第 12 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 1
1986 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1986

一种 ARMA 谱估计公式

黄 俊 钦　　余 辉 里

（北 京 航 空 学 院）

摘　　要

近年来，国内外刊物上发表了一些介绍只估计 AR 参数的 ARMA (p,q) 谱估计方法的文章．本文指出了上述文章中存在的问题，并导出了一种正确的较完善的 ARMA(p, q) 谱估计公式．

一、前　　言

功率谱密度（简记为 PSD）是表示随机信号的功率含量随频率的分布．PSD 估计方法可分为两大类：经典功率谱估计（即非参数谱估计）和现代功率谱估计（即参数谱估计）．经典 PSD 估计方法建立在维纳-辛钦定理的基础上，这类估计方法由于在实际计算时将数据作了周期延拓，引入了泄漏误差（窗效应），因此降低了 PSD 的分辨率，增加了 PSD 的误差，而且估计出的 PSD 起伏较大．近代 PSD 估计方法由于运用随机过程的参数模型来描述随机信号，较真实地反映出随机数据的特征，并且没有对数据作周期延拓，因此能够得到较高质量的 PSD 估计．

随机过程的参数模型可分为自回归（AR）模型，滑动平均（MA）模型和自回归滑动平均（ARMA）模型三类．其中最常用的是 AR 模型和 ARMA 模型．三种模型分别表示为：

$$\text{AR:}\quad x(n) = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x(n-i) + w(n). \tag{1}$$

$$\text{MA:}\quad x(n) = \sum_{i=0}^{q} \beta_i w(n-i), \tag{2}$$

$$\text{ARMA:}\; x(n) = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x(n-i) + \sum_{i=0}^{q} \beta_i w(n-i). \tag{3}$$

式中 $\{w(n)\}$ 是白噪声过程；$\{x(n)\}$ 是所获得的随机过程样本（时间序列），具有零均值；$\{\alpha_i\}$，$\{\beta_i\}$ 是待定参数．(1)和(3)式称为 AR(p) 过程和 ARMA(p, q) 过程．显然 ARMA(p, q) 过程是 AR(p) 和 MA(q) 过程的组合，是描述随机过程较一般化的参数模型．

本文于 1983 年 9 月 7 日收到．

不失一般性,设 $\{w(n)\}$ 的 PSD 为 1,可得到三种过程的 PSD 公式

$$P_{AR}(w)=\frac{\Delta t}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}, \tag{4}$$

$$P_{MA}(\omega)=\left|\sum_{i=0}^{q}\beta_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2\cdot\Delta t, \tag{5}$$

$$P_{ARMA}(\omega)=\frac{\left|\sum_{i=1}^{q}\beta_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\cdot\Delta t. \tag{6}$$

式中 Δt 是时间序列的样本间隔.

如果来自 AR(p) 过程的时间序列 $\{x(n)\}$ 是通过观测获得的,且观测噪声 $\{\varepsilon(n)\}$ 是方差为 σ_ε^2的白噪声,与$\{x(n)\}$ 无关. 则有

$$y(n)=x(n)+\varepsilon(n),$$

$$P_y(w)=\frac{\Delta t}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}+\sigma_\varepsilon^2\Delta t$$

$$=\frac{1+\sigma_\varepsilon^2\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\Delta t.$$

式中$\{y(n)\}$表示通过观测得到的时间序列,显然$\{y(n)\}$是 ARMA(p, p)过程[7]. 同理,如果来自 ARMA(p, q) 过程的$\{x(n)\}$是通过观测获得的,则有

$$P_y(\omega)=\frac{\left|\sum_{i=0}^{q}\beta_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2+\sigma_\varepsilon^2\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\Delta t.$$

显然 $P_y(\omega)$ 也是 ARMA(p,p) 过程的 PSD.因此,当附加有观测噪声的时间序列具有低信噪比 (SNR) 时,不论此时间序列是来自 AR(p) 过程还是来自 ARMA(p, q) 过程,通过观测所获得的时间序列$\{y(n)\}$都将等价于 ARMA(p, p) 过程.

由于 ARMA (p, q) 过程是描述随机过程的更具有普遍性的参数模型,因此对 ARMA(p, q) 谱估计方法的研究得到了广泛的重视. 一般的 ARMA(p, q) 谱估计方法是估计出模型参数 $\{\alpha_i\}$,$\{\beta_i\}$,然后由(6)式得到 PSD. 这类估计方法的缺点是计算复杂. 近年来,人们开始研究只估计 AR 参数$\{\hat{\alpha}_i\}$的 ARMA(p, q) 谱估计方法,这类方法计算简单,便于应用. 本文只对此类方法进行了讨论.

二、ARMA(p,q) 谱估计公式

根据维纳-辛钦定理，ARMA(p, q) 过程的 PSD 可以表为

$$P_{ARMA}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\doteq\Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n)e^{-j\omega n\Delta t}.$$

又由 (6) 式有

$$\Delta t\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(n)e^{-j\omega n\Delta t}=\frac{\left|\sum_{i=0}^{q}\beta_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}{\left|1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\Delta t.$$

当已知$\{\alpha_i\}$和 $R(n)$的估计值时，可以由上式定出 $\{\beta_i\}$. 这就是只估计 AR 参数的 ARMA 谱估计方法的基本依据. 下面推导新的 ARMA(p, q) 谱估计公式.

对(3)式两边作 z 变换，有

$$\frac{X(z)}{W(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{q}\beta_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i z^{-i}}. \tag{7}$$

式中 $X(z)$, $W(z)$ 分别为 $x(n)$, $w(n)$ 的 z 变换. (7)式说明 ARMA(p, q) 过程可以看成是白噪声 $w(n)$ 通过线性定常时不变系统而产生的输出，且系统是具有因果性的，即物理上可实现的，应满足

$$E\{x(n)w(m)\}=0,\ m>n.$$

式中 E 表示求数学期望.

对(3)式两边同乘以 $x(n-m)$，并取数学期望，由前面的结论并注意到数据具有零均值，可得

$$R(m)+\alpha_1 R(m-1)+\cdots+\alpha_p R(m-p)=0,\ m>q,\ 1\leqslant q\leqslant p.$$

式中 $R(m)\triangleq E\{x(n)x(n-m)\}$. 令 $m=k+q$，上式又可表示为

$$R(k+q)+\alpha_1 R(k+q-1)+\cdots+\alpha_p R(k+q-p)=0,$$
$$k=1,2,\cdots,\ 1\leqslant q\leqslant p. \tag{8}$$

(8)式两边同乘 $e^{-j\omega k\Delta t}$，并对 k 在 1—∞ 范围内求和，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{p}\alpha_l R(k+q-l)e^{-j\omega(k+q)\Delta t},\ \alpha_0=1. \tag{9}$$

令 $k'=k+q-l$，则(9)式可表为

$$\sum_{k'=q-l+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{p}\alpha_l R(k')e^{-j\omega(k'-q+l)\Delta t}=0,\ \alpha_0=1,\ 1\leqslant q\leqslant p. \tag{10}$$

定义如下函数

$$\operatorname{sgn}(m)=\begin{cases}1, & m>0\\ 0, & m=0,\\ -1, & m<0,\end{cases}$$

$$S(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} R(n) e^{-j\omega n\Delta t},$$

$$u(m)=\begin{cases}1, & m\geqslant 0,\\ 0, & m<0,\end{cases}$$

则有

$$\sum_{k'=q-l+1}^{\infty} R(k') e^{-j\omega k'\Delta t}=s(\omega)-\operatorname{sgn}(q-l+1) \sum_{k'=-u(l-q-1)}^{q-l+u(l-q-1)} R(k') e^{-j\omega k'\Delta t}. \tag{11}$$

将 $k'=k+q-l$ 代回(11)式,并将(11)式代入(10)式,得到

$$s(\omega)=\frac{\sum_{l=0}^{p} \operatorname{sgn}(q-l+1) \sum_{k=u(l-q-1)}^{l-q-u(l-q-1)} \alpha_{l} R(k+q-l) e^{-j\omega(k+q)\Delta t}}{\sum_{l=0}^{p} \alpha_{l} e^{-j\omega l\Delta t}},$$

$$1\leqslant q\leqslant p. \tag{12}$$

根据维纳-辛钦公式的离散形式,并注意到 $R(\tau)=R(-\tau)$, 则得

$$\begin{aligned} P(\omega) &=\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} R(n)\left[e^{-j\omega n\Delta t}+e^{+j\omega n\Delta t}\right]-R(0)\Delta t \\ &=\Delta t\left[S(\omega)+S^{*}(\omega)-R(0)\right] \\ &=2\Delta t \operatorname{Re}[S(\omega)]-R(0)\Delta t. \end{aligned} \tag{13}$$

将(12)式代入(13)式,经整理后得

$$P(\omega)=2\Delta t \frac{\sum_{i=0}^{p} \alpha_{i} \sum_{l=0}^{p} \alpha_{l} \sum_{k=u(l-q-1)}^{l-q-u(l-q-1)} \operatorname{sgn}(q-l+1) R(k+q-l) \cos(k+q-i)\omega\Delta t}{\left|\sum_{i=0}^{p} \alpha_{i} e^{-j\omega i\Delta t}\right|^{2}}$$

$$-R(0)\Delta t. \tag{14}$$

只要估计出 $\{\alpha_i, i=1,2,\cdots,p\}$, 便可通过(12)式和(13)式求出 ARMA$(p,q)$ 谱估计,(14)式就是本文提出的 ARMA(p,q) 谱估计公式.

文[2]中由错误的 ARMA(p,q) 模型

$$y(n+t)=-\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} y(t+n-i)+\sum_{i=0}^{r} r_{i}' u(t+r-i)$$

推导出与 q 无关的 ARMA(p,q) 谱估计公式,文[1]指出了[2]的谱估计公式的错误,但推导出的谱估计公式也有错误. 文[1]将(11)式表示为

$$\sum_{k'=q-l+1}^{\infty} R(k') e^{-j\omega k'\Delta t}=S(\omega)-\operatorname{sgn}(q-l) \sum_{k'=0}^{q-l} R(k') e^{-j\omega k'\Delta t}.$$

此公式当 $q-l=0$ 和 $q-l<0$ 时是不成立的.

三、关于文[3,4]中谱估计公式的讨论

当 $q=p$ 时,(12)式的分子为

$$\sum_{l=0}^{p}\alpha_l\sum_{k=0}^{l-k}R(k+p-l)e^{-j\omega(k+p)\Delta t}$$

$$=\alpha_0\sum_{k=0}^{-p}R(k+p)e^{-j\omega(k+p)\Delta t}+\cdots+\alpha_p\sum_{k=0}^{0}R(k)e^{-j\omega(k+p)\Delta t}$$

$$=R(0)+[R(1)+\alpha_1R(0)]e^{-j\omega\Delta t}+\cdots+$$

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_iR(p-i)+R(p)\right)e^{-j\omega p\Delta t}$$

$$\triangleq\sum_{k=0}^{p}C_ke^{-j\omega k\Delta t},$$

于是得到

$$C_k=R(k)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_iR(k-i),\quad 0\leqslant k\leqslant p. \tag{15}$$

因此当 $q=p$ 时,(12)式表为

$$S(\omega)=\frac{\sum_{i=0}^{p}C_ie^{-j\omega i\Delta t}}{1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_ie^{-j\omega i\Delta t}}. \tag{16}$$

(15),(16)式与文[3]中的公式形式上完全相同,唯一的差别在于文[3]中定义

$$R^+(n)=\begin{cases}0.5R(0), & n=0,\\ R(n), & n>0,\\ 0, & n<0.\end{cases}$$

因此得到

$$R(n)=R^+(n)+R^+(-n).$$

两边作傅氏变换得

$$\begin{aligned}P(\omega)&=\Delta tS^+(\omega)+\Delta t[S^+(\omega)]^*\\&=2\mathrm{Re}[S^+(\omega)]\cdot\Delta t.\end{aligned} \tag{17}$$

由 $R^+(n)$ 的定义式可知(17)式实际上等于(13)式,即有

$$S^+(\omega)+[S^+(\omega)]^*=S(\omega)+S^*(\omega)-R(0).$$

故文[3]中的谱估计公式只是(12)式在 $q=p$ 情况下的特例，只适用于 ARMA(p,p) 过程,或低 SNR 情况下的 A$R(p)$ 过程和 ARMA(p,q) 过程，并且在某些频率上可能出现负谱(文[4]中举例说明了这一点,对于同一正弦信号加白噪声过程,当高 SNR 时出现

负谱，而低 SNR 时无负谱，且估计性能较好）. 文[3]中的谱估计公式是在文 [5] 的工作基础上完成的，而文[5]中的公式是由 ARMA(p, p) 模型推出的，因此文[3]中的谱估计公式并不适用于一般的 ARMA(p, q) 过程.

文[6]由关系式

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \Delta t \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) z^{-m} \\ &= \frac{\left|\sum_{i=0}^{q} \beta_i z^{-i}\right|^2}{\left|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i}\right|^2} \Delta t \\ &\overset{令}{=} \frac{\sum_{k=-q}^{q} C_k \cos \omega k \Delta t}{\left|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{-i}\right|^2} \Delta t, \quad \alpha_0 = 1, \quad C_k = C_{-k}, \\ & z \triangleq e^{-j\omega\Delta t} \end{aligned} \tag{18}$$

出发，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \alpha_i \alpha_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) z^{-(i-j+m)} \\ &= \sum_{k=-q}^{q} C_k \cos k\omega\Delta t \\ &= \sum_{k=-q}^{q} C_k z^{-k}. \end{aligned}$$

令 $i-j+m=k$，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \alpha_i \alpha_j R(k+j-i) z^{-k} = \sum_{k=-q}^{q} C_k z^{-k},$$

于是得到

$$C_k = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \alpha_i \alpha_j R(k+j-i), \quad |k| \leqslant q. \tag{19}$$

由(19)式可以将(18)式的分子改写为

$$\begin{aligned} &2 \sum_{k=0}^{q} C_k \cos k\omega\Delta t - C_0 \\ &= 2 \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} \alpha_l \alpha_i \sum_{k=0}^{q} R(k+i-l) \cos k\omega\Delta t \\ &\quad - \sum_{i=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} \alpha_i \alpha_l R(i-l). \end{aligned} \tag{20}$$

而由(13)式和(14)式可以得到

$$P(\omega)=\Delta t[S(\omega)+S^*(\omega)]-R(0)\Delta t$$

$$=\Delta t\frac{2\sum_{l=0}^{p}\alpha_l\sum_{i=0}^{p}\alpha_i\sum_{k=u(l-q-1)}^{l-q-u(l-q-1)}\operatorname{sgn}(q-l+1)R(k+q-l)\cos(k+q-i)\omega\Delta t}{\left|\sum_{i=0}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}$$

$$-R(0)\Delta t.$$

设 $k+q-i=m$，将上式通分，则分子部分为

$$2\sum_{l=0}^{p}\alpha_l\sum_{i=0}^{p}\alpha_i\sum_{m=q-i+u(l-q-1)}^{l-i-u(l-q-1)}R(m+i-l)\cdot\operatorname{sgn}(q-l+1)\cos m\omega\Delta t$$

$$-R(0)\left|\sum_{i=0}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2$$

$$=2\sum_{l=0}^{p}\sum_{i=0}^{p}\alpha_i\alpha_l\sum_{m=q-i+u(l-q-1)}^{l-i-u(l-q-1)}\operatorname{sgn}(q-l+1)R(m+i-l)\cos m\omega\Delta t$$

$$-R(0)\sum_{i=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\alpha_i\alpha_l\cos(i-l)\omega\Delta t. \tag{21}$$

定义

$$f(\omega)\triangleq\sum_{k=0}^{q}R(k+i-l)\cos k\omega\Delta t-\frac{1}{2}R(i-l), \tag{22}$$

$$g(\omega)\triangleq\sum_{m=q-i+u(l-q-1)}^{l-i-u(l-q-1)}\operatorname{sgn}(q-l+1)R(m+i-l)\cos m\omega\Delta t$$

$$-\frac{1}{2}R(0)\cos(i-l)\omega\Delta t, \tag{23}$$

得到

$$P_f(\omega)=\frac{2\sum_{i=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\alpha_i\alpha_l f(\omega)}{\left|\sum_{i=0}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\cdot\Delta t, \tag{24}$$

$$P_g(\omega)=\frac{2\sum_{i=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}\alpha_i\alpha_l g(\omega)}{\left|\sum_{i=0}^{p}\alpha_i e^{-j\omega i\Delta t}\right|^2}\Delta t. \tag{25}$$

(24)式与(22)式合起来就是文[4]中所用的 ARMA(p,q) 谱估计方法，(25)式与(23)式合起来就是本文提出的 ARMA(p,q) 谱估计公式。式中 $f(\omega)$，$g(\omega)$ 都是 ω, i, l, q 的多元函数，两种谱估计方法采用了不同的函数与 AR 参数组合，逼近 ARMA(p,q) 功率谱密度中的 MA 部分。

四、结 论

(1) 本文推导出的谱估计公式适用于 $1 \leqslant q \leqslant p$ 的 ARMA(p, q) 过程. 这一公式修正了文[1]和[2]中存在的问题. 文[3]中的公式只适用于 $q = p$ 的情况, 文[4]中的公式是较粗略的近似公式,而本文推出的公式则比较完善.

(2) 如何在 $1 \leqslant q \leqslant p$ 的范围内确保谱估计公式的非负性,是一个有待于进一步探讨的问题.

(3) 本文只是给出了一种谱估计公式, 并讨论了文 [1] 到 [4] 中存在的问题. 关于 $R(n)$, $\{\alpha_i\}$, p 和 q 的估计方法及计算实例将在另一篇文章中专门讨论.

参 考 文 献

[1] 张贤达,最大熵谱估计的新拓广,信号与信息处理学术会议论文集,1981.12.
[2] 得丸英胜,竹安数博,離散时间線形モデNのあてはめによるスペクトル密度の推定,計测自動制御学会论文集,第 13 卷,第 2 号, pp. 148—153,1977.
[3] Cadzow, J. A., High Performance Spectral Estimation—A New ARMA Method, *IEEE Trans.*, ASSP-**28** (1980), 524—528.
[4] Kay, S. M., A New ARMA Spectral Estimation, *IEEE Trans.*, ASSP-**28**(1980), 285—288.
[5] Kinkel, J. F. et al., A Note on Covariance-invariant Digital Filter Design and Autoregressive Moving Average Spectrum Analysis, *IEEE Trans.* ASSP-**27**(1979), 200—202.
[6] Kaveh, M., High Resolution Spectrum Estimation For Noise Signal, *IEEE Trans.* ASSP-**27** (1979), 286—287.
[7] Kay and Marple, Spectrum Analysis—A Modern Perspective, Proc. IEEE, **69**(1981), No. 11, 1390—1391.

A FORMULA FOR ARMA SPECTRAL ESTIMATION

Huang Junqin Yu Huili
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In recent years, quite a number of papers have been published in the field of ARMA (p, q) spectral estimation, in which only AR parameters are estimated. some mistakes in those papers are pointed out, and a correct and more complete formula for ARMA (p, q) spectral estimation is established in this paper.