

图论技术及其在控制系统CAD中的应用¹⁾

吴重光 沈承林
(北京化工学院)

摘 要

本文论述了图论方法的计算机程序,探讨了图论程序在控制系统CAD中的若干应用,包括系统仿真、复杂信号流图的简化、多变量频率响应法、系统模型降阶及稳定判据等。

以上各计算程序采用FORTRAN-IV语言,在PDP11/70小型机上实现。

现代高速大容量电子计算机为图论技术实用化创造了条件,使得图论的应用领域日渐扩大。控制系统CAD中采用图论技术的工作已经有所开展^[1,2]。其优点是直接从控制系统的信号流图或结构图入手,为复杂系统的分析与设计提供了有效手段。控制系统CAD中使用图论技术主要是解决复杂信号流图简化问题。所以开发相应的效率比较高的图论程序是基础工作。本文给出了一种实用图论程序。并且通过复杂信号流图简化,由信号流图进行系统仿真、多变量频率响应的求取、多变量劳斯稳定判据及线性系统模型降阶等方面说明图论程序在控制系统CAD中的特殊功能。

一、图论程序

本图论程序将梅逊(Mason)公式全部由计算程序完成,梅逊公式如下:

$$p = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n p_i \Delta_i, \quad (1)$$

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots (-1)^m \sum L_m. \quad (2)$$

式(1)及(2)中, p 表示信号流图输入节点到输出节点的总传输; p_i 表示第*i*条前向通路的传输; Δ 表示流图特征式; Δ_i 表示特征式余因子; L_1, L_2, \dots, L_m ,表示一个、两个、 \dots m 个互不接触回路传输的乘积。

图论程序主要由四个基本部分组成。1)基本回路探索程序; 2)基本前向通路探索程序; 3)求互不接触回路组合程序及求流图特征多项式 $\Delta(s)$ 程序; 4)求 $\Delta(s)$ 的余因子 $\Delta_i(s)$ 及各前向通路与 $\Delta_i(s)$ 乘积之代数和 $\sum p_i(s) \Delta_i(s)$ 的程序。同一网络通道可有多条,但流图特征多项式 $\Delta(s)$ 是相同的。所以基本回路探索程序及互不接触回路组合程序只调用一次。程序

本文于1984年3月5日收到。

1) 本文曾在1983年第四次全国系统仿真学术会议上宣读。

整体结构如图1所示。图中N是所求通道个数，KS及ND是某一通道的起始和终止节点编号。

使用本程序只需把系统数学模型进行拉氏变换，作出信号流图，并把信号流图表达为特定的信息输入计算机，就可由程序自动求出任意指定通道的传递函数，见式(3)所示。

$$p(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3)$$

式(3)中，m，n是s的幂次；a₁，b₁是分母、分子s域多项式的系数。

图论程序的基本回路与前向通路探索算法，要求速度必须快且占用容量少。本程序采用了改进的排列探索法^[1]和Johnson算法^[3]。计算表明Johnson算法效率较高，其探索时间及占用容量都接近最小限度^[4]，探索时间最大值等于O((n+e)(c+1))，占用容量最大值等于O(n+e)。n为信号流图中节点总数；e是支路总数；c是基本回路总数。

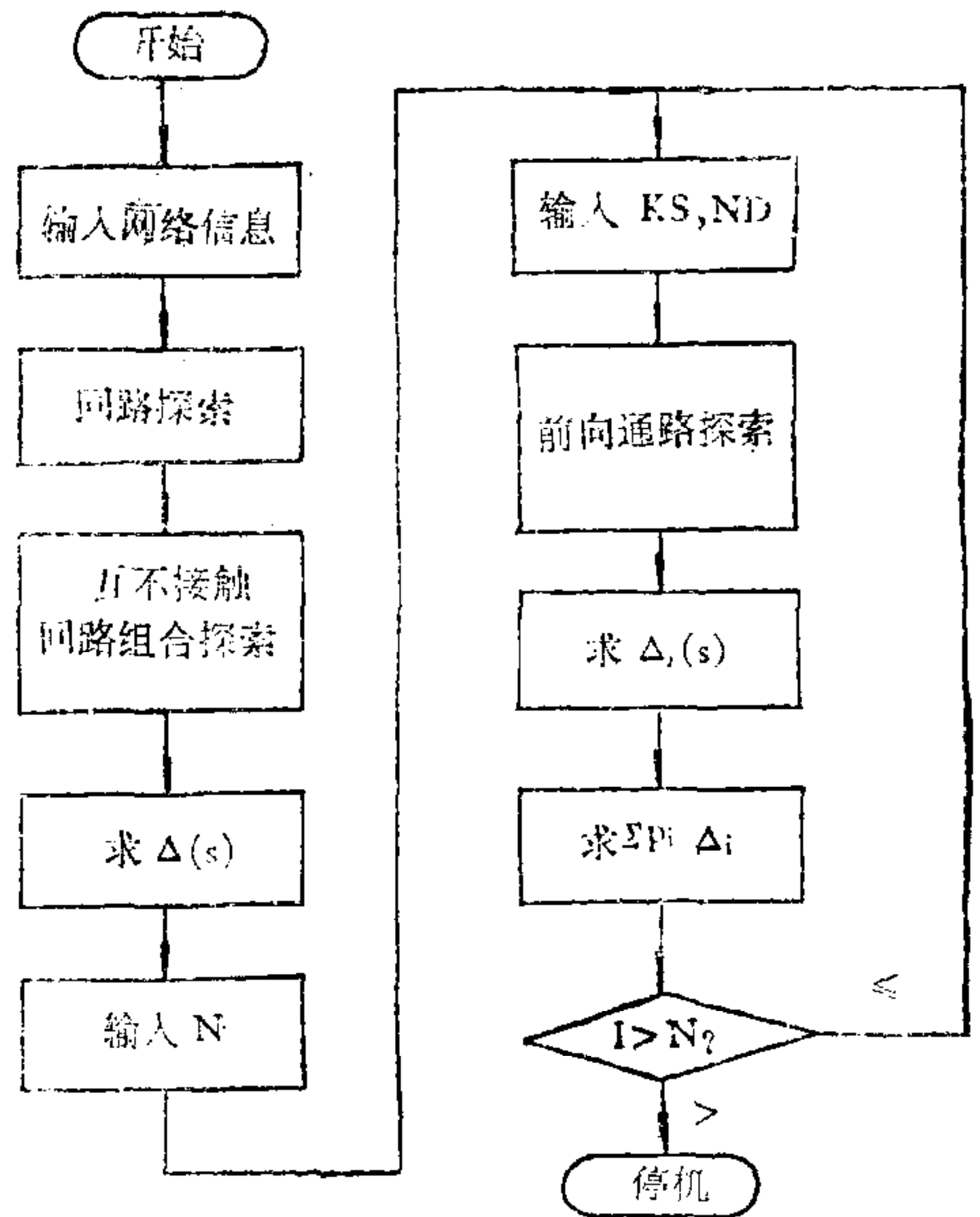


图1 图论程序示意框图

二、图论程序应用

图论程序应用场合较多，本文仅介绍作者工作中涉及的内容，最后简单提及若干其它应用。

1. 复杂信号流图简化

所谓复杂信号流图简化，就是将多输入多输出信号流图通过图论程序处理后简化成由输入端至输出端的直通支路，称为通道，如图2所示。程序能够把各通道传递函数自动规格化为式(3)形式。多变量网络的最终简化式用传递矩阵(4)表达。

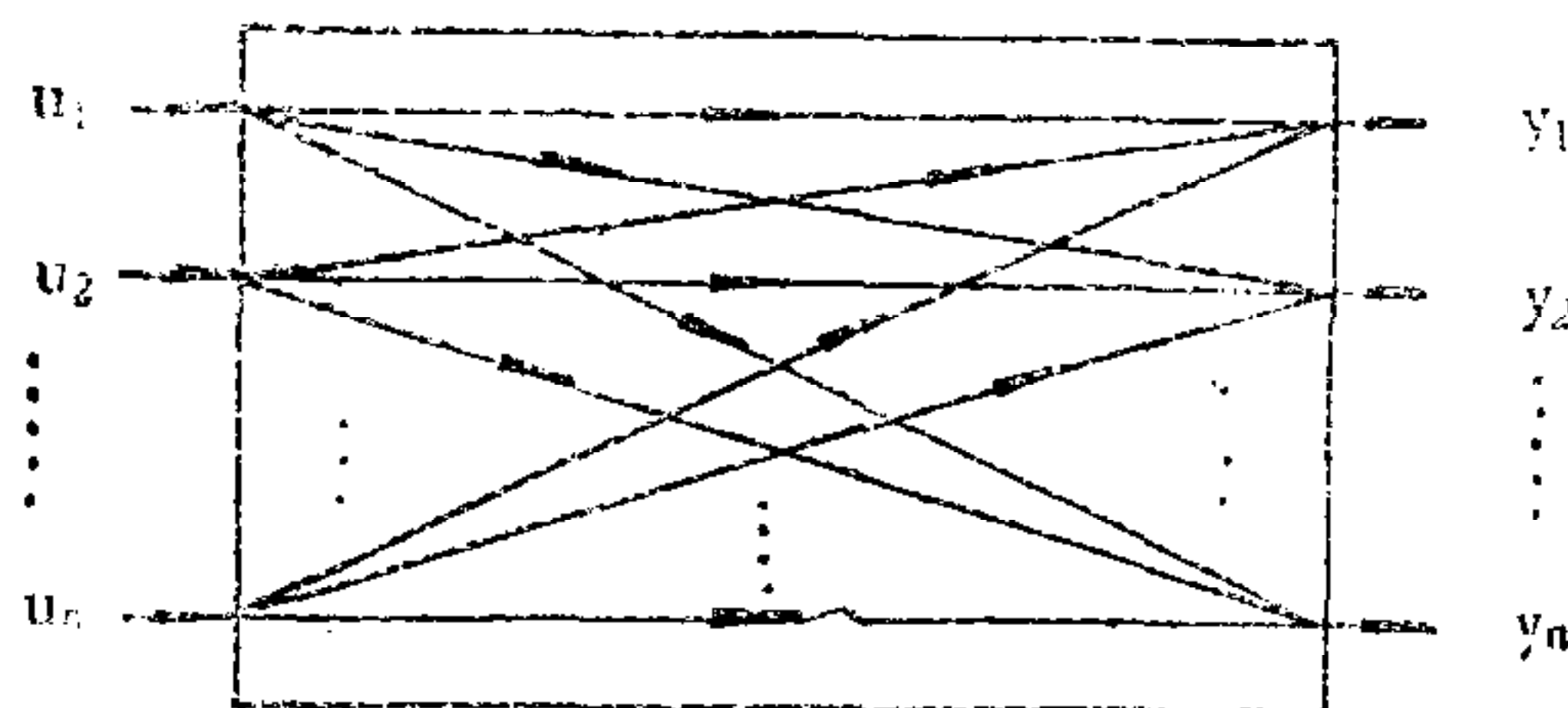


图2 多变量网络简化示意图

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \dots & p_{1m}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & \dots & p_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}(s) & p_{m2}(s) & \dots & p_{mm}(s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

式(4)中, $\Delta(s)$ 是流图特征多项式; $p_{ij}(s)$ 是各通道传递函数的分子部分s域多项式。式(4)是一种十分理想的简化形式。 $\Delta(s)$ 被提出, 各通道传递函数都呈规格形式, 给多变量系统分析、研究及控制系统设计提供了方便。这是其它方法所不易达到的。另外图论方法比较直观省力, 只要作出信号流图即可得到简化结果。

单变量复杂网络与多变量复杂网络信号流图没有根本区别。从这种意义上看图论程序将单变量及多变量(包括输入输出不相等情况)处理方法统一了起来。

2. 线性多变量网络稳定判据

图论程序可以得到统一的流图特征式 $\Delta(s)$, 若网络都为闭环, 则直接对 $\Delta(s)$ 运用劳斯判据就可以初步判定网络稳定情况。劳斯判据计算方法推荐如下公式: 将 $\Delta(s)$ 分解成式(5)奇、偶项。

$$\Delta(s) = \sum_j a_{1,j+1} s^{n-2j} + \sum_k a_{2,k+1} s^{n-(2k+1)}. \quad (5)$$

式中, 当n是偶数时, $j=0, 1, 2, \dots, n/2$ 且 $k=0, 1, 2, \dots, (n-2)/2$; 当n是奇数时, $j=0, 1, 2, \dots, (n-1)/2$ 且 $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)/2$ 。劳斯阵列为

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots, \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots, \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots, \\ \dots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n,1} & & & \\ a_{n+1,1} & & & \end{array}$$

求劳斯阵中任一元素 $a_{i,j}$ 的通用公式为

$$a_{i,j} = a_{i-2,j+1} - (a_{i-2,1} \cdot a_{i-1,j+1}) / a_{i-1,1} \quad (6)$$

其中, $i \geq 3$ 且 $1 \leq j \leq \lfloor (n-i+3)/2 \rfloor$ 。

3. 线性高阶系统连分式降阶

通道传递函数(3)不仅是连分式降阶最理想形式, 也是其它各种线性系统降阶方法的理想前提。因为得不到复杂网络的简化传递函数式(3), 各种有理降阶公式都无法施展作用。在此以连分式降阶法作例子说明。为了叙述方便把式(3)改写成式(7)。

$$G(s) = \frac{B_1 + B_2 s + B_3 s^2 + \dots + B_{n+1} s^n}{A_1 + A_2 s + A_3 s^2 + \dots + A_{n+1} s^n}. \quad (7)$$

用连分式展开式(7)得

$$G(s) = \frac{1}{h_1 + \frac{s}{h_2 + \frac{s}{h_3 + \frac{s}{h_4 + R}}}} \quad (8)$$

式(8)中

$$h_1 = A_1/B_1;$$

$$h_2 = B_1/(A_2 - h_1 B_2);$$

$$h_3 = (A_2 - h_1 B_2)/(B_2 - h_2(A_3 - h_1 B_3));$$

$$h_4 = (B_2 - h_2(A_3 - h_1 B_3)) / (\Lambda_3 - h_1 B_3 - h_3(B_3 - h_2(\Lambda_4 - h_1 B_4)))$$

令 $R \approx 0$ ，则二阶降阶模型为

$$\overline{G}(s) = \frac{(h_2 + h_4)s + h_2 h_3 h_4}{s^2 + (h_1 h_2 + h_1 h_4 + h_3 h_4)s + h_1 h_2 h_3 h_4} \quad (9)$$

按式(9)得到的降阶模型无论原模型阶次如何高，最终一律降成二阶。这种降阶模型能否较好地替代原模型必须采用可靠方法检验。用于多变量降阶更应慎重。仅靠连分式降阶方法得不到满意结果时可更换其它方法。就连分式方法本身而论也有数种。所以较好的办法是在控制系统CAD软件中，用图论程序作前导配合系统仿真程序及各种降阶算法构成一个模型降阶程序包。

4. 由信号流图直接仿真多变量网络

运用图论程序求得传递矩阵(4)，配合单变量连续系统仿真程序，可以由信号流图直接进行复杂网络仿真计算。如果仅仿真单个外扰对单个输出的瞬态响应，只需将所涉及的通道作仿真计算。对于多外扰情况，运用线性迭加原理分别计算各通道瞬态响应再把相应通道响应迭加。

5. 多变量频率响应算法

算法一。可以直接输入信号流图求得多变量频率响应。将 $s = j\omega$ 代入 s 域多项式，采用简明快速的奥奈法则，详见文献[5]。具体方法是把图论程序与单通道频率响应程序衔接组成一个程序。先经图论程序求出 $\Delta(s)$ ，然后每求一个通道分子 s 域多项式，调用一次单变量频率响应程序，直到求完奈奎斯特阵列中各子奈奎斯特图为止。

算法二。将复杂网络中每一支路的传输都视为任意高阶并具有纯滞后环节，即式(10)。

$$G_k(s) = \frac{\sum_0^m b_i s^{m-i}}{\sum_0^n a_j s^{n-j}} \cdot e^{-\tau s} \quad (10)$$

显然，程序只要求输入网络方框图就可求取频率响应。对使用者而言非常直观、方便。本方法处理任一支路都可含有纯滞后环节，是精确算法，不必 $pade'$ 近似。这些优点都与运用图论技术分不开。

计算方法是：对每一个正弦频率 ω 取值，首先令 $s = j\omega$ ，用奥奈法则代入各支路，可以求出一系列对应各支路的复数传输，同时在相位差中考虑纯滞后项并体现到复数传输中去。全部支路求完后，将这些复数传输存储。接着应用图论程序已经探索出的基本回路及基本前向通路结构信息，代入各支路复数传输求得前向通路及回路复数传输。最后，在复数域运用梅逊公式或直接消去法，计算出指定输入节点到输出节点的总复数传输，于是得到该频率值下的幅值及相位差。

频率每增加一个步长重复以上步骤，直到设定的末限频率值，就得到频率响应值表。

算法二与图论程序再次配合，同时运用网络分割方法，为小机器求解大规模网络频率响应提供了可能。

6. 其他应用

控制系统CAD中还有较多场合可以应用图论程序。例如：求传递矩阵 $G(s)$ 的逆矩阵 $G^{-1}(s)$ ，参见文献[2]；直接用于静态系统仿真；自动确定系统仿真的模块最优计算顺序；

系统灵敏度分析^[1]；求系统特征值或特征向量以及用信号流图法求解线性规划和非线性规划问题等。

三、计算举例

前面所述图论程序及有关应用程序已经汇集成一套软件系统。以下是应用这套软件计算的部分算例。

(1) 取自文献[1]，是一个连续搅拌釜式反应器 (CSTR) 控制系统，信号流图见图 3。图 3 中当断开支路 17→4 时，系统处于开环状态，有五个基本回路。闭合支路 17→4 时，系统处于闭环状态，有十七个基本回路。在 PDP11/70 机上不到 10 秒时间即可求出 1→11, 2→11, 3→11, 1→13, 2→13, 3→13 六个通道开环及闭环共计 12 个传递函数。计算结果与文献[1]全部吻合。表 1 列出了开环 3→11 通道传递函数程序计算结果及用计算器人工计算结果对照，结果完全一致。

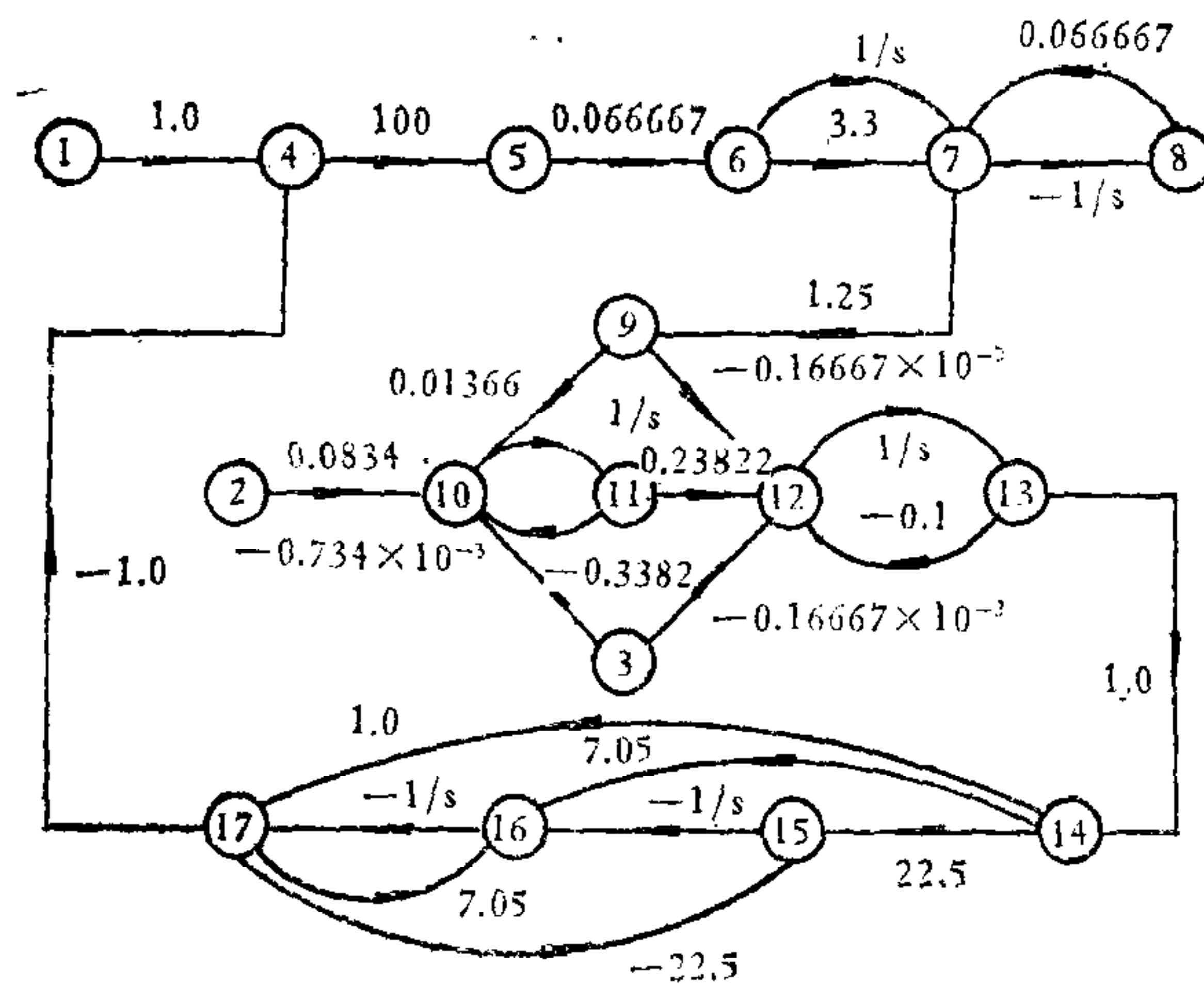


图 3 某 CSTR 控制系统信号流图

表 1

s 的幂次	分子 s 多项式系数		分母 s 多项式系数	
	手算结果	程序结果	手算结果	程序结果
0	-0.00011010005	-0.00011010005	0.050730025	0.050730025
1	-0.0027869985	-0.0027869985	1.4341457	1.4341457
2	-0.017382343	-0.017382343	11.806140	11.806140
3	-0.0052970333	-0.0052970333	26.122343	26.122343
4	-0.0007340000	-0.0007340000	7.5548667	7.5548667
5	0.0000000000	0.0000000000	1.0000000	1.0000000

闭环 1→13 通道模型，经连分式降阶程序计算得到二阶模型为式 (11)。原模型与降阶模型分别仿真得到单位阶跃响应，并分别用程序求出十项质量指标列于表 2。由表 2 看出降阶模型的近似程度较好。原模型见式 (12)。

$$G(s) = \frac{-0.02896s + 0.06553}{s^2 + 0.09363s + 0.07212} \quad (11)$$

$$G(s) = \frac{-0.04583s^4 - 0.26303s^3 - 0.58516s^2 + 1.51024s + 0.50445}{s^5 + 7.50903s^4 + 26.50548s^3 + 10.37360s^2 + 2.62826s + 0.55518} \quad (12)$$

表 2

质量指标		原模型 (五阶)	降阶模型 (二阶)
积分指标	ITAE	221.6	218.3
积分指标	IAE	12.96	12.70
积分指标	ITSE	51.92	49.51
积分指标	ISE	5.64	5.41
过渡时间	T_s (分)	61.6	62.5
上升时间	T_r (分)	7.1	7.2
峰值时间	T_p (分)	12.3	12.4
超调量	MP(%)	59.8	57.7
衰减比	DR	3.20	3.15
稳态值		0.90862	0.90862

为了说明图论技术处理纯滞后的能力，特将图 3 的 14 至 17 节点用二阶 Pade' 近似表示纯滞后的网络换成准确数学表达，即 $e^{-(2/3)s}$ ，再使用频率响应算法二程序求得闭环 1→13 通道频率响应，与二阶 Pade' 近似表达纯滞后的频率响应对照见表 3。

(2) 比较复杂的信号流图人工简化十分困难，使用图论程序更具实用意义。例如某精馏塔系统方框图如图 4 所示。有三个输入端、三个输出端。将图 4 转换成信号流图后有二十

表 3

频率	准确值		二阶 Pade' 近似值	
	幅值 R	相位 θ (度)	幅值 R	相位 θ (度)
0.01	0.90981	-1.04473	0.90981	-0.99820
0.02	0.91343	-1.93879	0.91341	-2.00236
0.03	0.91952	-2.95249	0.91946	-3.01856
0.04	0.92818	-3.96569	0.92805	-4.05318
0.05	0.93951	-5.00327	0.93930	-5.11297
0.06	0.95371	-6.07335	0.95338	-6.20529
0.07	0.97096	-7.18282	0.97050	-7.33830
0.08	0.99156	-8.34058	0.99094	-8.52122
0.09	1.01586	-9.55762	1.01502	-9.76465
0.10	1.04427	-10.84655	1.04317	-11.08098
0.20	1.76217	-33.56828	1.74599	-34.17944
0.30	2.25193	-128.23956	2.21234	-127.10539
0.40	0.77428	-169.39304	0.77479	-168.70152
0.50	0.40429	-181.28224	0.40530	-180.86311
0.60	0.25754	-188.20132	0.25827	-187.91429
0.70	0.18227	-193.38139	0.18280	-193.17473
0.80	0.13780	-197.68416	0.13819	-197.53305
0.90	0.10905	-201.43790	0.10934	-201.32816

二个基本回路，应用图论程序在PDP11/70机上仅需10秒左右即可求出传递矩阵全部9个通道的传递函数。表4只列出主对角线上三个通道传递函数的数值结果。

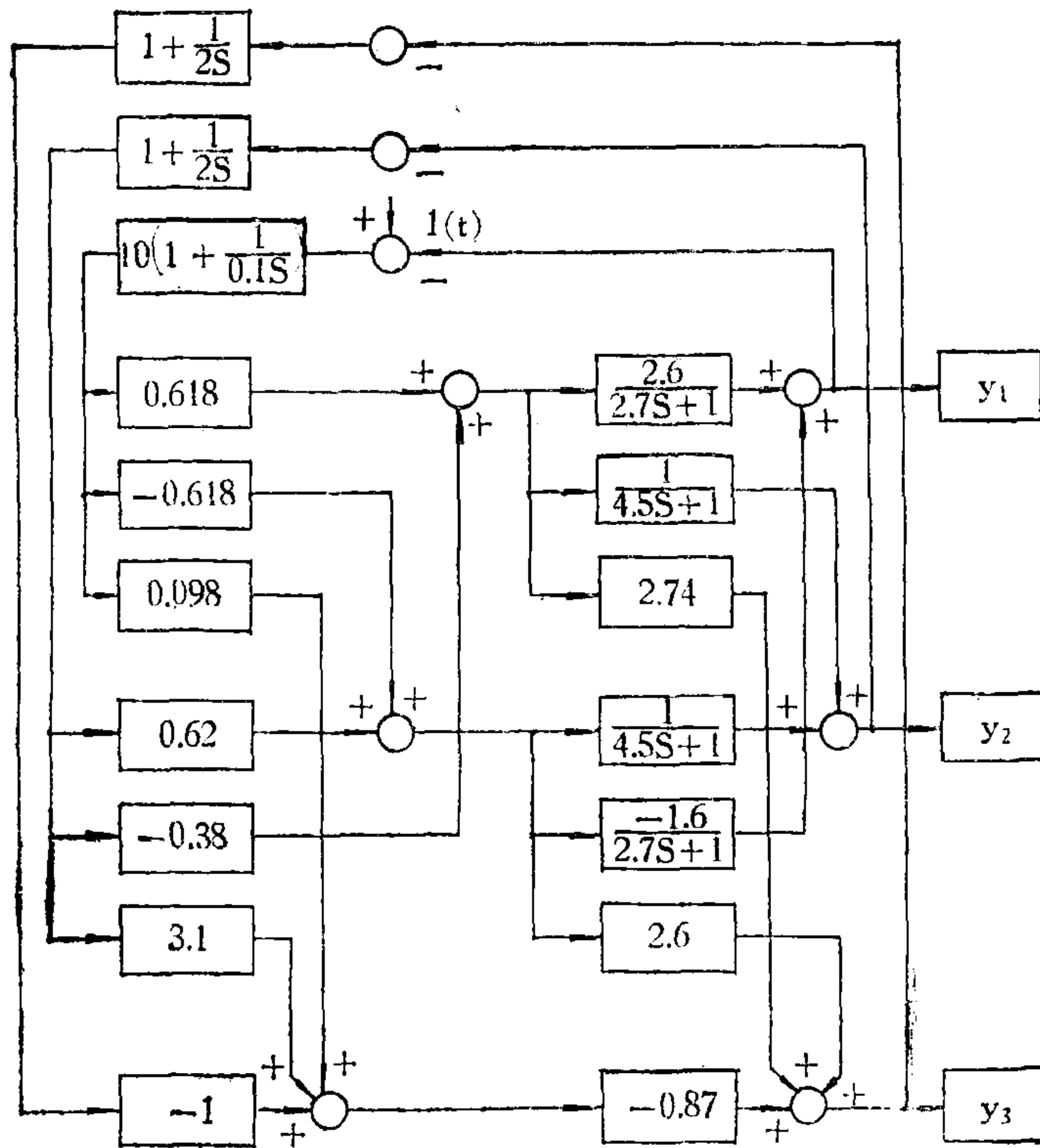


图4 某精馏塔系统方框结构图

表4

s的幂次	$P_{11}(s)$	$P_{22}(s)$	$P_{33}(s)$	$\Delta(s)$
0	0.092539	0.091791	0.091780	0.091780
1	2.01724	1.24844	1.80229	2.013284
2	18.51524	6.19616	14.79091	18.51213
3	87.07797	13.34848	60.60999	87.16953
4	206.40806	10.97019	120.71283	206.92678
5	199.55737	1.12786	96.13373	201.20646
6	17.97690	0.099732	9.87609	20.72792
7	0.00000	0.00000	0.87000	1.87000

四、结 论

(1) 在控制系统CAD中，应用图论技术可以直接从信号流图或方框图入手，具有直观、简单快速等优点，为分析、设计复杂控制系统提供了有力手段。

(2) 图论程序沟通了线性SISO系统及MIMO系统分析程序。

(3) 将图论程序与频率响应程序联合，可以得到复杂网络中每一支路都可为高阶并有纯滞后环节的精确算法，为大规模网络求取频率响应创造了条件。

参 考 文 献

- (1) Henley, Ernest, J. and Williams, R. A., Graph Theory in Modern Engineering, Academic Press, New York and London, 1973.
- (2) Jiménez, A. and Aracil, R., Program Package for Control Systems Design Based on the Solution of Signal Flow-graphs, CAD of Control Systems, Proc. of the IFAC Symposium, Zurich, Switzerland, (1979), 253-258.
- (3) Johnson, Donald B., Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph, SIAM J. Comput., 4 (1975), No.1, 77-84.
- (4) Mateti Prabhaker and Deo Narsingh, On Algorithms for Enumerating All Circuits of a Graph, SIAM J. Comput., 5 (1976), No.1, 90-99.
- (5) 吴重光、沈承林, 简明高效频率响应算法, 控制理论与应用, 1 (1984), No. 4, 22-27.

GRAPH THEORY TECHNIQUE AND ITS APPLICATIONS IN CAD OF CONTROL SYSTEMS

Wu Chongguang Shen Chenglin
(Beijing Institute of Chemical Technology)

Abstract

In this paper, a graph theory based computer program is described. Several of its applications are provided for CAD of control systems. System simulation, reduction of complex signal flow-graphs, multivariable frequency-response method, model reduction and stability criterion are included.

All these programs are written in FORTRAN-IV and run on a PDP 11/70 minicomputer.