指数串联系统可靠性的非随机化最优置信下限

周源泉
（北京强度与环境研究所）

摘　要

本文对定总试验时间截尾（简称定总截尾）及任务时间不同的单元，给出了指数串联系统可靠性的非随机化最优置信下限及其性质。

自Burnett&Wales[1]之后，指数串联系统的可靠性问题引起了广泛注意。对定数截尾问题，文献〔2〕，〔3〕给出了系统失效率的一致最精确无偏置信上限。文献〔4〕、〔5〕给出了非最优精确置信限。本文对定总截尾任务时间不同的单元，讨论了指数串联系统可靠性的非随机化最优置信下限问题。

一、系统可靠性的非随机化最优置信下限

指数串联系统可靠性R由m个单元的可靠性R_j或失效率λ_j及任务时间t_{0j}确定

$$R=\prod_{j=1}^{m}R_j=e^{-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j t_{0j}}.$$

单元j作总试验时间为τ_j的定总截尾，这包括有替换定时截尾及无替换定总截尾、后者将n_j台单元j投试，z_j台于t_{ji}失效（$Z_j<n_j$，$i=\overline{1,z_j}$），另n_j-z_j台试至$\left(\tau_j-\sum\limits_{i=1}^{z_j}t_{ji}\right)\Big/(n_j-z_j)$截尾。等效任务数$\eta_j=\tau_j/t_{0j}$。根据已知向量$\vec{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_m)$及失效数随机向量$\mathscr{z}=(z_1,\cdots,z_m)$的观测值$\mathscr{z}_i=(z_1,\cdots,z_m)$，确定置信度$\gamma$下系统可靠性的非随机化最优置信下限$R_L(\mathscr{z}_i,\ \gamma)$。

据文献〔6〕，〔7〕，$R_L(\mathscr{z}_i,\ \gamma)$应满足三个条件：

1）精确性。寻找数$R_L(\mathscr{z}_i,\ \gamma)$的一个集合，使

$$P\{R\geqslant R_L(\mathscr{z}_i,\ \gamma)\}\geqslant\gamma，对一切0<R<1成立； \tag{1}$$

2）正则性，先对$\mathscr{z}$排序，令$\mathscr{z}_k=(z_{1k},z_{2k},\cdots,z_{mk})$，$k=1,2,\cdots,i$。正则性即当$R_L(\mathscr{z}_{i_1},\ \gamma)\leq R_L(\mathscr{z}_{i_2},\ \gamma)$，则$i_1>i_2$；　　（2）

3）最优性。$R_L(\mathscr{z}_i,\ \gamma)$应尽可能地大，　　（3）

本文于1982年4月30日收到，1984年6月12日收最后修改稿。

定总截尾出现x_j次失效的概率为。

$$p\{z_j=x_j|\lambda_j,\tau_j\}=\frac{(\lambda_j\tau_j)^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_j\tau_j},\begin{cases}x_j=0,1,2,\cdots, & \text{有替换定时截尾。}\\ x_j=0,1,\cdots,n_j-1, & \text{无替换定总截尾。}\end{cases}$$

故　$p\{z_j=x_j|R_j,\eta_j\}=\dfrac{R_j^{\eta_j}(-\eta_j\ln R_j)^{x_j}}{x_j!}$，$x_j$的取值范围同上，则$R_j$的非随机化最优置信下限$R_{j,L}$满足

$$\sum_{x_j=0}^{z_j}\frac{R_{j,L}^{\eta_j}(-\eta_j\ln R_j)^{x_j}}{x_j!}=1-\gamma。\tag{4}$$

文献〔6〕给出了任意离散分布参数的任意函数的非随机化最优置信下限的一般公式，由此得定总截尾任务时间不同的指数单元串联系统的$R_L(\boldsymbol{z}_i,\gamma)$

$$\begin{cases}R_L(\boldsymbol{z}_i,\gamma)=\inf\left\{\prod\limits_{j=1}^{m}R_j\ \middle|\ \sum\limits_{k=1}^{i}A_k=1-\gamma\right\},\\ A_k=\prod\limits_{j=1}^{m}\dfrac{R_j^{\eta_j}(-\eta_j\ln R_j)^{z_{jk}}}{z_{jk}!}。\end{cases}\tag{5}$$

求$R_L(\boldsymbol{z}_i,\gamma)$要遇到两个问题，一是$\sum\limits_{j=1}^{m}z_j$较大时计算量非常大，二是失效向量$\boldsymbol{z}$的排序问题，这里参考两项串联系统失败向量的三种排序法[6,8]进行。

Ⅰ　ML方法。基于R的ML估计$\hat{R}=\exp\{-\sum\limits_j z_j/\eta_j\}$。当$\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{z_{ji_1}}{\eta_j}\leqslant\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{z_{ji_2}}{\eta_j}$，则$\boldsymbol{z}_{i_1}<\boldsymbol{z}_{i_2}$。

Ⅱ　Buehler方法。令$R_{L,k}=\exp\left\{-\sum\limits_{j=1}^{m}\chi^2_{2z_{jk}+2,\gamma_j}\Big/2\eta_j\right\}$，式中$\gamma_j=\gamma^{1/m}$，$\chi^2_{f,\gamma_j}$是自由度为f的$\chi^2$-分布的$\gamma_j$-下侧分位数，则按$R_{L,k}$的递减序列对$\boldsymbol{z}$排序。

Ⅲ　LP方法。令$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{0}$。已知$\boldsymbol{z}_1$，则$\boldsymbol{z}_2$是给出最大的$R_L(\boldsymbol{z}_2,\gamma)$的向量，已知$\boldsymbol{z}_1$，$\boldsymbol{z}_2$，则$\boldsymbol{z}_3$是给出最大的$R_L(\boldsymbol{z}_3,\gamma)$的向量。$\boldsymbol{z}_4$，…等依此类推。

计算表明，三种排序法给出的R_L是依次非降的：$R_L(\text{Ⅰ})\leqslant R_L(\text{Ⅱ})\leqslant R_L(\text{Ⅲ})$。前两种方法有台阶现象（如图1所示），即给定$z_j$，若任一单元的$\eta_j$增加，$R_L$应非降，但这三种方法在某些$\eta_j$处$R_L$突然下降，这显然不合理，且仅在台阶附近，三种排序法的R_L才不相等。LP方法比前两种方法台阶数减少，有的情况下，则不存在台阶（见下例）。但其计算量比另两种排序法要大得多。

例　$m=3$，$z_1=2$，$z_2=z_3=0$，$\eta_1=50$，$\eta_2=\eta_3=c\eta_1$，$0.06<c<1$，计算$\gamma=0.9$时三种排序法的R_L。对ML方法，$c\geqslant0.5$，有$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z}_2=(1,0,0)$，$\boldsymbol{z}_3=(0,1,0)$，$\boldsymbol{z}_4=(0,0,1)$，$\boldsymbol{z}_5=(2,0,0)$；$c<0.5$，有$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z}_2=(1,0,0)$，$\boldsymbol{z}_3=(2,0,0)$。对Buehler方法，上述两种排序结果在$c=0.53$处转换，对LP方法，上述两种排序结果在$c=0.74$处转换，三者的$R_L$如图1所示。

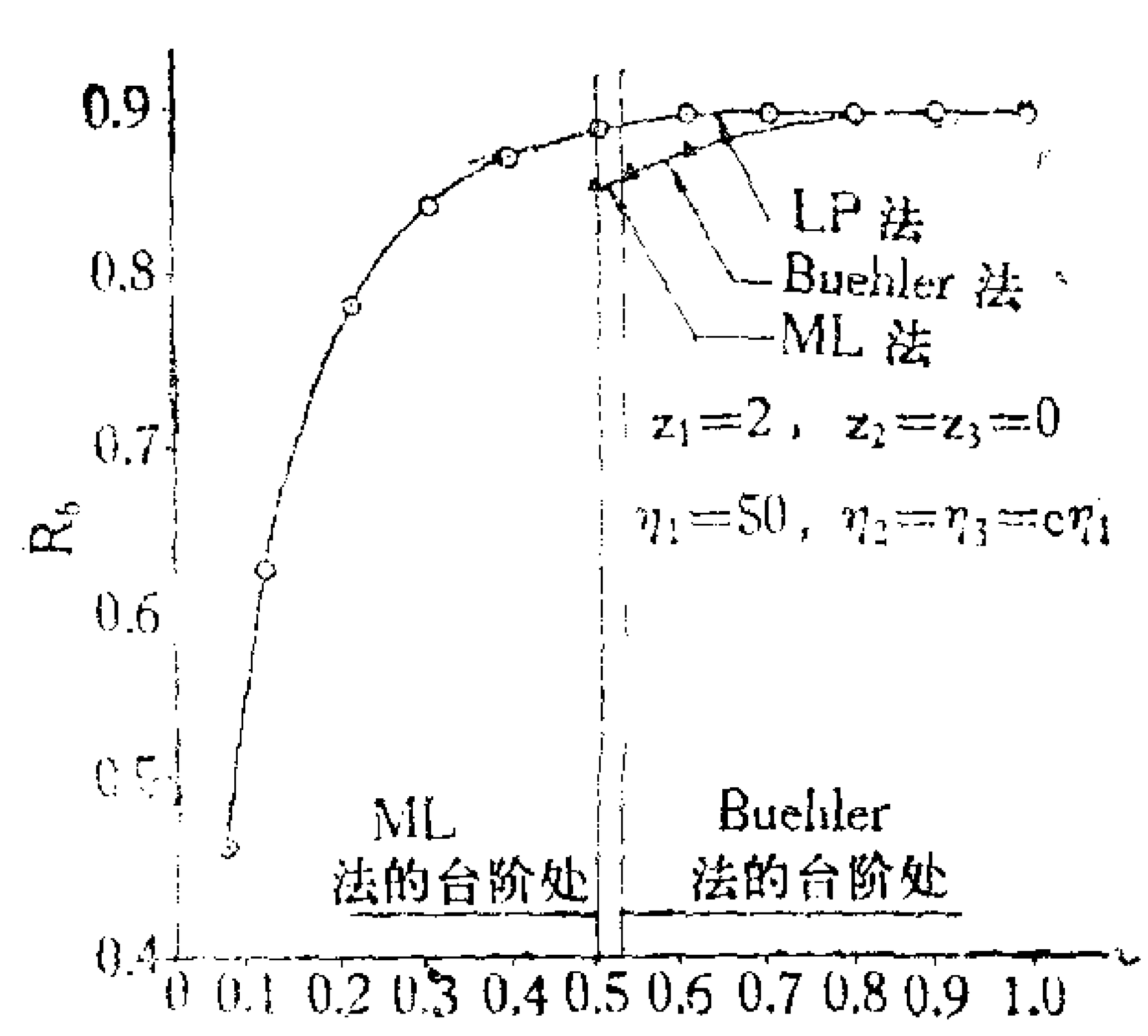

图1　三种排序法的系统可靠性的非随机化最优置信下限

二、非随机化最优置信下限的几个性质

定理1. 若指数单元的定总截尾结果为 $(z_j, \eta_j)=(z_j,\eta_0)$，$j=\overline{1,m}$，则相当于串联系统作了定总截尾 $(z,\eta)=\left(\sum\limits_{j=1}^{m} z_j,\eta_0\right)$.

证明. 诸单元作定总截尾且 $\eta_j=\eta_0$，$j=\overline{1,m}$，则单元失效数 z_j 实现值 x_j 之和恰为 $\sum\limits_{j=1}^{m} z_j$ 的概率为

$$\sum_{\sum x_j=\sum\limits_{j=1}^{m} z_j}\prod_{j=1}^{m}\frac{R_j^{\eta_0}(-\eta_0 \ln R_j)^{x_j}}{x_j!}\quad \frac{R^{\eta_0}(-\eta_0\ln R)^{\sum\limits_{j=1}^{m} z_j}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} z_j\right)!}=P\left\{z=\sum_{j=1}^{m} z_j\,\middle|\,R,\ \eta_0\right\}.$$

事实上，此定理即Poisson分布卷积定理的变形.

定理2. 若$z_j=0$，$j=\overline{1,m}$，则 $(z,\eta)=(o,\eta_{(1)})$，$\eta_{(1)}=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\eta_j$.

证明. 对任一排序有$R_L=\inf\left\{\prod\limits_{j=1}^{m} R_j\,\middle|\,\prod\limits_{j=1}^{m} R_j^{\eta_j}=1-\gamma\right\}$. 不妨设$\eta_j=\eta_{(1)}$，$j=\overline{1,m'}$，记$\Delta\eta_j=\eta_j-\eta_{(1)}$，$j=\overline{m'+1,m}$，则

$$\prod_{j=1}^{m} R_j^{\eta_j}=R^{\eta_{(1)}}\prod_{j=m'+1}^{m} R_j^{\Delta\eta_j}=1-\gamma.$$

令 $R_j\to 1$，$j=\overline{m'+1,m}$，得R的极小值，故$R_L^{\eta_{(1)}}=1-\gamma$. 与 (4) 式比较，定理得证.

定理3. 若单元的定总截尾结果为 (z_1, η_1)，(z_2, η_2)，$z_2=0$，$\eta_2\geqslant\eta_1$，则 $(z,\eta)=(z_1, \eta_1)$.

证明. ∵ $\tilde{z}_1=(z_1, 0)$,

∴ $$R_L=\inf\left\{\prod_{j=1}^{m} R_j\,\middle|\,\sum_{k=1}^{1}\prod_{j=1}^{2}\frac{R_j^{\eta_j}(-\eta_j\ln R_j)^{z_{jk}}}{z_{jk}!}=1-\gamma\right\}.$$

记R_1的非随机化最优置信下限为$R_{1,L}$，取$R_2=1$，有 $\sum\limits_{x=0}^{z_1}\dfrac{R^{\eta_1}(-\eta_1\ln R)^x}{x!}=1-\gamma$，故 $R_L=\inf\{R\}\leqslant R_{1,L}$.

给定 η_1，z_1，z_2，当η_2降到η_1时，由定理1，系统可靠性非随机化最优置信下限变为$R_{1,L}$. 又因R_L对η_2非减，则$R_L\geqslant R_{1,L}$. 综上得证.

定理4. 若$(z_j,\eta_j)=(z_j,\eta_0)$，$j=\overline{1,m'}$；$(z_j,\eta_j)=(o,\eta_j\geqslant\eta_0)$，$j=\overline{m'+1,m}$，则 $(z,\eta)=\left(\sum\limits_{j=1}^{m} z_j,\eta_0\right)$.

证明. 将单元 $j=\overline{1,m'}$，$j=\overline{m'+1,m}$ 分别串联成新单元 I 及 II. 由定理1

$(z_1,\eta_1)=\left(\sum_{j=1}^{m}z_j,\eta_0\right)$，由定理2 $(z_{\pi},\eta_{\pi})=(o,\eta_0)$，再用定理1，$(z,\eta)=\left(\sum_{j=1}^{m}z_j,\eta_0\right)$，得证。

当取没有验前知识的验前分布[9]，可用Bayes方法证明上述结果，限于篇幅，这里从略，

实践中最感兴趣的场合之一是 $(z_1\neq o,\eta_1)$，$(z_2,\eta_2)=(o,c\eta_1)$，$c<1$时，R_L随C如何变化，计算表明，它有一个有趣的性质，即存在一个与z_1及γ有关的C_0，当$C\geqslant C_0$时，$R_L=R_{1,L}$。对ML方法，若$z_1\geqslant 2$，则$C_0=\chi_{2z_1,\gamma}/\chi^2_{2z_1+2,\gamma}$；当$z_1=1$时，$C_0(\gamma=0.8)=0.7497$，$C_0(\gamma=0.9)=0.7955$。对LP方法，其$C_0$略小于ML方法，例如，$\gamma=0.9$，$z_1=2$，$C_0(ML)=0.73$，$C_0(LP)=0.70$。

由于非随机化最优置信下限计算颇繁，已发展了多种近似限，对此拟另撰文讨论。

参 考 文 献

〔1〕 Burnett, T. L. & B. A. Wales, System Reliability Confidence Limits, Proc, 7th Nat. Symp. R & Q. C. (1961), 118—128.

〔2〕 Lentner, M. M. & R. J. Buehler, JASA, **58** (1968), 670—677.

〔3〕 El Mawaziny, A. H., Chi-square Distribution Theory with Application to Reliability Problem, Ph. D. thesis, Iowa State Univ., 1965.

〔4〕 Lieberman, G. J. & S. M. Ross, JASA, **66** (1971), 837—840.

〔5〕 Sarkar, T. K., Technometrics, **13** (1971), 535—546.

〔6〕 Buehler, R. J., JASA, **52** (1957), 482—493.

〔7〕 Preston, P. F., ADAO47533, 1976.

〔8〕 Winterbottom, A., JASA, **69** (1974)., 782—788.

〔9〕 周源泉，数学学报，23卷 (1980)，359—371.

NONRANDOMIZED OPTIMUM LOWER CONFIDENCE LIMIT FOR THE RELIABILITY OF EXPONENTIAL SERIES SYSTEM

Zhou Yuanquan

(Beijing Institute of Strength and Environment)

Abstract

In this paper, the nonrandomized optimum lower confidence limit for the reliability of exponential series system are given for the units which are truncated by the total test times and have various mission times, Their properties are discussed as well.