# 观测器回路的最优性条件

王大海
(河北省科学院自动化研究所)

**摘 要**

线性定常系统的反馈控制 $u=Kx$ 若用观测器来实现，则整个回路可看作一复合线性系统的一种状态反馈. 此状态反馈若要构成此复合系统的二次性能指标最优调节器，矩阵K本身应满足一定条件. 寻找这些条件的问题就是本文提出的观测器线性系统二次型最优状态反馈逆问题. 这是一般最优调节器逆问题向观测器回路的推广，本文得到一组充分必要条件和几个简便的必要性判据. 文中还对某种可镇定系统的最优调节器逆问题作了一些探讨.

## 一、引 言

由 $Kx$-观测器理论可知，对线性定常系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx,\quad x\in \mathbf{R}^n,\quad u\in \mathbf{R}^m,\quad y\in \mathbf{R}^l, \tag{1.1}$$

$$\dot{z}=Fz+Gy+Nu,\quad w=Ez+My,\quad z\in \mathbf{R}^p,\quad w\in \mathbf{R}^m, \tag{1.2}$$

如果 (A, B) 可控， (F, E) 可观测，且存在矩阵 $K\in \mathbf{R}^{m\times n}$，使系统 (1.2) 为 (1.1) 的一个 $Kx$-观测器，则系统 (1.1) 和 (1.2) 各系数矩阵之间满足如下关系式：存在矩阵 $P\in \mathbf{R}^{p\times n}$，有

$$PA-FP=GC,\quad K=EP+MC,\quad N=PB,\quad \sigma(F)\subset \mathbf{C}^- \tag{1.3}$$

其中，$\sigma(F)$ 表示F的特征值集；$\mathbf{C}^-$ 和 $\mathbf{C}^+$ 分别表示复数平面的左半开平面和右半开平面. 此时有

$$\lim_{t\to\infty}\{w(t)-Kx(t)\}=0. \tag{1.4}$$

当系统 (1.1) 的反馈控制信息 $u=Kx$ 不能全部从可测输出 $y$ 直接得到时，常取 $Kx$ 的估计值 $w$ 代替. 即令

$$u=w=(MC,\ E)\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

此时可把系统 (1.1) 和 (1.2) 看作一复合系统：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ GC & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B\\ N\end{pmatrix}u,\quad \begin{pmatrix}y\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & 0\\ MC & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

这是一个可镇定但不完全可控的线性定常系统. 而 (1.5) 和 (1.6) 式构成一种由输出状态

本文于1983年8月29日收到.

反馈形成的闭环系统.

**定义1.1.** 如果存在实数矩阵H和R，使得 $\left(\begin{bmatrix} A & O \\ GC & F \end{bmatrix}, H\right)_{n+p}$ 可检测，R 正定，且反馈（1.5）式对（1.6）式使二次性能指标$J_e$达到最小，这里

$$J_e \triangleq \int_0^\infty \left\{ (x^\tau, z^\tau) H^\tau H \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + u^\tau R u \right\} dt, \tag{1.7}$$

则称式（1.5）使（1.6）为最优系统.

由此可知，如果存在实矩阵$H_0$和$R_0$，使得$(A, H_0)_n$可检测，$R_0$正定，而$u = Kx$对系统（1.1）使二次性能指标J达到最小，则称$u = Kx$使（1.1）式为最优系统. 这里

$$J \triangleq \int_0^\infty (x^\tau H_0^\tau H_0 x + u^\tau R_0 u) dt. \tag{1.8}$$

此时常称 $u = Kx$ 为（1.1）式的一个最优调节器. 研究使（1.1）式成为最优系统的矩阵K本身应满足的条件问题，称为线性系统二次型最优状态反馈逆问题，简称LQSF逆问题. 把LQSF逆问题推广到观测器回路（1.5）—（1.6）式，则成为观测器线性系统二次型最优状态反馈逆问题，简称OLQSF逆问题. 主要研究使（1.5）—（1.6）式成为最优系统的矩阵K本身所应具备的条件. 这一研究对于需用观测器的系统是颇为有用的.

LQSF 逆问题是 Kalman 1964 年[1] 首先提出来的，并对单输入系统给出充分必要条件. 此条件被Anderson于1966年[2]推广到多输入系统. 进一步研究LQSF逆问题的还有 Jameson 和 Kreindler[3] 等许多学者. 但所有这些研究都是对完全可控系统进行的，故不适用于系统（1.6），不能直接用于本文提出的OLQSF逆问题.

Suda 和 Fujii 1981 年[4]研究了什么样的指标（1.8）得到的最优调节器Kx能够使（1.5）—（1.6）为最优系统，该研究结果对OLQSF逆问题很有启发和帮助.

## 二、本文主要结果

**定理2.1.** 如果$(A, B)_n$可控，且有

$$\operatorname{rank}\{K\} = \operatorname{rank}\{B\} = m, \tag{2.1}$$

则任一Kx-观测器（1.2）与（1.1）式组成的观测器回路（1.5）—（1.6）式皆为最优系统的充分必要条件是如下三式同时成立：

$$\sigma(A + BK) \subset \mathbf{C}^- \tag{2.2}$$

存在正定矩阵$R \in \mathbf{R}^{m \times m}$，使得

$$R \leqslant [I - K(-j\omega I - A)^{-1}B]^\tau R[I - K(j\omega I - A)^{-1}B], \ ^\forall \omega \in \mathbf{R} \tag{2.3}$$

$$\operatorname{normal\ rank}\{[I - K(-sI - A)^{-1}B]^\tau R[I - K(sI - A)^{-1}B] - R\} = m, \tag{2.4}$$

其中 $j \triangleq \sqrt{-1}$. 证明请见附录A4.

对于单输入系统，这个定理可叙述得更简单一些：$(B \to \mathbf{b},\ K \to \mathbf{k}^\tau)$.

**推论2.2.** 如果$(A, \mathbf{b})_n$可控，$\mathbf{k} \neq 0$，则任一$\mathbf{k}^\tau x$-观测器（1.2）与（1.1）式组成的观测器回路（1.5）—（1.6）皆为最优系统的充分必要条件是：

$$\sigma(A + \mathbf{b}\mathbf{k}^\tau) \subset \mathbf{C}^-, \text{ 且} 1 < |1 - \mathbf{k}^\tau (j\omega I - A)^{-1}\mathbf{b}|, \ ^\forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

单输入系统的（2.5）式是易于验证的. 由此可进一步研究如下课题：1）镇定并任意配

置 $(A+bk')$ 的$n-1$个极点的最小阶最优观测器的设计；2）镇定并任意配置$(A+bk')$的 $n-1$ 个极点且适当配置特征向量组的最优观测器回路的设计. … 但是，多输入系统的条件式（2.3），（2.4）判断计算较繁，还得多次寻找 R 矩阵，故应研究一些简便的必要性判据. 附录的引理A1说明，所有能使（1.1）式成为最优系统的K阵必要条件，都可当做使观测器回路（1.5）—（1.6）为最优系统的K阵必要条件. 而前者的结果很多. 如下命题完全是文献〔3〕中结果的推广，故略去证明.

**命题2.3.** 使观测器回路（1.5）—（1.6）为最优系统的矩阵K必然有

$$\operatorname{rank}\{KB\}=\operatorname{rank}\{K\}. \tag{2.6}$$

KB的初等因子皆为一次. (2.7)

KB特征根皆为实数非正. (2.8)

**命题2.4.** 如果式（2.6），（2.7）和（2.8）成立，则存在对称正定阵R和半正定阵Π，使得

$$K=-R^{-1}B'\Pi, \tag{2.9}$$

且所有这种R和Π皆可表示为

$$R=V\Gamma V', \tag{2.10}$$

$$\Pi=-K'V\Gamma\Lambda^{+}V'K+Y'Y,\quad YB=0, \tag{2.11}$$

其中非奇异矩阵V是由$(KB)'$的m个线性独立的特征向量组成的；而Λ是KB的m个特征值组成的对角阵；Γ是与Λ可交换相乘的对称参数阵；$\Lambda^{+}$表示Λ的广义逆.

把式（2.10）代入式（2.3），（2.3）式化为：

$$\Gamma\leqslant[I-V'K(-j\omega I-A)^{-1}BV^{-'}]'\Gamma[I-V'K(j\omega I-A)^{-1}BV^{-'}],\ ^{\forall}\omega\in\mathbf{R} \tag{2.12}$$

考查（2.12）式比（2.3）式容易得多，因为R有$n(n+1)/2$个参数，而Γ的参数少得多，尤其当KB的特征值互异时，Γ为对角阵，只有n个参数.

## 三、某些可镇定系统的LQSF逆问题

以前研究的LQSF逆问题只是对$(A,B)_n$完全可控的情况进行的. 而实际上有许多系统是不完全可控的，本文将研究某种可镇定系统LQSF逆问题. 因$(A,B)_n$可镇定，故系统（1.1）可代数等价地通过状态变换化为

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u},\ \sigma[A_{22}]\subset\mathbf{C}^-,\\ &(A_{11},\ B_1)_{n_1}\text{完全可控},\ n_1\geqslant\operatorname{rank}[B_1],\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}=K\mathbf{x}=[K_1\ \ K_2]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

此时如果有$A_{12}\in\operatorname{Span}[B_1]$，即存在适当矩阵$E_0$，使得

$$A_{12}=B_1E_0, \tag{3.3}$$

则式（3.1）和（3.2）的闭路系统可改写为

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\tilde{\mathbf{u}},\quad \tilde{\mathbf{u}}=[K_1,\ K_2+E_0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

注意到观测器回路（1.5）—（1.6）作状态变换$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$后，可化为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad u=[K \ \ -E]\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

式（3.4）的结构完全类似于式（3.5），故有

**定理3.1.** 如果系统（1.1）可镇定，且写作（3.1），（3.2）式后，$\mathrm{rank}[K_1]=\mathrm{rank}[B_1]=m$，且存在矩阵$E_0$，使得$A_{12}=B_1E_0$，则$u=Kx=[K_1, \ K_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$使系统（1.1）为最优系统的充分必要条件是：

$$\sigma[A+BK]\subset \mathbf{C}^- \tag{3.6}$$

同时存在正定阵$R\in \mathbf{R}^{m\times m}$，使得

$$R\leq[I-K_1(-j\omega I-A_{11})^{-1}B_1]^{\tau}R[I-K_1(j\omega I-A_{11})^{-1}B_1], \ \forall\omega\in\mathbf{R}, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{normal\ rank}\{[I-K_1(-sI-A_{11})^{-1}B_1]^{\tau}R[I-K_1(sI-A_{11})^{-1}B_1]-R\}=m. \tag{3.8}$$

作者衷心感激王攒升和孙清筵二老的教诲和支持，衷心感谢高为炳教授和程勉副教授的指导帮助。

## 附 录

**引理**A1[4]. 反馈律（1.5）使（1.6）式成为最优系统的必要条件是$u=Kx$使（1.1）式为最优系统。

**引理**A2[4]. 如果$u=Kx$使（1.1）式为最优系统，且$\mathrm{rank}\{K\}=m$，则式（1.5）使式（1.6）为最优系统的充分必要条件，是指标（1.8）中的矩阵$H_0$满足条件

$$\mathrm{normal\ rank}\{H_0(sI-A)^{-1}B\}=m. \tag{A1}$$

且$(H_0, \ A, \ B)_n$的不变零点皆无正实部。

**引理**A3[6]. 如果$(A, \ B)_n$可控，则如下两性质相互等价：

1） $$\Phi(j\omega)\triangleq W_{22}+B^{\tau}(-j\omega I-A^{\tau})^{-1}W_{12}+W_{12}^{\tau}(j\omega I-A)^{-1}B +B^{\tau}(-j\omega I-A^{\tau})^{-1}W_{11}(j\omega I-A)^{-1}B\geq 0 \text{几乎所有}\omega\in\mathbf{R}. \tag{A2}$$

2）存在矩阵$H\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$D\in\mathbf{R}^{m\times m}$，$P\in\mathbf{R}^{n\times n}$使得有理式

$$\psi(s)\triangleq\det[H(sI-A)^{-1}B+D]\det(sI-A). \tag{A3}$$

如果不恒为零，则对$\forall s\in\mathbf{C}^+$皆不为零。且使得如下两个等价条件成立：

（a）成立恒等式

$$\Phi(s)=[H(-sI-A)^{-1}B+D]^{\tau}[H(sI-A)^{-1}B+D]. \tag{A4}$$

（b）满足关系式

$$PA+A^{\tau}P+W_{11}=H^{\tau}H; \ PB+W_{12}=H^{\tau}D \ \text{及} \ W_{22}=D^{\tau}D. \tag{A5}$$

**附录**A4. 定理2.1的证明. 必要性：因式（1.5）使式（1.6）为最优系统，故由引理A1知，$u=Kx$亦使系统（1.1）为最优系统. 即存在正定阵$R$和使$(A, \ H_0)_n$可检测的$H_0$，使得有

$$\Pi A + A^{\tau}\Pi - \Pi B R_0^{-1} B^{\tau}\Pi + H_0^{\tau} H_0 = 0,\quad K = -R_0^{-1} B^{\tau}\Pi \tag{A6}$$

$$\sigma(A + BK) \subset \mathbf{C}^- \tag{A7}$$

式（A6）可写为

$$\Pi(sI - A) + (-sI - A)^{\tau}\Pi + K^{\tau} R_0 K = H_0^{\tau} H_0. \tag{A8}$$

左乘$B^{\tau}(-sI - A^{\tau})^{-1}$，右乘 $(sI - A)^{-1}B$，则有

$$B^{\tau}(-sI - A^{\tau})^{-1}\Pi B + B^{\tau}\Pi(sI - A)^{-1}B + B^{\tau}(-sI - A^{\tau})^{-1}K^{\tau}R_0 K(sI - A)^{-1}B$$

$$= B^{\tau}(-sI - A^{\tau})^{-1}H_0^{\tau}H_0(sI - A)^{-1}B.$$

注意到$\Pi B = -K^{\tau}R_0$，则有

$$[I - K(-sI - A)^{-1}B]^{\tau}R_0[I - K(sI - A)^{-1}B] - R_0$$

$$= B^{\tau}(-sI - A^{\tau})^{-1}H_0^{\tau}H_0(sI - A)^{-1}B. \tag{A9}$$

若取$s = j\omega$，则（A9）式右边为Hermite正定阵，从而有

$$[I - K(-j\omega I - A)^{-1}B]^{\tau}R_0[I - K(j\omega I - A)^{-1}B] \geqslant R,\quad \forall\omega \in \mathbf{R}. \tag{A10}$$

又由引理A2可知，

$$\text{normal rank}\{H_0(sI - A)^{-1}B\} = m,$$

故由（A9）式可得

$$\text{normal rank}\{[I - K(-sI - A)^{-1}B]^{\tau}R_0[I - K(sI - A)^{-1}B] - R_0\} = m. \tag{A11}$$

充分性，（2.3）式可以写为

$$\Phi(j\omega) \overset{\Delta}{=} B^{\tau}(-j\omega I - A^{\tau})^{-1}(-RK)^{\tau} + (-RK)(j\omega I - A)^{-1}B$$

$$+ B^{\tau}(-j\omega I - A^{\tau})^{-1}(K^{\tau}RK)(j\omega I - A)^{-1}B \geqslant 0,\quad \forall\omega \in \mathbf{R}, \tag{A12}$$

因 $(A, B)_n$可控，故据引理A1，存在$H_0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$P \in \mathbf{R}^{n\times n}$，满足关系式

$$PA + A^{\tau}P + K^{\tau}RK = H_0^{\tau}H_0, \tag{A13}$$

$$PB + (-RK)^{\tau} = 0, \tag{A14}$$

$$[I - K(-sI - A)^{-1}B]^{\tau}R[I - K(sI - A)^{-1}B] - R$$

$$= B^{\tau}(-sI - A)^{-1}H_0^{\tau}H_0(sI - A)^{-1}B. \tag{A15}$$

且由（2.4）式可确认　$\Psi(s) \overset{\Delta}{=} \det[H_0(sI - A)^{-1}B]\det(sI - A) \not\equiv 0$

故再据引理A1，可知　$\Psi(s) \neq 0,\ \forall s \in \mathbf{C}^+.$　　(A16)

从而

$$\text{normal rank}\{H_0(sI - A)^{-1}B\} = m. \tag{A17}$$

因$\Psi(s) = \det\begin{bmatrix} A - sI & B \\ H_0 & 0 \end{bmatrix}$，故（A16）表明

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A - sI & B \\ H_0 & 0 \end{bmatrix} = n + m,\quad \forall s \in \mathbf{C}^+ \tag{A18}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-sI \\ H_0 \end{bmatrix}=n,\quad \forall s\in \mathbf{C}^{+}. \tag{A19}$$

下面证明（A19）式对$Re(s)=0$也成立。假定不成立，则存在某个$\omega\in\mathbf{R}$和非零向量$\gamma$，使得

$[A-j\omega I]\gamma=0$，$H_0\gamma=0$成立。而（A13）式可重新排列为

$$P(A-j\omega I)+(A-j\omega I)^*P+K'RK=H_0'H_0.$$

此式左乘$\gamma^*$，右乘$\gamma$则有$\gamma^*K'RK\gamma=0$。因R正定，故有

$$K\gamma=0. \tag{A20}$$

但因 $\sigma[A+BK]\in\mathbf{C}^-$，故 $(A, K)_n$ 可检测，这与式（A20）矛盾。说明式（A19）对$Re(s)=0$也成立，从而 $(A, H_0)_n$ 可检测。记

$$J\triangleq\int_0^\infty(x'H_0'H_0x+u'Ru)dt. \tag{A21}$$

则可把J看作系统（1.1）的一个性能指标（1.8），求得最优控制律$\mathbf{u}=K_0\mathbf{x}$，

$$\sigma[A+BK_0]\in\mathbf{C}^-. \tag{A22}$$

据必要性证明的（A9）可得

$$[I-K_0(-sI-A)^{-1}B]'R[I-K_0(sI-A)^{-1}B]-R$$
$$=B'(-sI-A')^{-1}H_0'H_0(sI-A)^{-1}B.$$

与（A15）式相比较，即得关系式

$$[I-K_0(-sI-A)^{-1}B]'R[I-K_0(sI-A)^{-1}B]$$
$$=[I-K(-sI-A)^{-1}B]'R[I-K(sI-A)^{-1}B].$$

此式左乘$[I+K_0(-sI-A-BK_0)^{-1}B]'$，右乘$[I+K(sI-A-BK)^{-1}B]$，通过移项整理，即可得

$$R(K-K_0)(sI-A-BK)^{-1}B=B'(-sI-A-BK_0)^{-\prime}(K'-K_0')R. \tag{A23}$$

这里用到了恒等式

$$[I-K(sI-A)^{-1}B][I+K(sI-A-BK)^{-1}B]=I. \tag{A24}$$

状态反馈不改变可控性，故知 $(A+BK, B)_n$ 可控，$(A+BK_0, B)_n$ 可控。又因$\sigma[A+BK]\in\mathbf{C}^-$，$\sigma[A+BK_0]\in\mathbf{C}^-$，故（A23）式两边相等，只能出现在完全不可观测的情况，即$R(K-K_0)=0$。因矩阵R非奇异，故有$K=K_0$。这就是说，$\mathbf{u}=K\mathbf{x}$确使(1.1)成为最优系统。因为式（A18）说明 $(H_0, A, B)_n$的不变零点皆实部非正，又有（A17）式成立，故据引理A2可知，式（1.5）使（1.6）为最优系统。

注意到上述证明过程对系统（1.1）的任一$K\mathbf{x}$-观测器（1.2）皆适用。故至此定理证毕。

## 参 考 文 献

〔1〕 Kalman, R.E., When is a Linear Control System Optimal? Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg., **86** (1964), 51—60.

〔2〕 Anderson, B.D.O., The Inverse Problem of Optimal Control, Rep. SEL-66-038 (Tr. №. 6560-3), Stanford Electronics Laboratories, Stanford, Calif., 1966.

〔3〕 Jameson, A. and Kreindler, E., Inverse Problem of Linear Optimal Control, SIAM J. Control, **11** (1973), 1—19.

〔4〕 Suda, N. and Fujii, T., The Optimality Property of an Optimal Regulator Incorporating an Observer, INT. J. Control, **33** (1981), 617—647.

〔5〕 Popov, V. M., Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions, Rev. Roum. Sci. Techn., Serie Electrotechn. et Energ., **9** (1964), 629—690.

## OPTIMALITY CONDITIONS FOR OBSERVER LOOP

Wang Dahai

(Institute of Automation, Academia Sinica Hebei)

Abstract

For a linear time-invariant system, if its feed-back control law $u = K_x$ incorporates an observer for $K_x$ in its implementaion, then the resultant close-loop system forms a composite system with state feedback. It is a quadratic performance index optimal system if matrix K satisfys some conditions. The problem of investigating these conditions is called observer linear quadratic state feedback inverse problem, (OLQSF inverse problem), which is an extension of the well-known inverse problem of optimal control. In this paper, some necessary conditions and a set of necessary and sufficient conditions for OLQSF inverse problem are discussed. Furthermore, the inverse problem of optimal control for some stabilizable systems is discussed too.