_{n-2}+D_{n-3}, \tag{16}$$
$$M=\Delta_2-W_{n-3}-\Delta_1W_{n-2}, \tag{17}$$
$$G\in R^{n\times n},\quad f_1,\ M\in R^n.$$
因G，M已知，故由式（15）能求出f_1。图1为计算框图。

例。设
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-5&-1\end{pmatrix},\quad b=(0\ \ 0\ \ 1\ )',\quad Q=I.\ 求P.$$

解。第一步，构造$\hat{P}$，求S。根据文[3]，有

$$\hat{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},$$

由（2）式得

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&0&1\\0&-3&-1\end{pmatrix},$$

故$S_1=-2$，$S_2=-3$，$S_3=-1$。

第二步，求C。由（5）式得

$$C=\begin{pmatrix}-5&0&2\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}.$$

第三步，求G，M。

$$G=\begin{pmatrix}0.\dot{6}&0.\dot{6}&1.\dot{9}\\-0.\dot{3}&-0.\dot{3}&1.\dot{9}\\0.3&-0.\dot{6}&1\end{pmatrix},$$

$$M=(0.8\dot{3}\quad -6.1\dot{6}\quad -0.83)'.$$

第四步，求F。

解线性方程组（15）得

$$f_1=(5.749\ \ 1.25\ \ -1.96)'.$$

由式（7）得

$$f_2=(1.25\quad 5.749\quad 0.583)',$$

由式（8）得

$$f_3=(-1.916\quad 0.583\quad 1.083)'.$$

第五步，求P。由式（4）得

$$P=\begin{pmatrix}2.41\dot{6}&2.416&0.25\\&5.74\dot{9}&0.58\dot{3}\\\text{SYN}&&1.08\dot{3}\end{pmatrix}.$$

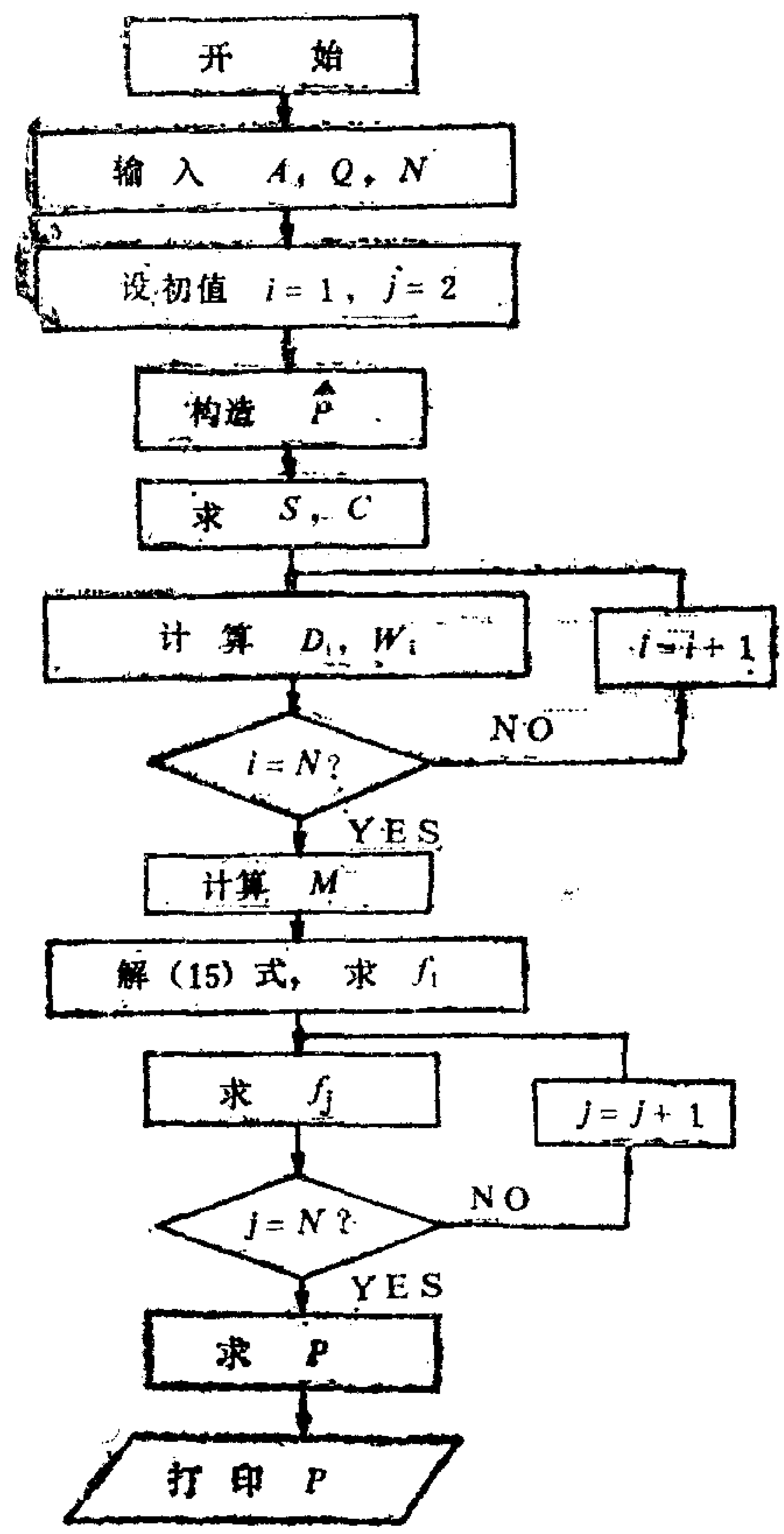

图 1　计算流程图

三、结束语

本算法实质上是把求解N阶LMEQ问题转化为解N阶线性方程组的方法。因此和文〔1，5〕方法相比，程序较简单，计算速度快，占用内存较少，尤其是适应于求解高阶LMEQ。

参考文献

〔1〕 Bellman. R., Introduction to Matrix Analysis, New York, 1960.

〔2〕 王子才，权太范等，快速降高控制研究，宇航学报，第1期（1984），P. 24-29.

〔3〕 Chen. C. F., A Matrix for Evaluation Schwarz's Form, IEEE. Trans AC—11 (1966), P.303—305.

〔4〕 Neang-San et al., A Matrix in the Block Schwarz Form and the Stability of Matrix Polynomials, Int. J. Control, 27 (1978) P.245—249.

〔5〕 王子才，权太范.，Lyapunov 矩阵方程解法，哈工大学报，第1期（1983），P. 55—63.

A SOLUTION OF THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION

Wang Zicai Quan Taifan

(Harbin Institute of Technology)

Abstract

In This paper, a recurrence formula for the solution of Lyapunov matrix equation by the properties of schwarz matrix is presented. Only once is an N order algebraic equation needed to be solved in terms of the method. So the calculating program is simple, operating speed is fast, and less internal storage is required. The solution is particularly suitable for higher order Lyapunov matrix equation.