

一类线性最优滤波的多级分块分解算法

罗 续 成

(北京遥测研究所)

摘 要

本文将 B. Friedland 的递推滤波器中的常值偏差处理法推广为一般时变偏差情况下的多级分块分解算法,研究了偏差状态维数变化时实现多级分块分解的可能性,得到了相应的结果,并说明了多级分块分解算法的工程意义。

一、引 言

工程上应用 Kalman 滤波存在估计精度和计算量的矛盾。建模准确可以提高估计精度,但模型中所含时变或常值偏差就多,计算量也相应增大,为此,需探求高维模型下减少计算量的方法。

B. Friedland^[1] 曾提出一种递推滤波中的常值偏差处理法。他证明受未知偏差 \mathbf{b} 影响的状态 \mathbf{x} 的最优估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 为

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + V_x \hat{\mathbf{b}}.$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}$ 是假定 $\mathbf{b} = 0$ 时 \mathbf{x} 的估计; $\hat{\mathbf{b}}$ 是 \mathbf{b} 的最优估计; V_x 是求 $\tilde{\mathbf{x}}$ 过程中求得的变换矩阵。这样就将一个高维估计器分解成了两个低维估计器。不少人对这种方法做了进一步研究,文献 [3—10] 反映了这方面的主要成果。这些成果都还局限于对估计器作两级分解处理,而状态向量则按“待求状态”和“偏差状态”划分。

文献[2]提出了协方差矩阵的对称分块表示法,并应用这种表示法在一般时变偏差条件下对 Friedland 的偏差处理法给出了一种解析证明。本文主要目的是在文献[2]的基础上将上述偏差处理法推广为按一步转移矩阵子块对应状态作分解的多级分块分解算法,并研究了状态维数变化时实现多级分块分解的可能性,最后说明了这种算法的工程意义。

二、多级分块分解算法

1. 问题描述

考虑动态系统

$$\mathbf{X}(k+1) = A(k)\mathbf{X}(k) + E\xi(k), \quad (2.1)$$

及其量测方程为

$$\mathbf{z}(k) = C(k)\mathbf{X}(k) + \eta(k). \quad (2.2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1,l-1} & A_{1l} \\ 0 & A_{22} \cdots A_{2,l-1} & A_{2l} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots A_{l-1,l-1} & A_{l-1,l} \\ 0 & 0 \cdots 0 & A_{ll} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{x}_{l-1} \\ \mathbf{x}_l \end{bmatrix},$$

$$E = [I \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$C = [c_{11} \quad c_{12} \cdots c_{1,l-1} \quad c_{1l}].$$

子向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_l$ 的维数分别为 n_1, n_2, \cdots, n_l , $\sum_{i=1}^l n_i = n$. I 是维数为 n_1 的单位阵.

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\xi(k), \xi(j)] &= Q(k)\delta_{kj}, \\ \text{Cov} [\eta(k), \eta(j)] &= R(k)\delta_{kj}, \\ \text{Cov} [\xi(k), \eta(j)] &= 0. \end{aligned} \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{如 } k = j; \\ 0, & \text{如 } k \neq j. \end{cases}$$

为 Kronecker delta 函数. 系统的显著特点是系数矩阵 A 是分块的上三角形阵, 且仅第一子向量 \mathbf{x}_1 的数学模型含噪声. 实际系统中, \mathbf{x}_1 就是待求状态, 而 $\mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_l$ 则是源于系统动态模型或量测模型的偏差状态.

为便于叙述, 引入下列符号:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{x}_1, \quad A_0 = A_{11}, \quad B_0 = A_{12}, \\ \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \end{bmatrix}, \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\ \mathbf{X} &= \mathbf{X}_{l-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{l-2} \\ \mathbf{x}_l \end{bmatrix}, \quad A = A_{l-1} = \begin{bmatrix} A_{l-2} & B_{l-2} \\ 0 & A_{ll} \end{bmatrix}, \\ E_1 &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad E = E_{l-1} = \begin{bmatrix} E_{l-2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_0 &= C_{11}, \quad C_1 = [C_0 \quad c_{12}], \quad \cdots, \quad C = C_{l-1} = [C_{l-2} \quad c_{1l}]. \end{aligned}$$

为简化符号, 将 $(k+1)$ 用 $(+)$ 表示, $(k-1)$ 用 $(-)$ 表示, 即 $\mathbf{X}(+) \triangleq \mathbf{X}(k+1)$, $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}(-) \triangleq \mathbf{X}(k-1)$, 其余类推. 这样, (2.1), (2.2) 式可表示为

$$\mathbf{X}(+) = A\mathbf{X} + E\xi, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{z} = C\mathbf{X} + \eta. \quad (2.4)$$

对 \mathbf{X} 可构成最优估计器如下:

$$\hat{\mathbf{X}} = A(-)\hat{\mathbf{X}}(-) + K(\mathbf{z} - CA(-)\hat{\mathbf{X}}(-)), \quad (2.5)$$

$$K = PC^T(CPC^T + R)^{-1}. \quad (2.6)$$

或

$$K = TC^TR^{-1}, \quad (2.7)$$

$$P = A(-)T(-)A^T(-) + EQ(-)E^T, \quad (2.8)$$

$$T = P - KCP. \quad (2.9)$$

这里 $\hat{\mathbf{X}}$ 是 \mathbf{X} 的线性最优估计； K 为滤波增益阵； P ， T 分别为 \mathbf{X} 的预测和滤波误差协方差阵。

2. 第一次分解

将误差协方差阵分块如下

$$P = \begin{bmatrix} P_{l-2} & P_{l-2,l} \\ P_{l-2,l}^T & P_{xl} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_{l-2} & T_{l-2,l} \\ T_{l-2,l}^T & T_{xl} \end{bmatrix}.$$

注意， P_{l-2} ， P_{xl} 分别表示 \mathbf{X}_{l-2} ， \mathbf{x}_l 的预测误差协方差； $P_{l-2,l}$ 表示 \mathbf{X}_{l-2} ， \mathbf{x}_l 的预测误差互协方差。 T 的下脚意义相同。本文后面 P ， T ， K 下脚意义如下： i 表示“ \mathbf{X}_i 的”； x_i 表示“ \mathbf{x}_i 的”，而 ij 表示“ \mathbf{X}_i ， \mathbf{x}_j 的”。据文[2]的结果， P ， T 子块可表示为

$$\begin{cases} P_{l-2,l} = U_{l-1}P_{xl}, \\ P_{l-2} = \tilde{P}_{l-2}^{l-2} + U_{l-1}P_{xl}U_{l-1}^T, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} T_{l-2,l} = F_{l-1}T_{xl}, \\ T_{l-2} = \tilde{T}_{l-2}^{l-2} + F_{l-1}T_{xl}F_{l-1}^T. \end{cases} \quad (2.11)$$

将(2.10)，(2.11)式代入(2.5)–(2.9)式，便可将关于 \mathbf{X} 的估计器分解成两个小估计器。假设除 \mathbf{X}_{l-2} 外的状态(即 \mathbf{x}_l)全为零，则 \mathbf{X}_{l-2} 的估计 $\tilde{\mathbf{X}}_{l-2}^{l-2}$ 为

$$\tilde{\mathbf{X}}_{l-2}^{l-2} = A_{l-2}(-)\tilde{\mathbf{X}}_{l-2}^{l-2}(-) + \tilde{K}_{l-2}^{l-2}\mathbf{r}_{l-1}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{r}_{l-1} = \mathbf{z} - C_{l-2}A_{l-2}(-)\tilde{\mathbf{X}}_{l-2}^{l-2}(-), \quad (2.13)$$

$$\tilde{P}_{l-2}^{l-2} = A_{l-2}(-)\tilde{T}_{l-2}^{l-2}(-)A_{l-2}^T(-) + E_{l-2}Q(-)E_{l-2}^T, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{l-2}^{l-2} &= \tilde{P}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^T(R + C_{l-2}\tilde{P}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^T)^{-1} \\ &= \tilde{T}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^TR^{-1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$T_{l-2}^{l-2} = \tilde{P}_{l-2}^{l-2} - \tilde{K}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}\tilde{P}_{l-2}^{l-2}. \quad (2.16)$$

上述式中上角 $l-2$ 表示“假设除 \mathbf{X}_{l-2} 以外的状态全为零条件下”。本文后面所用上角意义相同。 \tilde{K}_{l-2}^{l-2} ， \tilde{P}_{l-2}^{l-2} ， \tilde{T}_{l-2}^{l-2} 分别表示假定 $\mathbf{x}_l = 0$ 条件下 \mathbf{X}_{l-2} 估计的滤波增益阵、预测和滤波误差协方差阵。而 \mathbf{x}_l 的最优估计 $\hat{\mathbf{x}}_l$ 为

$$\hat{\mathbf{x}}_l = A_{ll}(-)\hat{\mathbf{x}}_l(-) + K_l\mathbf{r}_l, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_{l-1} - H_{l-1}\hat{\mathbf{x}}_l(-), \quad (2.18)$$

$$G_{l-1}(-) = A_{l-2}(-)F_{l-1}(-) + B_{l-2}(-), \quad (2.19)$$

$$H_{l-1} = C_{l-2}G_{l-1}(-) + c_{1l}A_{ll}(-), \quad (2.20)$$

$$F_{l-1} = (G_{l-1}(-) - \tilde{K}_{l-2}^{l-2}H_{l-1})A_{ll}^{-1}(-), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} T_{xl} &= A_{ll}(-)[T_{xl}(-) - T_{xl}(-)H_{l-1}^T(R + C_{l-2}\tilde{P}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^T \\ &\quad + H_{l-1}T_{xl}(-)H_{l-1}^T)^{-1}H_{l-1}T_{xl}(-)]A_{ll}^T(-), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$K_{xl} = T_{xl}J_{l-1}^TR^{-1}, \quad (2.23)$$

$$J_{l-1} = C_{l-2}F_{l-1} + c_{1l}, \quad (2.24)$$

有关系

$$K = \begin{bmatrix} K_{l-2} \\ K_{xl} \end{bmatrix}, \quad K_{l-2} = \tilde{K}_{l-2}^{l-2} + F_{l-1}K_{xl}.$$

而

$$\hat{X}_{l-2} = \tilde{X}_{l-2}^{l-2} + F_{l-1}\hat{x}_l. \quad (2.25)$$

3. 多级分解

将 \tilde{X}_{l-2}^{l-2} 与 \hat{X} 两估计器列表比较如下。由表 1 可见,这两个估计器递推公式相同,

表 1 \tilde{X}_{l-2}^{l-2} 与 \hat{X} 估计器比较

	\tilde{X}_{l-2}^{l-2} 估计器	\hat{X} 估计器
滤波估计	$\tilde{X}_{l-2}^{l-2} = A_{l-2}(-)\tilde{X}_{l-2}^{l-2}(-) + \tilde{K}_{l-2}^{l-2}r_{l-1}$ $r_{l-1} = z - C_{l-2}A_{l-2}(-)\tilde{X}_{l-2}^{l-2}(-)$	$\hat{X} = A(-)\hat{X}(-) + Kr_l$ $r_l = z - CA(-)\hat{X}(-)$
滤波增益	$\tilde{K}_{l-2}^{l-2} = \tilde{P}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^T(R + C_{l-2}\tilde{P}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^T)^{-1}$ $= \tilde{T}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}^TR^{-1}$	$K = PC^T(R + CPC^T)^{-1}$ $= TC^TR^{-1}$
预测误差协方差阵	$\tilde{P}_{l-2}^{l-2} = A_{l-2}(-)\tilde{T}_{l-2}^{l-2}(-)A_{l-2}^T(-) + E_{l-2}Q(-)E_{l-2}^T$	$P = A(-)T(-)A^T(-) + EQ(-)E^T$
滤波误差协方差阵	$\tilde{T}_{l-2}^{l-2} = \tilde{P}_{l-2}^{l-2} - \tilde{K}_{l-2}^{l-2}C_{l-2}\tilde{P}_{l-2}^{l-2}$	$T = P - KCP$
结构参数	$A_{l-2} = \begin{bmatrix} A_{l-3} & B_{l-3} \\ 0 & A_{l-1,l-1} \end{bmatrix}$ $C_{l-2} = [C_{l-3} \quad C_{1,l-1}]$ $E_{l-2} = \begin{bmatrix} E_{l-3} \\ 0 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} A_{l-2} & B_{l-2} \\ 0 & A_{ll} \end{bmatrix}$ $C = [C_{l-2} \quad C_{ll}]$ $E = \begin{bmatrix} E_l \end{bmatrix}$

而结构参数相似。再注意到 \tilde{P}_{l-2}^{l-2} , \tilde{T}_{l-2}^{l-2} 仍可作对称分块,且其子块与 (2.10), (2.11) 式有相似的相关表示,如果把 \hat{X} 估计器的所有参数用 \tilde{X}_{l-2}^{l-2} 估计器的相应参数代替,就可以避免冗长的数学推导而实现对 \tilde{X}_{l-2}^{l-2} 估计器的分解。结果如下:

假设除 X_{l-3} 以外状态(即 x_{l-1} , x_l)全为零条件下 X_{l-3} 的估计 \tilde{X}_{l-3}^{l-3} 为

$$\tilde{X}_{l-3}^{l-3} = A_{l-3}(-)\tilde{X}_{l-3}^{l-3}(-) + \tilde{K}_{l-3}^{l-3}r_{l-2}, \quad (2.26)$$

$$r_{l-2} = z - C_{l-2}A_{l-3}(-)\tilde{X}_{l-3}^{l-3}(-), \quad (2.27)$$

$$\tilde{P}_{l-3}^{l-3} = A_{l-3}(-)\tilde{T}_{l-3}^{l-3}(-)A_{l-3}^T(-) + E_{l-3}Q(-)E_{l-3}^T, \quad (2.28)$$

$$\tilde{K}_{l-3}^{l-3} = \tilde{P}_{l-3}^{l-3}C_{l-3}^T(R + C_{l-3}\tilde{P}_{l-3}^{l-3}C_{l-3}^T)^{-1}$$

$$= \tilde{T}_{l-3}^{l-3}C_{l-3}^TR^{-1}, \quad (2.29)$$

$$T_{l-3}^{l-3} = \tilde{P}_{l-3}^{l-3} - \tilde{K}_{l-3}^{l-3}C_{l-3}\tilde{P}_{l-3}^{l-3}. \quad (2.30)$$

假定 $x_l = 0$, 则 x_{l-1} 的估计 \tilde{x}_{l-1}^{l-1} 为

$$\tilde{x}_{l-1}^{l-1} = A_{l-1,l-1}(-)\tilde{x}_{l-1}^{l-1}(-) + \tilde{K}_{xl-1}^{l-1}r_{l-1}, \quad (2.31)$$

$$r_{l-1} = r_{l-2} - H_{l-2}\tilde{x}_{l-1}^{l-1}(-), \quad (2.32)$$

$$G_{l-2}(-) = A_{l-3}(-)F_{l-2}(-) + B_{l-3}(-), \quad (2.33)$$

$$H_{l-2} = C_{l-3}G_{l-2}(-) + C_{1,l-1}A_{l-1,l-1}(-), \quad (2.34)$$

$$F_{l-2} = (G_{l-2}(-) - \tilde{K}_{l-3}^{l-3}H_{l-2})A_{l-1,l-1}^{-1}(-), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-1} = & A_{l-1,l-1}(-) [\tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-2}(-) - \tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-2}(-) H_{l-2}^T (R + C_{l-3} \tilde{P}_{l-3}^{l-3} C_{l-3}^T \\ & + H_{l-2} \tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-2}(-) H_{l-2}^T)^{-1} H_{l-2} \tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-2}(-)] A_{l-1,l-1}^T(-), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\tilde{K}_{x_{l-1}}^{l-2} = \tilde{T}_{x_{l-1}}^{l-2} J_{l-2}^T R^{-1}, \quad (2.37)$$

$$J_{l-2} = C_{l-3} F_{l-2} + c_{1,l-1}. \quad (2.38)$$

而

$$\tilde{K}_{l-2}^{l-2} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{l-3}^{l-2} \\ \tilde{K}_{x_{l-1}}^{l-2} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K}_{l-3}^{l-2} = \tilde{K}_{l-3}^{l-3} + F_{l-2} \tilde{K}_{x_{l-1}}^{l-2},$$

$$\tilde{X}_{l-3}^{l-2} = \tilde{X}_{l-3}^{l-3} + F_{l-2} \tilde{x}_{l-1}^{l-2}. \quad (2.39)$$

作第二次分解运算后,注意到

$$C_{l-2} \tilde{P}_{l-2}^{l-2} C_{l-2}^T = C_{l-3} \tilde{P}_{l-3}^{l-3} C_{l-3}^T + H_{l-2} \tilde{T}_{l-1}^{l-2}(-) H_{l-2}^T,$$

得

$$\begin{aligned} T_{xl} = & A_{ll}(-) [T_{xl}(-) - T_{xl}(-) H_{l-1}^T (R + C_{l-3} \tilde{P}_{l-3}^{l-3} C_{l-3}^T \\ & + H_{l-2} T_{x_{l-1}}(-) H_{l-2}^T + H_{l-1} T_{xl}(-) H_{l-1}^T)^{-1} \\ & \times H_{l-1} T_{xl}(-)] A_{ll}^T(-). \end{aligned} \quad (2.40)$$

显然,由(2.26)–(2.30)式组成的 \tilde{X}_{l-3}^{l-2} 条件估计器还可进行分解,而且对分解的结果还可根据同样原理进行分解.经 $l-1$ 次分解后,得除 X_0 (即 x_1) 以外状态全为零条件下 x_1 的估计 \tilde{x}_1^0 为

$$\tilde{x}_1^0 = \tilde{X}_0^0 = A_0(-) \tilde{X}_0^0(-) + \tilde{K}_0^0 r_1, \quad (2.41)$$

$$r_1 = z - C_0 A_0(-) \tilde{X}_0^0(-), \quad (2.42)$$

$$\tilde{P}_0^0 = A_0(-) \tilde{T}_0^0(-) A_0^T(-) + Q(-), \quad (2.43)$$

$$\tilde{K}_0^0 = \tilde{P}_0^0 C_0^T (C_0 \tilde{P}_0^0 C_0^T + R)^{-1}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{P}_0^0 - \tilde{K}_0^0 C_0 \tilde{P}_0^0. \quad (2.45)$$

而除 X_1 以外状态全为零条件下 x_2 的估计 \tilde{x}_2^1 为

$$\tilde{x}_2^1 = A_{22}(-) \tilde{x}_2^1(-) + \tilde{K}_{x_2}^1 r_2, \quad (2.46)$$

$$r_2 = r_1 - H_1 \tilde{x}_2^1(-), \quad (2.47)$$

$$G_1(-) = A_0(-) F_1(-) + B_0(-), \quad (2.48)$$

$$H_1 = C_0 G_1(-) + c_{12} A_{22}(-), \quad (2.49)$$

$$F_1 = (G_1(-) + \tilde{K}_0^0 H_1) A_{22}^{-1}(-), \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{x_2}^1 = & A_{22}(-) [\tilde{T}_{x_2}^1(-) - \tilde{T}_{x_2}^1(-) H_1^T (R + C_0 \tilde{P}_0^0 C_0^T \\ & + H_1 \tilde{T}_{x_2}^1(-) H_1^T)^{-1} H_1 \tilde{T}_{x_2}^1(-)] A_{22}^T(-), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\tilde{K}_{x_2}^1 = \tilde{T}_{x_2}^1 J_1^T R^{-1}, \quad (2.52)$$

$$J_1 = C_0 F_1 + c_{12}. \quad (2.53)$$

有

$$\tilde{K}_1^1 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_0^1 \\ \tilde{K}_{x_2}^1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_0^1 = \tilde{K}_0^0 + F_1 \tilde{K}_{x_2}^1$$

而

$$\tilde{x}_1^1 = \tilde{x}_1^0 + F_1 \tilde{x}_2^1. \quad (2.54)$$

与(2.40)式推证相似,有

$$\tilde{T}_{x_j}^{j-1} = A_{jj}(-) \left[\tilde{T}_{x_j}^{j-1}(-) - \tilde{T}_{x_j}^{i-1} H_{j-1}^T \left(R + c_{11} \tilde{P}_0^0 c_{11}^T + \sum_{i=1}^{j-1} H_i \tilde{T}_{x_{i+1}}^i(-) H_i^T \right)^{-1} \cdot H_{j-1} \tilde{T}_{x_j}^{j-1}(-) \right] A_{jj}^T(-) \quad (j = 2, 3, \dots, l). \quad (2.55)$$

4. 计算方法

上述过程实际上就是多次实施两级分解,每次分解都按矩阵 A 分块所对应的状态进行。这就是分块分解。由于每次分解都把一个维数较高的向量估计器分解为两个维数较低的向量估计器,经 $l-1$ 次分解便把原估计器分解为 l 个小估计器。如果 x_1, x_2, \dots, x_l 在初始时刻不存在先验的相关性,则不难得多次分解过程中引入的参数 $F_i, \tilde{T}_{i+1}^i, \tilde{x}_{i+1}^i$ 的初值为 $F_i(0) = 0, \tilde{T}_{i+1}^i(0) = T_{i+1}(0), \tilde{x}_{i+1}^i(0) = \hat{x}_{i+1}(0), (i = 0, 1, \dots, l-1)$ 。

由此得到这类线性最优估计的一种算法:第一步,假设除 x_1 以外的状态全为零,用(2.41)–(2.45)式计算 \hat{x}_1^0 ;第二步,假设除 x_1, x_2 外的状态全为零,利用第一步的结果和 x_2 的先验信息,按(2.46)–(2.52)式计算 \hat{x}_2^1 ,并据(2.53)式算出 \tilde{x}_1^1 。其余步骤类推。最后第 l 步,用(2.17)–(2.24)式计算 \hat{x}_l ,并用上一步求得的 \tilde{X}_{l-2}^{l-2} 按(2.25)式算出 X_{l-2} ,即 x_1, x_2, \dots, x_{l-1} 的最优估计。

这种算法可以理解为在实际量测 z 不变的条件下,逐次改变系统动态模型,逐次对“待求状态”估计进行修正的过程。图 1 画出了 l 级分块分解算法的并行计算流程。

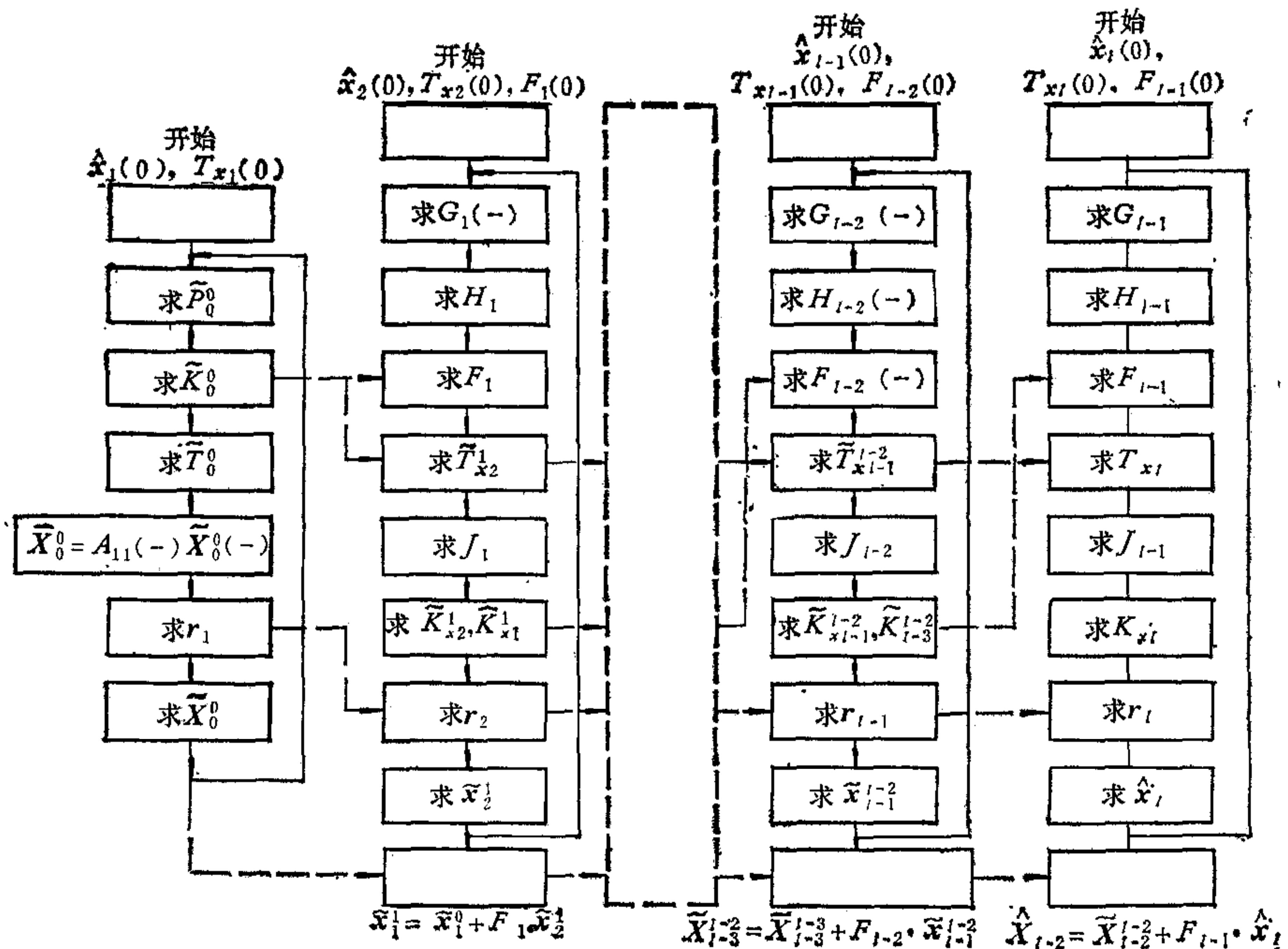


图 1

三、状态维数变化的处理

若系统状态原为 n 维,从某时刻起增加了 n_a 维状态 \mathbf{x}_a , 增维后的系统为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(+) \\ \mathbf{x}_a(+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \xi, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z} = [C \ C_a] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{x}_a \end{bmatrix} + \eta. \quad (3.2)$$

\mathbf{x}_a 的特点是它的动态模型是确定性的, 只与 \mathbf{x}_a 本身有关, 但它却可能影响 \mathbf{X} 的动态模型, 也可能影响量测模型.

这种情况下, 假定 $\mathbf{x}_a = 0$ 时 \mathbf{X} 的估计就是增维前 \mathbf{X} 的最优估计 $\hat{\mathbf{X}}$, 而增加 \mathbf{x}_a 后 \mathbf{X} 的最优估计 $\hat{\mathbf{X}}_a$ 为

$$\hat{\mathbf{X}}_a = \hat{\mathbf{X}} + F_a \hat{\mathbf{x}}_a. \quad (3.3)$$

其中

$$\hat{\mathbf{x}}_a = A_a(-) \hat{\mathbf{x}}_a(-) + K_a \mathbf{r}_a, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} - H_a \hat{\mathbf{x}}_a(-), \quad (3.5)$$

$$G_a = A(-) F_a(-) + B_a(-), \quad (3.6)$$

$$H_a = C G_a(-) + C_a A_a(-), \quad (3.7)$$

$$F_a = (G(-) - K H_a) A_a^{-1}(-), \quad (3.8)$$

$$T_a = A_a(-) [T_a(-) - T_a(-) H_a^T (R + C P C^T + H_a T_a(-) H_a^T)^{-1} \cdot H_a T_a(-)] A_a^T(-), \quad (3.9)$$

$$K_a = T_a J_a^T R^{-1}, \quad (3.10)$$

$$J_a = C F_a + C_a. \quad (3.11)$$

其中, \mathbf{r} 为计算 $\hat{\mathbf{X}}$ 过程中算得的残差; K, P, T 分别为 $\hat{\mathbf{X}}$ 的滤波增益、先验和后验协方差阵.

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - C A(-) \hat{\mathbf{X}}(-). \quad (3.12)$$

可见, 当增加状态 \mathbf{x}_a 时, 仅增加 \mathbf{x}_a 本身估计的递推运算, 并考虑 \mathbf{x}_a 对 \mathbf{X} 的影响而对 $\hat{\mathbf{X}}$ 附加一修正项, 便得新情况下 \mathbf{X} 的最优估计 $\hat{\mathbf{X}}_a$. 原 $\hat{\mathbf{X}}$ 估计器的计算流程完全保留下来, 作为 $\hat{\mathbf{X}}_a$ 估计器的一部分.

反之, 如果(3.1), (3.2)式表示原估计器模型, 从某时刻起系统减少了状态 \mathbf{x}_a , 成为

$$\mathbf{X}(+) = A \mathbf{X} + E \xi, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{z} = C \mathbf{X} + \eta. \quad (3.14)$$

这时, (3.3)式中的 $\hat{\mathbf{X}}$ 便成为新情况下 \mathbf{X} 的最优估计. 可见只要从原估计器中去掉 $\hat{\mathbf{x}}_a$ 的递推运算, 原来假定 $\mathbf{x}_a = 0$ 时的 \mathbf{X} 的估计便是新情况下的最优估计.

Mendel 和 Washburn 提出了状态维数变化时的处理方法^[10], 相比可知, 用多级分块分解算法处理状态维数变化的情况更方便些. 本方法一般适用于时变参数的情况, 且在状态维数变化时仅需考虑增加或去掉变化状态的递推关系.

四、多级分块分解算法的工程意义

首先,多级分块分解算法一般可减少线性最优滤波的计算量,因而可以提高数据处理速度,减小舍入误差,提高估计精度。

表 2 给出了“五十维状态、十维量测”模型的乘除法次数。表中“二级(10, 40)”表示二级分解算法,第一级为 10 维状态,第二级为 40 维状态;“247760(7630, 240130)”表示第一级分解计算量为 7630,第二级为 240130,总计算量为 247760,其余类推。可以看出,多级分块分解算法减少计算量的效果是明显的。实用中估计器维数可达十几乃至五十、七十维^[11,12,13],而待求状态往往仅有几维,是适合采用多级分块分解算法的。

表 2 “50 维状态, 10 维量测”模型

算 法	乘 除 法 次 数
经典算法	314830
二级(10, 40)	247760(7630, 240130)
三级(10, 20, 20)	142930(7630, 54330, 80730)
五级(10, 10, 10, 10, 10)	135550(7630, 16730, 24830, 34930, 51430)

多级分块分解算法之所以能减少滤波估计计算量,一方面是因为它把大的矩阵运算多次分解为较小的矩阵运算;另一方面还在于它并不对整个向量 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_l^T)^T$ 作递推估计,而仅分别对子向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l$ 作条件估计 $\hat{\mathbf{x}}_1^0, \hat{\mathbf{x}}_2^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_l^{l-1}$ 。一般说来,后者计算量比前者要少得多。

其次,由多级分块分解算法得到的小估计器各自具有相对的独立性。这就提供了一种可能性:据各状态子向量的重要性、变化快慢等,采用不同采样速率,以进一步减少计算量,并保证达到要求的估计精度。

另外,由于有关系

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_1 + F\hat{\mathbf{x}}_2,$$

工程上可由 F 方便地确定偏差 \mathbf{x}_2 对 \mathbf{x}_1 估计的影响。对定常系统

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \xi(k),$$

$$\mathbf{z}(k) = [C_{11} \ C_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \eta(k),$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $F(k+1) = F(k) = F$, $\tilde{K}_1(k+1) = \tilde{K}_1(k) = k_1$, 得

$$FA_{22} - (I - \tilde{K}_1 H)A_{11}F = (I - \tilde{K}_1 C_{11})A_{12} + \tilde{K}_1 C_{12}A_{22}.$$

这是关于 F 元素的线性联立方程组。解这个方程组便可确定稳态 F 。对参数变化范围确定的时变系统,也可仿上述过程确定偏差的影响范围。

本文工作完成于北京控制工程研究所。整个过程得到杨嘉墀老师的悉心指导和帮助,并与陈义庆同志作了多次有益的讨论,谨致谢忱。

参 考 文 献

- [1] Friedland, B., Treatment of Bias in Recursive Filtering, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-14 (1969), No. 4, 359—364.
- [2] 罗续成, 协方差矩阵的对称分块表示及其应用, 即将发表.
- [3] Tracker, E. C. and Lee, C. C., Linear Filtering in the Presence of Time-Varying Bias, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-17(1972), No. 6, 789—790.
- [4] Agee, W. S. and Turner, R. H., Optimal Estimation of Measurement Bias, AD-753961.
- [5] Lin, J. L. and Sage, A. P., Algorithms for Discrete Sequential Maximum Likelihood Bias Estimation and Associated Error Analysis, *IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet*, SMC-1 (1974), No. 4, 314—324.
- [6] Godbole, S. S., Comparison of Friedland's and Lin-Sage's Bias Estimation Algorithm, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-19(1974), No. 2, 143—145.
- [7] Bierman G. J., The Treatment of Bias in the Square-root Information Filter Information Filter/ Smoother, *Journal of Optimization Theory and Application*, 16(1975), No. 1/2, 165—178.
- [8] Tanaka, A., Parallel Computation in Linear Discrete Filtering, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-20 (1975), No. 4, 573—575.
- [9] Friedland, B., Recursive Filtering in the Presence of Bias with Irreducible Uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-21(1976), No. 6, 789—790.
- [10] Mendel, J. M. and Washburn, H. D., Multistage Estimation of Bias States in Linear Systems, *Int. J. Control*, 28(1978), No. 4, 511—524.
- [11] Campbell, B. H. and Coffey, T. C., Digital Attitude Reference System (DARS), *Navigation: Journal of the Institute of Navigation*, 20(1973), No. 1.
- [12] Barton, R. and Ljungwe A., Trajectory Reconstruction Utilizing Kalman Filter Estimation Theory, AIAA Paper No. 71—933.
- [13] Bennis A. Van Idere, A Kalman Filter Design for the space shuttle Crbiter Inertial Measuring Unit During Deorbit/Reentry Using Global Positioning System Satellite Information, AD/A-055496.

MULTISTAGE PARTITIONING DECOMPOSITION ALGORITHM FOR A CATEGORY OF LINEAR OPTIMAL FILTERING

LUO XUCHENG

(Beijing Research Institute of Telemetry)

ABSTRACT

In this paper, B. Friedland's method of bias treatment in recursive filter is extended to the multistage partitioning decomposition algorithm under the condition of general time-varying bias. The possibility to implement multistage partitioning decomposition is discussed when the dimensions of states are varied. The corresponding result is obtained. The engineering significance of multistage partitioning decomposition algorithm is presented.