第12卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 12, No. 1
1986 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1986

有建模误差的模型参考自适应控制系统的鲁棒性

陈 宗 基
(北 京 航 空 学 院)

摘 要

本文研究相对阶(传递函数分母和分子阶之差)为一和二的乃伦局 (Narendra) 方案用于有建模误差的模型参考自适应控制系统 (MRAC) 的鲁棒性. 结论是当建模误差足够小时，该方案在某一域内是稳定的.

一、引 言

自 1960 年以来，MRAC 理论得到了很大发展. Whitaker 等的 MIT 调节规律[1]，Parks 的李雅普诺夫函数的设计方法[2]，Monopoli 的广义误差信号概念[3]，都是早期发展中的重要里程碑. 1980 年左右，对理想化 MRAC 系统大范围稳定性的证明有了突破[4-8]. 这些理论化假设包括诸如已知系统的结构；系统是线性时不变最小相位；不存在外界干扰和测量噪声. 显然，这些假设实际上往往不能满足. 为了将 MRAC 理论用于实际控制问题，就必须研究这些自适应方案的适用范围.

近来，人们逐渐重视对 MRAC 系统的鲁棒性研究，但对具有建模误差的系统鲁棒性进行分析的文章较少，并有分歧. Anderson, B. D. O. 证明了某些离散时域的 MRAC 方案对于建模误差有一定程度的鲁棒性[9]. 笔者和 Cook, P. A. 提出了有界 MRAC 系统的概念，并用实例显示了有界 MRAC 系统的可能性[10]，而 Rohrs 等却认为现存的各类 MRAC 系统均包含一个无限增益环节，当存在建模误差时，系统将失稳[11]. 笔者和 Cook, P. A. 指出了该文的片面性，并给出了相对阶为一且具有建模误差的乃伦局方案的鲁棒性分析[12].

本文介绍了必要的背景材料，分析了有建模误差的 MRAC 系统的鲁棒性，研究了相对阶已知情况下有建模误差的 MRAC 系统的鲁棒性. 根据不同的内容，文中变量 “S”，有时代表拉氏变换变量，有时代表微分算子.

本文于 1984 年 2 月 15 日收到.

二、预备知识

为了便于理解，先简单介绍乃伦局的 MRAC 方案[4,6]。如果引言中提及的所有假设均满足，那么相对阶 $\overset{*}{n}=1$ 或 $\overset{*}{n}=2$ 时，连续时域的乃伦局方案可用图1表示。当相对阶为1时，图中虚线部分应去掉。

图中，参考模型为 $\dot{\boldsymbol{x}}_m=A_m\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{b}_m r$，$y_m=\boldsymbol{h}_m^T\boldsymbol{x}_m$，有 $W_m(S)=\boldsymbol{h}_m^T(IS-A_m)^{-1}\boldsymbol{b}_m$

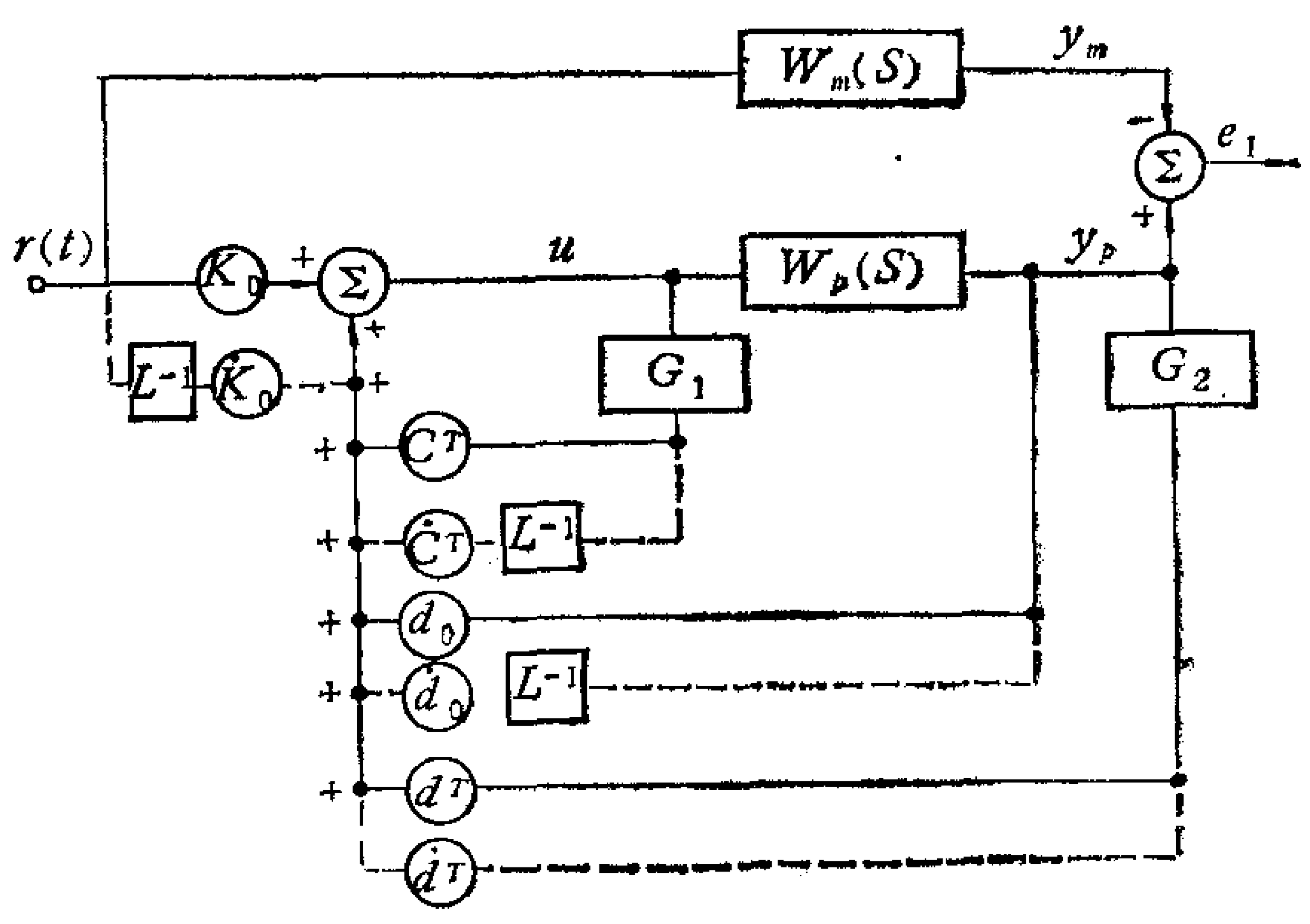

图1 $\overset{*}{n}=1$ 和 $\overset{*}{n}=2$ 的乃伦局自适应方案

$=K_mN_m(S)/D_m(S)$。被控对象为 $\dot{\boldsymbol{x}}_P=A_P\boldsymbol{x}_P+\boldsymbol{b}_P u$，$y_P=\boldsymbol{h}_P^T\boldsymbol{x}_P$，有 $W_P(S)=\boldsymbol{h}_P^T(IS-A_P)^{-1}\boldsymbol{b}_P=K_PN_P(S)/D_P(S)$。$(n-1)$ 阶的状态变量产生器 G_1 和 G_2 为

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{(1)}=\Lambda\boldsymbol{v}^{(1)}+\boldsymbol{b}_f u,$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}^{(2)}=\Lambda\boldsymbol{v}^{(2)}+\boldsymbol{b}_f y_P.$$

且 $\det(IS-\Lambda)$ 为渐近稳定多项式。

定义 $2n$ 维信号向量 $\boldsymbol{w}^T=[r,\boldsymbol{v}^{(1)T},y_P,\boldsymbol{v}^{(2)T}]$，$2n$ 维参数向量 $\boldsymbol{\theta}^T=[K_0,\boldsymbol{c}^T,d_0,\boldsymbol{d}^T]$，输出误差 $e_1=y_P-y_m$，$2n$ 维滤波信号向量 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{w}/L(S)$。其中，$L(S)=S+\rho$，$\rho>0$，使得 $W_m(S)L(S)$ 是一个严格正实的传递函数。

容易证明，存在一个常数向量 $\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T=[\overset{*}{K}_0,\overset{*}{\boldsymbol{c}}{}^T,\overset{*}{d}_0,\overset{*}{\boldsymbol{d}}{}^T]$，如果 $\boldsymbol{\theta}=\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}$，则被控对象和该自适应控制器的组合系统与参考模型完全一致[4]。

再定义 $2n$ 维参数误差向量 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\theta}-\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}$，$(3n-2)$ 维状态误差向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^T&=[\boldsymbol{\varepsilon}^T,\boldsymbol{e}^{(1)T},\boldsymbol{e}^{(2)T}]\\&=[\boldsymbol{x}_P^T,\boldsymbol{v}^{(1)T},\boldsymbol{v}^{(2)T}]-[\boldsymbol{x}_P^T,\boldsymbol{v}^{(1)T},\boldsymbol{v}^{(2)T}]_{\theta=\overset{*}{\theta}}.\end{aligned}$$

如果控制作用 U 被综合为

$$U=\sum_{i=1}^{2n}[\theta_i+\dot{\theta}_iL^{-1}(S)]w_i,$$

并且选择参数调节规律

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=-\Gamma\boldsymbol{\xi}e_1,\quad \Gamma=\Gamma^T>0,$$

那么该 MRAC 系统的误差方程可写为

$$\dot{e} = A_c e + b_c\left[\sum_{i=1}^{2n} L(S)\phi_i L^{-1}(S) w_i\right], \tag{1}$$

$$e_1 = h_c^T e. \tag{2}$$

其中，

$$AC = \begin{bmatrix} A_P + \overset{*}{d}_0 b_P h_P^T & b_P \overset{*}{c}^T & b_P \overset{*}{d}^T \\ b_f \overset{*}{d}_0 h_P^T & \Lambda + b_f \overset{*}{c}^T & b_f \overset{*}{d}^T \\ b_f h_P^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix};$$

$$b_C^T = [b_P^T, b_f^T, 0];$$

$$h_C^T = [1, 0 \cdots 0].$$

于是，整个系统可用如下向量方程描述：

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_C & b_{SPR}\xi^T \\ -\Gamma \xi h_C^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \phi \end{bmatrix}. \tag{3}$$

其中，$h_C^T(IS - A_C)^{-1} b_{SPR} = h_C^T(IS - A_C)^{-1} b_C L(S)$ 为严格正实传递函数．当相对阶为一时，$b_{SPR} = b_C$，$L(S) = 1$，$\xi = w$．

引理 1. 如果线性系统 $\dot{x}_1 = A(t)x_1$ 和 $\dot{x}_2 = B(t)x_2$ 是一致渐近稳定的(u. a.s.)，$A(t)$ 和 $B(t)$ 分别为 $n\times n$ 和 $m\times m$ 有界分段连续函数矩阵，$C(t)$ 是 $m\times n$ 有界分段连续函数矩阵，那么系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ C(t) & B(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

也是一致渐近稳定的．

引理 1 可用李雅普诺夫函数法来证明[14]．

引理2[15]．考虑系统 $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$，假设线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 是 u.a.s.，并有 $\|A(t)\| < M$，$M > 0$，那么存在一常数 $\varepsilon > 0$，只要 $\|B(t)\| < \varepsilon$，该受扰系统就保持 u.a.s.．

引理 3[13]．A 是一稳定的常数矩阵，P 是一对称正定阵，使得 $PA + A^TP$ 为负定阵．假设存在非零向量 h 和 b，有 $Pb = h$，以及 $v(t)$ 是一个分段连续有界并充分富集[13]的函数向量，那么系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & bv(t)^T \\ -v(t)h^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

是一致渐近稳定的．

三、建模误差对 MRAC 系统的影响

为了叙述方便，定义有界 MRAC 系统为在整个控制过程中系统的输出量、被调参数以及有关的状态变量都一致有界．

实际上，至今还不能绝对正确地获得被控对象的模型，有时为了设计和制造的方便，往往把高阶系统简化为低阶系统，把非线性系统在某一范围内线性化．总之，作为设计对象的假设模型与真实被控对象之间总存在着区别．这类 MRAC 系统可用图 2 表示．图

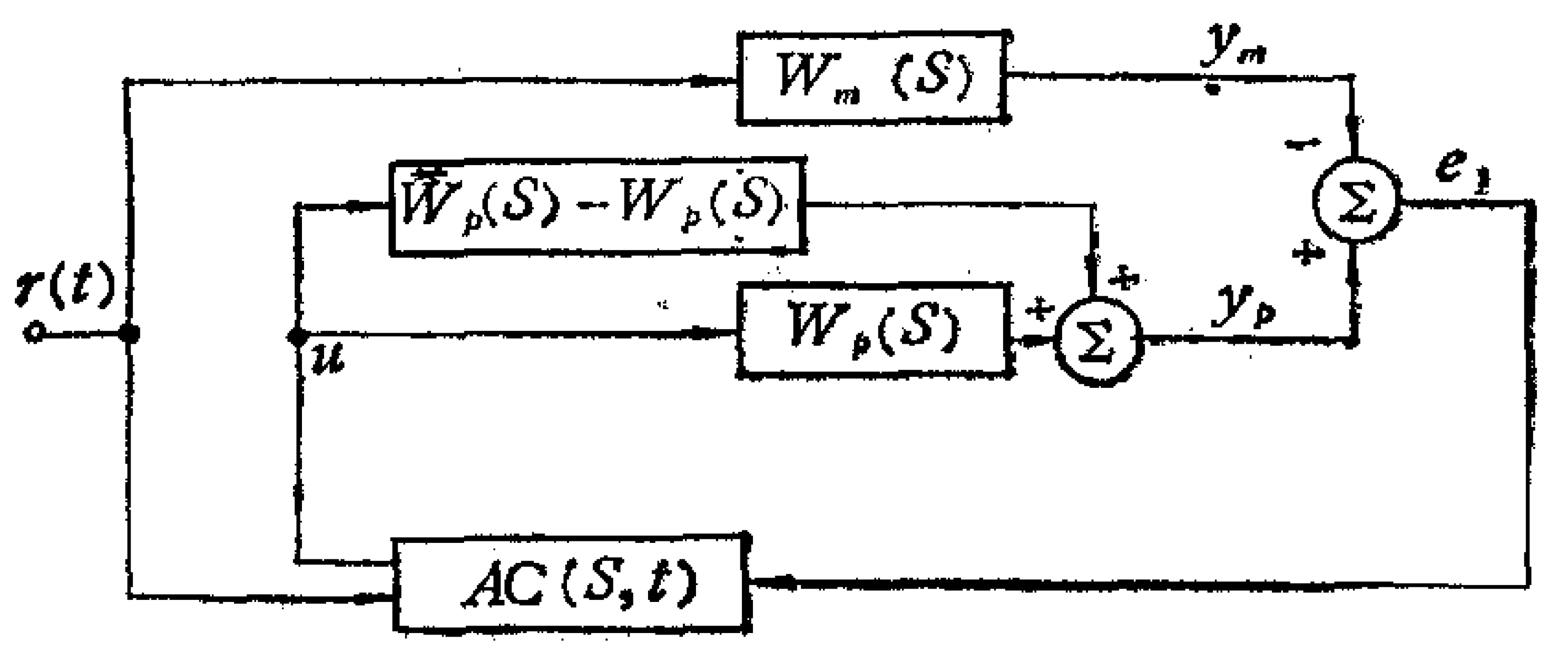

图2 具有建模误差的模型参考自适应系统

中 $W_P(S)$ 为假设模型；$\mathring{W}_P(S)$ 为结构未知的真实对象；$AC(S, t)$ 为自适应控制器．于是有建模误差的实际 MRAC 系统可用如下误差方程来描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_C & b_{SPR}\xi^T\\ -\Gamma\xi h_C^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_g\\ 0\end{bmatrix}\cdot W_P^{-1}(S)[\mathring{W}_P(S)-W_P(S)]u(t). \tag{4}$$

其中 $b_g^T=[b_P^T, 0^T, 0^T]$；$u=L(S)\theta^T\xi$.

方程(4)还可用另一形式来表示：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_C & b_{SPR}\xi^T\\ -\Gamma\xi h_C^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{gL}\\ 0\end{bmatrix}g_{me}(t). \tag{5}$$

由方程(4)到(5)，用到：

$$W_P^{-1}(S)[\mathring{W}_P(S)-W_P(S)]L(S)=L(S)W^{-1}(S)[\mathring{W}_P(S)-W_P(S)],$$
$$h_C^T(IS-A_C)^{-1}b_gL(S)=h_C^T(IS-A_C)^{-1}b_{gL},$$
$$g_{me}(t)=W_P^{-1}(S)[\mathring{W}_P(S)-W_P(S)]\theta^T\xi.$$

现在定义 $W_P^{-1}(S)[\mathring{W}_P(S)-W_P(S)]$ 为建模误差传递函数 $W_{me}(S)$，$g_{me}(t)$ 为由建模误差引起的广义干扰．由于假设模型的相对阶总是可以选为低于或等于真实对象的相对阶，故建模误差传递函数就总是真的或严格真的，从而广义干扰 $g_{me}(t)$ 又可表示为规范形式：

$$\dot{\eta}=E\eta+f\xi^T\theta, \tag{6}$$
$$g_{me}=p^T\eta+q\xi^T\theta. \tag{7}$$

其中 $f^T=[0, 0, \cdots, 1]$；$W_{me}(S)=q+p^T(IS-E)^{-1}f$.

当 $\|p\|=\|q\|=0$ 时，显然假设模型和真实对象完全一致，即 $(\|q\|+\|p\|)$ 反映了假设模型和真实对象之间的差别．方程(5)，(6)和(7)可以综合为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_C & b_{SPR}\xi^T & b_gp^T\\ -\Gamma\xi h_C^T & 0 & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \phi\\ \eta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{gL}\ q\theta^T\xi\\ 0\\ f\theta^T\xi\end{bmatrix}. \tag{8}$$

根据定义，有

$$\xi=\xi_m+\xi_e.$$

其中，

$$\xi_m=\frac{1}{S+\rho}[r, v^{(1)T}, y_P, v^{(2)T}]_{\theta=\mathring{\theta}};$$

$$\boldsymbol{\xi}_e = \frac{1}{S+\rho}[0, \boldsymbol{e}^{(1)T}, e_1, \boldsymbol{e}^{(2)T}].$$

即有 $\dot{\boldsymbol{\xi}}_e = -PI\boldsymbol{\xi}_e + F\boldsymbol{e}$.

其中，

$$F = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 10\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \\ 1 \\ n-1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n & n-1 & n-1 \end{array} \end{array}$$

最后，方程(8)可以变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_C & (\boldsymbol{b}_{SPR} + \boldsymbol{b}_{gL}q)\boldsymbol{\xi}_m^T & \boldsymbol{b}_{gL}q\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T & \boldsymbol{b}_{gL}\boldsymbol{p}^T \\ -\Gamma\boldsymbol{\xi}_m\boldsymbol{h}_C^T & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & -\rho I & 0 \\ 0 & \boldsymbol{f}\boldsymbol{\xi}_m^T & \boldsymbol{f}\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\xi}_e \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}_{SPR} + \boldsymbol{b}_{gL}q)\boldsymbol{\xi}_e^T\boldsymbol{\phi} \\ -\Gamma\boldsymbol{\xi}_e e_1 \\ 0 \\ \boldsymbol{f}\boldsymbol{\xi}_e^T\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{gL}q\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T\boldsymbol{\xi}_m \\ 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{f}\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\xi}_m \end{bmatrix}. \tag{9}$$

下面考察系统的线性部分．首先考察下列子系统：

1) $$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_C & \boldsymbol{b}_{SPR}\boldsymbol{\xi}_m^T \\ -\Gamma\boldsymbol{\xi}_m\boldsymbol{h}_C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}.$$

根据引理 3，当 $\boldsymbol{h}_C^T(IS - A_C)^{-1}\boldsymbol{b}_{SPR}$ 是严格正实传递函数时，有 $P\boldsymbol{b}_{SPR} = \boldsymbol{h}_C$，若 $\boldsymbol{\xi}_m$ 有界并充分富集，则系统为 u. a. s..

2) $\dot{\boldsymbol{\eta}} = E\boldsymbol{\eta}$. 由于真实系统是稳定的最小相位系统，$E$ 是稳定的常数矩阵，故系统是 u. a. s..

3) $\dot{\boldsymbol{\xi}}_e = -\rho I\boldsymbol{\xi}_e$. 由于 $\rho > 0$，故系统也是 u. a. s..

根据引理 1，如下自由系统也是 u. a. s..

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_C & \boldsymbol{b}_{SPR}\boldsymbol{\xi}_m^T & 0 & 0 \\ -\Gamma\boldsymbol{\xi}_m\boldsymbol{h}_C^T & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & -\rho I & 0 \\ 0 & \boldsymbol{f}\boldsymbol{\xi}_m^T & \boldsymbol{f}\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\xi}_e \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

比较方程(10)和方程(9)的线性部分，根据引理 2，存在常数 $\varepsilon > 0$，如果 $\|\boldsymbol{b}_{gL}q\boldsymbol{\xi}_m^T\| + \|\boldsymbol{b}_{gL}q\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}{}^T\| + \|\boldsymbol{b}_{gL}\boldsymbol{p}^T\| < \varepsilon$，那么方程 (9)的线性部分也是 u. a. s.. 再由 $\|\boldsymbol{\xi}_m\|$，$\|\boldsymbol{b}_{gL}\|$ 和 $\|\overset{*}{\boldsymbol{\theta}}\|$ 的有界性，上述不等式可简化为

$$\|q\| + \|\boldsymbol{p}\| < \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

上述分析的物理意义是：如果建模误差足够小，那么方程(9)的线性部分保持 u.a.s..

方程(9)右边第二项由状态变量的二次项组成，因此用李雅普诺夫函数法不难证明没有驱动项的方程(9)是在一个域内 u. a. s.[14]. 再由附录中关于总体稳定性的定义和定理

可以证明，若驱动项足够小，使得状态变量维持在该域内，那么整个系统在该域内是有界稳定的。综上所述，如下的定理 1 是显而易见的。

定理 1. 用方程(9)描述的具有建模误差的 MRAC 系统，若它们的相对阶是一或二，传递函数 $\boldsymbol{h}_C^T(IS-A_C)^{-1}\boldsymbol{b}_{SPR}$ 是严格正实的，向量 $\boldsymbol{\xi}_m$ 有界并充分富集，那么存在一常数 $\varepsilon>0$，只要 $\|\boldsymbol{p}\|+\|q\|<\varepsilon$，该系统在一域内是有界 MRAC 系统。

四、相对阶已知的 MRAC 系统的鲁棒性分析

上一节对相对阶未知的一般情况已作了讨论。如果真实对象的相对阶已知，而对象的阶未知，那末建模误差仅反映了未知的系统阶。这种情况下系统的鲁棒性如何？

首先定义等效建模误差

$$E_m=\int_0^\infty\|\mathscr{L}^{-1}[W_{me}(S)]\|dt.$$

定理 2. 对于一已知相对阶的真实对象，存在一些假设模型，如果它们的等效建模误差足够小，那么它们可以选为自适应控制系统设计中的对象，如此设计的 MRAC 系统应用于真实对象所导致的系统是有界 MRAC 系统。

证明. 选择假设模型的相对阶等于该已知对象的相对阶，有：

$$q=\lim_{S\to\infty}W_P^{-1}(S)[\overset{*}{W}_P(S)-W_P(S)]=0.$$

于是

$$E_m=\int_0^\infty\|\mathscr{L}^{-1}[W_{me}(S)]\|dt=\int_0^\infty\|\boldsymbol{p}^T\mathscr{L}^{-1}[(IS-E)^{-1}\boldsymbol{f}]\|dt$$

$$\geqslant\left\|\boldsymbol{p}^T\int_0^\infty\mathscr{L}^{-1}[(IS-E)^{-1}\boldsymbol{f}]dt\right\|.$$

根据假设，该真实对象是稳定的最小相位系统，所以向量 $\boldsymbol{p}$ 的所有元素为正实数，向量 $\int_0^\infty\mathscr{L}^{-1}[(IS-E)^{-1}\boldsymbol{f}]dt$ 的所有元素也是正实数，并有上下界。从而 $E_m<\varepsilon_1$ 就隐含着 $\|\boldsymbol{p}\|<\varepsilon_2$，再根据定理 1，就可得定理 2。

定理 3. 考虑一真实对象

$$\overset{*}{W}_P(S)=\frac{K_P\prod_{i=1}^{n_2}(S+Z_i)\prod_{i=n_2+1}^{n-n_1+n_2}(S+Z_i)}{\prod_{i=1}^{n_1}(S+P_i)\prod_{i=n_1+1}^{n}(S+P_i)},$$

有 $n_2+2\geqslant n_1\geqslant n_2+1$ 和 $P_i>0$，$Z_i>0$，$P_i\neq P_j$，$\forall_i\neq j$，存在一常数 $\varepsilon>0$ 如果

$$\sum_{i=n_1+1}^{n}\left\|\frac{1}{P_i}\operatorname*{Res}_{S\to P_i}\left[\frac{\prod_{j=n_2+1}^{n-n_1+n_2}(S+Z_j)}{\prod_{j=n_1+1}^{n}(S+P_j)}\right]\right\|<\varepsilon,$$

那么若把 $W_P(S)=\dfrac{K_P\prod\limits_{i=1}^{n_2}(S+Z_i)}{\prod\limits_{1}^{n_1}(S+P_i)}$ 选作假设模型，所设计的 MRAC 系统在一域内是有界 MRAC 系统。

证明．建模误差传递函数为

$$W_{mc}(S)=\frac{R_{n_1+1}}{S+P_{n_1+1}}+\frac{R_{n_1+2}}{S+P_{n_1+2}}+\cdots+\frac{R_n}{S+P_n}.$$

其中，R_i 是相应的留数，

$$R_i=\operatorname*{Res}_{S\to P_i}\left[\frac{\prod\limits_{j=n_2+1}^{n-n_1+n_2}(S+Z_j)}{\prod\limits_{j=n_1+1}^{n}(S+P_j)}\right],\quad i=(n_1+1),\cdots,n.$$

等效建模误差为

$$E_m=\int_0^\infty\|\mathscr{L}^{-1}[W_{mc}(S)]\|dt\leqslant\sum_{i=n_1+1}^{n}\int_0^\infty\|R_ie^{-P_it}\|dt$$

$$=\sum_{i=n_1+1}^{n}\left\|\frac{R_i}{P_i}\right\|.$$

再根据定理 2，就可得出定理 3。

最后，讨论等效建模误差的物理意义。

$$W_P^{-1}(S)=\alpha_{\mathring{n}}S^{\mathring{n}}+\alpha_{\mathring{n}-1}S^{\mathring{n}-1}+\cdots+\alpha_0+\frac{R_P(S)}{N_P(S)}.$$

令，$\Delta W_P(S)=\mathring{W}_P(S)-W_P(S)$，

有

$$W_P^{-1}(S)\Delta W_P(S)=\alpha_{\mathring{n}}S^{\mathring{n}}\Delta W_P(S)+\alpha_{\mathring{n}-1}S^{\mathring{n}-1}\Delta W_P(S)+\cdots$$
$$+\frac{R_P(S)}{N_P(S)}\Delta W_P(S)$$

以及

$$E_m=\int_0^\infty\|\mathscr{L}^{-1}[W_P^{-1}(S)\Delta W_P(S)]\|dt$$
$$=\int_0^\infty\|\alpha_{\mathring{n}}\Delta h_P^{(\mathring{n})}(t)+\alpha_{\mathring{n}-1}\Delta h_P^{(\mathring{n}-1)}(t)+\cdots+\alpha_0\Delta h_P(t)$$
$$+h_R(t)*\Delta h_P(t)\|dt.$$

其中 $\Delta h_P(t)=\mathscr{L}^{-1}[\Delta W_P(S)]=h_P^*(t)-h_P(t)=\mathscr{L}^{-1}\{W_P^*(S)\}-\mathscr{L}^{-1}\{W_P(S)\}$；

$$h_R(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{R_P(S)}{N_P(S)}\right];$$

$$h_R(t)*\Delta h_P(t)=\int_0^t h_R(t-\tau)\Delta h_P(\tau)d\tau.$$

因此，等效建模误差是真实对象和假设模型的脉冲响应函数之差及其微分的函数.

五、结　论

本文分析了具有建模误差的乃伦局方案的鲁棒性，表明当建模误差足够小时，该 MRAC 系统在一域内是有界 MRAC 系统. 由于其它各主要的 MRAC 方案均可以转换为乃伦局的误差方程[16]，所以上述结论具有一般性.

如何找出具有实际意义的定量估计 MRAC 系统鲁棒性的方法，如何提高 MRAC 系统的鲁棒性是值得深入研究的课题.

附　录

定义. 总体稳定性 [Totol Stability][17]

在域 $\|x\|<r$ 和 $t\geqslant t_0$ 中，考虑系统 $x = f(x,t) + g(x,t)$. 假设 $f(x, t)$ 满足利普希茨条件并有 $f(0, t) = 0$，该微分方程的一般解由 $\phi(t; x_0, t_0)$ 表示. 如果对于每个 $\varepsilon>0$，存在两个正数 $\delta_1(\varepsilon)$ 和 $\delta_2(\varepsilon)$，只要如下不等式成立

$$\|x_0\|<\delta_1,$$

$$\|g(x, t)\|<\delta_2, \ \forall\|x\|<\varepsilon, \ t\geqslant t_0,$$

就有 $\|\phi(t; x_0, t)\|<\varepsilon, \ \forall t\geqslant t_0$，则该自由系统的平衡点称为总体稳定的.

定理[17]. 如果在上述定义中的自由系统的平衡点是一致渐近稳定的，那末它也是总体稳定的.

参　考　文　献

[1] Whitaker, H. P., et al., New developments in the design of adaptive control systems, Inst. of Aeronautical Sciences, Paper 61—39, 1961.
[2] Parks P. C., Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-**11**(1966), No. 3.
[3] Monopoli, R. V., Model reference adaptive control systems with an augmented error signal, *IEEE Trans. on Automat. Control,* AC-**19** (1974).
[4] Narendra, K. S. and Valavani, L. S., Stable adaptive controller design: direct control, *IEEE. Trans on Automat, Contr.*, AC-**23**(1978), No. 4.
[5] Morse, A. S., Global stability of parameter adaptive control systems, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-**25**(1980), No. 3.
[6] Narendra, K. S., Lin, Y-H and Valavani, L. V., Stable adaptive controller design, Part II, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-**25**(1980), No. 3.
[7] Goodwin, G. C., et al., Discrete-time multivariable adaptive control *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-**25**(1980), No. 3.
[8] Naredra, K. S. and Lin, Y-H., Stable discrete adaptive control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-**25**(1980), No. 3.
[9] Anderson B. D. O., Robust Lyapunnov stability results and adaptive systems, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle. Australia, AN-311, 1983.
[10] Cook, P. A. and Chen, Z. J., Robustness of model reference adaptive control systems, IEE Proc. No. 6, 1982.
[11] Rohrs, C. E., et al., Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics' Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1982.
[12] Chen Z. J. and Cook, P. A. The robustness of model reference adaptive control systems with unmodelled dynamics, *INT. T. Control,* **39**(1984), No. 1.

[13] Morgam, A. P. and Narendra, K. S., On the stability of nonautonomous differential equations $\dot{x}=[A+B(t)]x$ with skew symmetric matrix B(t), *SIAM, J. Control and Optimization*, **15** (1977).
[14] Chen, Z. J., Robust property of model reference adaptive control systems, Ph. D. Thesis, UMIST, Manchester, U. K., 1983.
[15] Bockett, R. W., Finite Dimensional Linear systems, John Wiley and Sons., inc. 1975.
[16] Egardt, B., Unification of some continuous-time adaptive control schemes, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-**24** (1978).
[17] Wolfgang Hahn, Stability of motion, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

ROBUSTNESS OF MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS WITH UNMODELLED DYNAMICS

CHEN ZONGJI
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

Robustness of Narendra's MRAC schemes with relative degree of 1 or 2 in the presence of unmodelled dynamics are studied. It is concluded that these schemes are stable in a domain when the modelling error is small enough.