# 线性系统数字仿真方法[1)]

王钦友
（陕西机械电气研究所）

**摘　要**

本文介绍了线性定常系统数字仿真的两种方法，即用于输入量为已知连续函数的系统仿真的等效转移法；用于输入量为未知离散函数的系统仿真的拟合转移法。这两种方法的特点是精度较高、计算量较小、适用性较强。

## 一、等效转移法

设线性定常系统Σ的输入量为已知连续函数u(t)，其描述微分方程为

$$y^{(n)}(t)+\alpha_n y^{(n-1)}(t)+\cdots+\alpha_2 y'(t)+\alpha_1 y(t)$$
$$=\beta_n u^{(n-1)}(t)+\beta_{n-1}u^{(n-2)}(t)+\cdots+\beta_2 u'(t)+\beta_1 u(t). \tag{1.1}$$

对此方程进行拉普拉斯变换并代入初始条件，则有

$$A(s)Y(s)-W(s)=B(s)U(s)-V(s), \tag{1.2}$$

其中多项式W(s)和V(s)分别对应于系统的输出和输入初始条件，其各项系数由公式（1.3）计算．

$$\begin{cases} w_i=\sum\limits_{j=0}^{n-i}\alpha_{i+j+1}y^{(j)}(t_0), \\ v_i=\sum\limits_{j=0}^{n-i}\beta_{i+j+1}u^{(j)}(t_0), \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.3}$$

设u(t)的象函数U(s)为一严格有理分式

$$U(s)=\frac{C(s)}{D(s)}, \tag{1.4}$$

于是

$$Y(s)=\frac{B(s)C(s)+D(s)[W(s)-V(s)]}{A(s)D(s)}=\frac{\Psi(s)}{\Phi(s)}=\Pi(s). \tag{1.5}$$

将上式得到的系统Π称为原系统Σ的等效系统，且此系统满足下式

$$H(s)=\Pi(s)1(s)=Y(s), \tag{1.6}$$

式中1(s)是脉冲函数δ(t)（Dirac Function）的象函数．式（1.6）表明，原系统在任一

本文于1984年2月25日收到．

1）本文曾在1983年10月第四届全国系统仿真学术会议上宣读．

初始条件下对输入函数的响应与其等效系统在零初始条件下对脉冲函数的响应是相同的。

适当选取等效系统的实现方式（可控型、可观测型或其它规范型），就可得到等效系统输出响应的表达式

$$\begin{cases} x(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\, b\,\delta(\tau-t_0)\,d\tau, \\ y(t)=cx(t). \end{cases} \tag{1.7}$$

根据脉冲函数与时间函数卷积的特性[1]，式（1.7）即为

$$\begin{cases} x(t)=e^{A(t-t_0)}\, b, \\ y(t)=cx(t). \end{cases} \tag{1.8}$$

这样，通过脉冲等效的途径，就把求解原系统响应时微积分运算简化为代数运算，从而提高了解算精度。

系统响应表达式很容易写成常用的转移公式的形式

$$\begin{cases} x(k)=e^{AT}x(k-1), \quad (x(0)=b), \\ y(k)=cx(k), \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ K). \end{cases} \tag{1.9}$$

若对等效系统进行相似变换，即

$$\Pi^*(s)=\alpha\Pi(\alpha s)=\frac{\Psi^*(s)}{\Phi^*(s)}, \tag{1.10}$$

则公式（1.9）变为其相似公式。当$\alpha$取为$1/T$时，则相似转移公式为

$$\begin{cases} x^*(k)=e^{A^*}x^*(k-1), \quad (x^*(0)=b^*). \\ y(k)=c^*x^*(k), \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ K). \end{cases} \tag{1.11}$$

这里的$A^*$，$b^*$，$c^*$分别是A，b，c的相似矩阵。当取$\alpha>1$时，状态转移矩阵$e^{A^*}$比$e^{AT}$的收敛速度快，因而截断误差较小。

从转移公式（1.9）和（1.11）可以看到，一旦状态转移矩阵$e^{AT}$或$e^{A^*}$算出后，每次转移仅作两次矩阵乘法，因此求解系统响应的速度较快。至于$e^{AT}$或$e^{A^*}$，可以选用各种方法计算。

## 二、拟合转移法

当系统$\Sigma$的输入量是未知的离散函数时，由于不能得到输入函数的象函数$U(s)$，因此无法用等效转移法计算系统响应。此时可用拟合转移法进行系统仿真。

设系统$\Sigma$为

$$\Sigma(s)=\frac{\beta_n s^{n-1}+\beta_{n-1}s^{n-2}+\cdots+\beta_2 s+\beta_1}{s^n+\alpha_n s^{n-1}+\cdots+\alpha_2 s+\alpha_1}=\frac{B(s)}{A(s)}, \tag{2.1}$$

在$t_k$时刻，系统的输入量是一组即时值，即$u(k)$，$u'(k)$，$\cdots$，$u^{(m-1)}(k)$。在$t_k$时刻系统的响应式为

$$\begin{cases} x(k)=e^{AT}x(k-1)+\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_k-\tau)}bu(\tau)d\tau, \\ y(k)=cx(k). \end{cases} \tag{2.2}$$

对卷积项作变量替换，可得

$$x(k)=e^{AT}x(k-1)+\int_0^T e^{A\xi}bu(t_k-\xi)d\xi. \tag{2.3}$$

由于系统在$t_k$时刻的输入值$u(k)$及其各阶导数值$u^{(i)}(k)$　$(i=1, 2, \cdots, m-1)$已知，因而可以将系统的输入量在区间$[t_{k-1}, t_k]$上逐段“拟合”成连续函数，即

$$u(t_k-\xi)=u(k)-u'(k)\xi+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}u^{(m-1)}(k)\xi^{m-1}. \tag{2.4}$$

将式（2.4）代入式（2.3），则式（2.3）的积分项可用积分公式直接求出．这样，响应式（2.2）就变成代数式

$$\begin{cases} x(k)=e^{AT}x(k-1)+Gr(k), \\ y(k)=cx(k), \end{cases} \quad (k=1, 2, \cdots, K), \tag{2.5}$$

式中G为输入转移矩阵；$r(k)$为输入向量．其表达式及计算公式分别为

$$r(k)=\begin{pmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \\ \vdots \\ r_m(k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(k) \\ u'(k) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(k) \end{pmatrix}, \quad (1\leqslant m\leqslant n), \tag{2.6}$$

$$G=[G_1\ G_2\cdots G_m], \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} G_i=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(-1)^j}{j!}J_{i-j}, \\ J_i=(e^{AT}-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}A^jT^j)A^{-i}b, \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{2.8}$$

公式（2.5）即为求解系统输出响应的拟合转移公式．初始状态$x(0)$可按实现方式相应算出，下面给出的是可观测型实现方式下的计算公式

$$x_i(0)=\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{i+j+1}y^{(j)}(t_0), \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{2.9}$$

通过分段拟合，将式（2.2）变成了式（2.5），微积分运算变成了代数运算，使计算公式简化．

同样地，也可以用式（2.5）相应的相似公式

$$\begin{cases} x^*(k)=e^{A^*}x^*(k-1)+G^*r(k), \\ y(k)=c^*x^*(k), \end{cases} \quad (k=1, 2, \cdots, K), \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} G_i^* = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j}{j!} J_{i-j}^*, \\ J_i^* = \left(e^{A^*} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!} A^{*j}\right) A^{*-i} b^*, \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \qquad (2.11)$$

计算系统响应。至于初始状态$x^*(0)$也按相应的相似公式计算。

## 三、结 语

等效转移法和拟合转移法是线性定常系统数字仿真的有效方法。其中拟合转移法也可用于非线性系统的数字仿真。

这两种仿真方法的特点，在于采用解析方法求出了相应的计算公式，提高了解算精度；采用了常用的状态（以及输入）转移的方式，减小了计算量。另外，还可采用相似公式进一步改善计算性能。作者曾用大量具有解析解的数学例题对这两种算法进行了验证，仿真的结果是令人满意的。以等效转移法而言，它比同步长的四阶龙格-库塔法的计算精度至少要高一到两个数量级。

## 参 考 文 献

〔1〕 Chen Chitsong, Introduction to Linear System Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.

## DIGITAL SIMULATION METHODS OF LINEAR SYSTEMS

Wang Qinyou
(Shaanxi Mechanical and·Electrical Institute)

Abstract

Two methods of digital simulation for linear time-invariant systems are presented: the Equivalent-Transition Method applied to simulation of systems with a known continuous function as input and the Fitting-Transition Method applied to simulation of systems with an unknown discrete function as input. These methods are characterized by their higher accuracy, less calculation requirement and wider applications.