

Runge-Kutta公式绝对稳定域的计算 及其在系统仿真中的应用

熊光楞 宋安澜
(清华大学)

摘 要

本文提出了一种较简便的计算Runge-Kutta公式稳定域的算法,并应用此算法结合参数寻优方法,对RK F公式进行了计算机寻优,得到了改进的RK F4(5)公式,该公式在连续系统数字仿真中应用效果较好。

一、概 述

Runge-Kutta法(简称RK法)在连续系统的数字仿真中应用广泛。研究表明^[1],对于非Stiff或轻度Stiff系统,当右端函数计算不十分复杂时,RK法在计算量、存贮量、精度等方面均优于其它一些算法。特别是基于Runge-Kutta-Fehlberg公式的RK F45程序,被认为是上述情况下最有效的程序。

RK公式有两个主要特性指标,一是其绝对稳定域,二是其截断误差。对于RK公式绝对稳定域的计算,目前尚无有效的通用算法。为了便于对RK公式稳定域的研究,作者设计了一种计算RK公式稳定域的算法。该算法可计算任何显式RK公式的稳定域,易于用程序实现,计算较简便。作为应用实例,作者利用这个算法并结合最优化方法,以稳定域最大、截断误差最小为目标函数,进行了RK公式的寻优,找到了一些稳定域较大、截断误差较小的RK公式。改进的RK F4(5)公式便是其中之一。该公式已编成仿真程序,实际应用中效率高于RK F45程序。

二、RK公式的一般形式及其稳定域

给定微分方程

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (1)$$

相应的RK公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s c_i f_i, \\ f_i = f(t_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} f_j) \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

其中h为步长; s为方法的级数. 式中系数由以下阵列描述:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & & & & & & \\
 a_2 & b_{21} & & & & & \\
 a_3 & b_{31} & b_{32} & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 a_s & b_{s1} & b_{s2} & \cdots & \cdots & b_{s, s-1} & \\
 \hline
 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{s-1} & c_s
 \end{array}$$

以上系数应满足一系列条件方程.

下面讨论RK公式的绝对稳定域. 对齐次方程

$$\dot{y} = \lambda y \quad (\lambda \text{ 为复数}) \tag{3}$$

用公式(2)求解, 得

$$y_{n+1} = P(h\lambda) y_n, \tag{4}$$

其中P(hλ)为一多项式. 欲使算法收敛, 必须 |P(hλ)| < 1. 令z = hλ, 则满足|P(z)| < 1的区域即RK公式的稳定域.

一般对于s级、q阶的RK公式有

$$P(z) = \sum_{i=0}^q \frac{z^i}{i!} + \sum_{j=q+1}^s \mu_j z^j, \tag{5}$$

其中μ_j是RK系数的函数, 故当s > q时, RK公式的稳定域与RK系数的选择是密切相关的. 适当选择RK系数, 有可能得到较大的稳定域和较小的截断误差.

三、RK公式稳定域的计算

得到RK公式稳定域的最一般的方法是: 将 $\dot{y} = \lambda y$ 直接代入RK公式, 求得P(z)多项式的系数, 然后再求解复数方程

$$|P(z)| = 1, \tag{6}$$

即可得RK公式的稳定边界^[2]. 这种方法即要算P(z)的系数, 又要解复数方程, 当级数高时, 计算极为繁琐. Shampine等提出过一种改进方法^[3], 不必计算P(z)的系数, 但计算过程中有复数运算, 计算仍较麻烦.

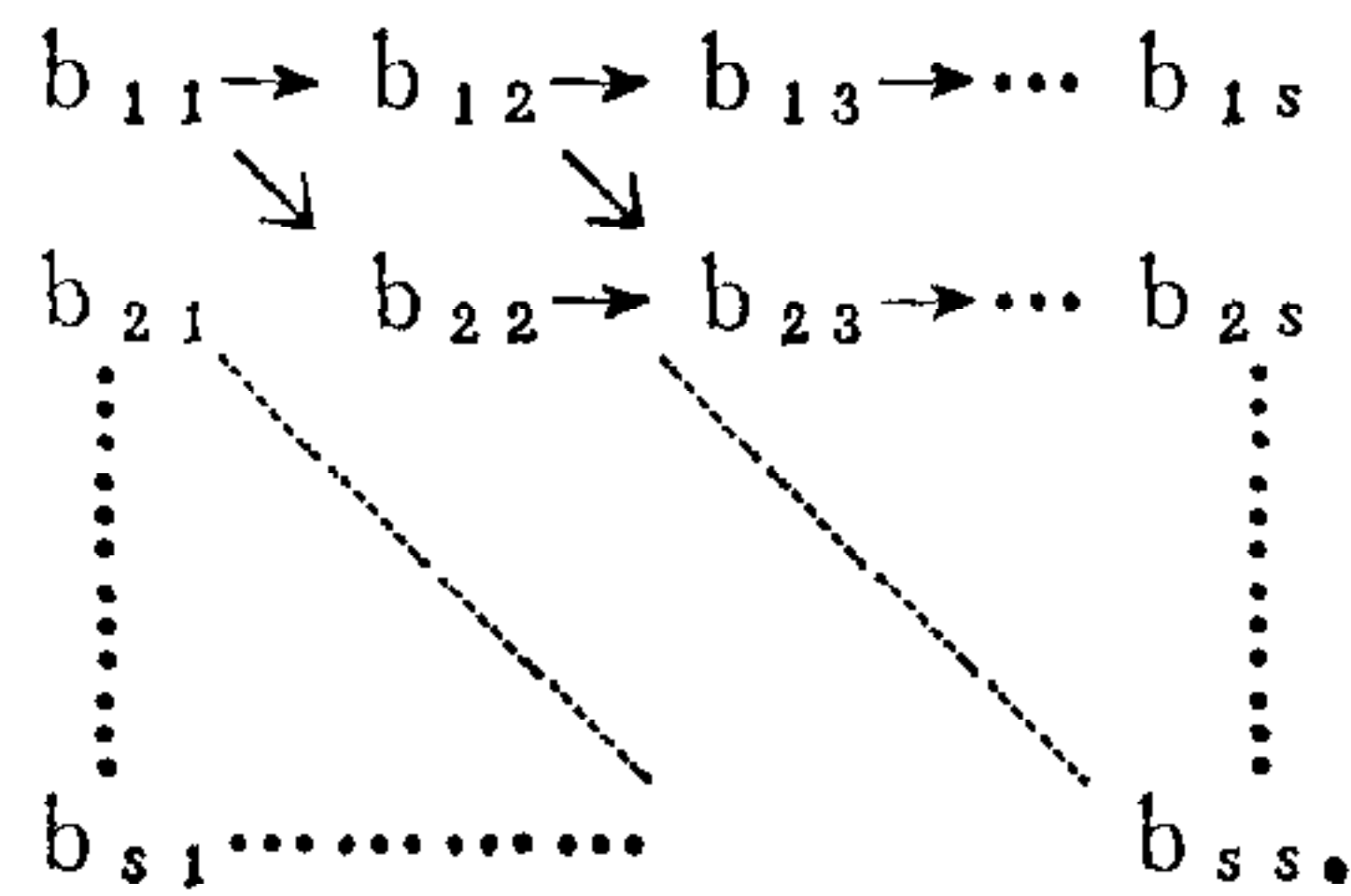
为了便于计算, 本文给出一种RK公式稳定域的计算方法, 其思路是: 先算得P(z)的系数, 再将复数方程(6)转化为一系列实数方程, 然后套用一般实方程求根程序, 逐点算出稳定边界. 具体算法如下:

算法一. 由RK公式(2)得到多项式P(z)的系数

$$\text{设} \quad P(z) = \sum_{k=0}^s p_k z^k, \tag{7}$$

$$\text{则} \quad p_i = \sum_{j=1}^s c_j b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \tag{8}$$

其中b_{ij}由下表算出:



即

$$\begin{cases} b_{1j} = 1; & j = 1, 2, \dots, s \\ b_{ij} = \sum_{k=i-1}^{j-1} b_{i,k} \cdot b_{i-1,k}; & \begin{matrix} j = i, i+1, \dots, s \\ i = 2, 3, \dots, s \end{matrix} \end{cases} \quad (9)$$

表中对角线以下部分即元素的RK系数。

算法二. 由 $P(z)$ 求出RK公式的稳定边界

令 $z = re^{j\theta}$, 代入 (7) 式, 若给定 θ , 根据式 (6) 可得一个关于 r 的实系数方程

$$|P(re^{j\theta})|^2 = 1. \quad (10)$$

求得上式的最小正根 r , 就是 θ 方向的稳定边界. 取不同的 θ , 并求出相应的 r , $re^{j\theta}$ 的轨迹即 RK 公式的稳定边界. 由于 RK 法的稳定域关于实轴对称, 且只关心 $\text{Re}(\lambda h) \leq 0$ 部分, 故只需让 θ 从 90° 变到 180° 即可. 计算步骤如下:

1) 令 $\theta = 90^\circ$.

2) 求出 $|P(re^{j\theta})|^2 = \sum_{k=0}^{2s} q_k r^k$ 的系数 q_k :

$$q_k = \begin{cases} 2 \sum_{j_1=1}^{\frac{k}{2}-1} p_{j_1} p_{k-j_1} \cos(k-2j_1)\theta + p_{\frac{k}{2}}^2, & (k \text{ 为偶数}), \\ 2 \sum_{j_1=1}^{\frac{k-1}{2}} p_{j_1} p_{k-j_1} \cos(k-2j_1)\theta, & (k \text{ 为奇数}), \end{cases}$$

$$j_1 = \begin{cases} 0 & (k \leq s) \\ k-s & (k > s) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, s.$$

3) 用一般求根方法求出

$$\sum_{k=0}^{2s} q_k r^k = 1 \text{ 的最小正根.}$$

4) $\theta = \theta + \Delta\theta$. $\Delta\theta$ 可按光滑程度的要求而定, 一般可取 1° .

5) 若 $\theta < 180^\circ$, 转步骤 2), 否则计算结束.

四、应用实例

如前所述, RK F45 是很有效的仿真程序. 但 Fehlberg 在文献 [4] 中提出的 RK F4(5) 公式实际上有一簇, 其中有两个参数 α_2 和 α_5 , 选取不同的 α_2 和 α_5 便可得到不同的计算公式. 利用本文提出的稳定域算法, 结合截断误差的计算, 作者对 RK F4(5) 公式进行了计算机寻优, 得出了一个改进公式 (简称 RK FI), 见表 4-1.

表4-1 RKFI公式的系数

k	a _k	λ	b _{kλ}						
			1	2	3	4	5	6	
1	0		0						
2	$\frac{6}{25}$		$\frac{6}{25}$						
3	$\frac{9}{25}$		$\frac{9}{100}$	$\frac{27}{100}$					
4	$\frac{45}{52}$		$\frac{215235}{281216}$	$-\frac{793125}{281216}$	$\frac{410625}{140608}$				
5	1		$\frac{2707351}{354780}$	$-\frac{125}{4}$	$\frac{467000}{17739}$	$-\frac{151424}{88695}$			
6	$\frac{3}{5}$		$-\frac{29178611}{11497500}$	$\frac{45}{4}$	$-\frac{23525}{2628}$	$\frac{2923024}{2874375}$	$-\frac{621}{3500}$		
c _k (4阶)			$\frac{9928}{88695}$	0	$\frac{296875}{567648}$	$\frac{35152}{88695}$	$-\frac{1}{32}$	0	
\hat{c}_k (5阶)			$\frac{61}{540}$	0	$\frac{390625}{756864}$	$\frac{1827904}{4759965}$	$-\frac{23}{896}$	$\frac{125}{9936}$	

在实用程序中, 一般是以五阶公式向前积分的, 故本文以五阶公式的稳定域和截断误差为主要指标。五阶公式的截断误差首项为

$$E_5 = \left(\sum_{j=1}^{20} T_{5j} \psi_j \right) h^6,$$

其中 T_{5j} 为误差系数。定义截断误差系数

$$T_5 = \sum_{j=1}^{20} T_{5j}^2,$$

显然 T_5 越小越好。RKFI和RK F4(5)*2的对比见表4-2。

表4-2 RKFI和RK F4(5)*2公式比较

	RKFI	RK F4(5)*2
实轴上稳定半径 r_R	4.781008	3.677685
截断误差系数 T_5	7.1932×10^{-6}	1.12606×10^{-5}

由表4-2可知RKFI的稳定半径比原RK F4(5)*2公式大, 而截断误差则小。

作者曾利用RKFI对轻度 Stiff 系统进行了仿真计算, 结果证明较原有 RK F4(5)*2公式有效。实例如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq 4$$

仿真结果见表4-3.

表4-3 RKFI和RKF4(5)#2计算效率比较

参数	方法	控制精度	右端函数求值次数	
			10^{-3}	10^{-5}
a = 10	RKFI		95	150
	RKF4(5)#2		112	155
a = 50	RKFI		292	352
	RKF4(5)#2		375	424
a = 100	RKFI		548	610
	RKF4(5)#2		699	753

结 论

本文提出的计算RK公式绝对稳定域的算法为研究RK法提供了一种有效工具。应用此算法结合寻优方法得出的RKFI公式在截断误差和稳定域上均优于原有RKF4(5)#2公式。另外，应用此算法还可以找到一些大稳定域的RK公式，用于判断系统的Stiff性等（另文介绍）。

参 考 文 献

- [1] Shampine, L. F. et al., Solving Non-stiff Ordinary Differential Equations—The State of the Art, SIAM Rev. **18** (1976), P376—411.
- [2] Gear, C.W., 常微分方程初值问题的数值解法, 科学出版社, 1978.
- [3] Shampine, L.F. and Watts, H.A., Practical Solution of Ordinary Differential Equations by Runge-Kutta Method, SAND-76-0585, DEC 1976.
- [4] Fehlberg, E., Low-order Classical Runge-Kutta Formulas with Step-size Control and their Application to Some Heat Transfer Problems, NASA Report TR R-315, 1969.

THE COMPUTATION OF THE ABSOLUTE STABILITY REGION
FOR RUNGE-KUTTA FORMULA AND ITS APPLICATIONS
TO SYSTEM SIMULATION

Xiong Guangleng Song Anlan
(Tsinghua University)

Abstract

A simple method for computing the stability region of Runge-Kutta formula is proposed. By optimizing the RK formula via the proposed method and optimization technique, an improved RKFI formula is obtained, which is proved to be effective when applied to digital simulation of continuous systems.