

多变量 CARMA 模型的结构辨识

邓自立 郭一新

(黑龙江省应用数学研究所)

摘 要

本文提出了多变量受控的自回归滑动平均(CARMA)模型结构辨识的新方法。根据模型参数的递推增广最小二乘法(RELS)估计,给出了确定模型的阶、子阶和时滞的F检验判决器,且可得到节省参数模型。本方法推广和改进了 Bokor 和 Keviczky 的结构辨识方法。

数值模拟例子证明了所提出方法的有效性。

一、问题提出

多变量 CARMA (即 ARMAX) 模型广泛应用于预报和控制领域,因此对这类模型的参数估计和结构辨识引起了广泛的兴趣。结构辨识包括模型的阶、子阶和时滞的确定。

Bokor 和 Keviczky^[1] 得出了多变量 CARMA 模型模型阶的 F 检验判别法,但没有给出其 AR 子阶(自回归部分的阶)、MA 子阶(滑动平均部分的阶)、C 子阶(受控部分的阶)和模型时滞的判别法。应指出,在文献中关于时滞的辨识的报道很少。时滞的确定是很重要的。如果模型的时滞不与真实过程的时滞重合,则闭环控制系统可以是不稳定的^[2]。由判别子阶可得到节省参数模型。根据节省原理^[3],要求人们用尽可能少的参数的模型刻画动态系统。由于上述理由, Bokor 和 Keviczky 的结构辨识方法是粗糙的。

本文推广和改进了 Bokor 和 Keviczky 的结构辨识方法,对于多变量 CARMA 模型,用递推增广最小二乘法^[4]代替文献 [1] 中的非递推增广最小二乘法估计模型参数,提出了模型的阶、子阶和时滞的 F 检验判决器,进而可得到节省参数模型,形成了对多变量 CARMA 模型结构的一种完整的辨识方法,其特点是把确定模型结构问题归结为用 F 检验法判别模型中某些参数阵是否为零的统计假设检验问题。

设动态系统用多变量 CARMA 模型描写为

$$A(q^{-1})\mathbf{y}(t) = B(q^{-1})\mathbf{u}(t) + C(q^{-1})\mathbf{e}(t). \quad (1)$$

其中 $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T$ 是 $p \times 1$ 输出向量; T 是转置号; $\mathbf{u}(t)$ 是 $r \times 1$ 输入(控制); $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_p(t))^T$ 是 $p \times 1$ 维零均值高斯白噪声; q^{-1} 是单位滞后算子,例如, $q^{-1}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t-1)$; A, B, C 是 q^{-1} 的矩阵多项式:

$$A(q^{-1}) = I - A_1q^{-1} - \dots - A_nq^{-n},$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1q^{-1} + \cdots + B_nq^{-n},$$

$$C(q^{-1}) = I + C_1q^{-1} + \cdots + C_nq^{-n}.$$

其中 $A_i = (a_{ij}^i)$, $B_i = (b_{ij}^i)$, $C_i = (c_{ij}^i)$ 分别为带元素为 $a_{ij}^i, b_{ij}^i, c_{ij}^i$ 的 $p \times p, p \times r, p \times p$ 系数阵; I 是单位阵. 假设 $\det A(q^{-1})$ 和 $\det C(q^{-1})$ 的零点在单位圆外, n 为模型的阶, 且记(1)式为 CARMA (n). 可能有如下四种情形: 1) 如 $A_n \neq 0$, 或 $A_n = \cdots = A_{m+1} = 0$, 而 $A_m \neq 0$, 则 AR 子阶为 n 或 m ; 2) 如 $C_n \neq 0$, 或 $C_n = \cdots = C_{l+1} = 0$, 而 $C_l \neq 0$, 则 MA 子阶为 n 或 l ; 3) 如 $B_n \neq 0$, 或 $B_n = \cdots = B_{s+1} = 0$, 而 $B_s \neq 0$, 则 C 子阶为 n 或 s ; 4) 如 $B_0 \neq 0$, 或 $B_0 = \cdots = B_{d-1} = 0$, 而 $B_d \neq 0$, 则模型的时滞为零或 d .

显然情形 1)–4) 的判别归结为检验 CARMA (n) 模型中某些参数阵是否为零(阵)的统计假设检验问题. 这是本文方法的基本出发点.

二、RELS 法参数估计

模型(1)可改写成 p 个多输入单输出子模型:

$$y_i(t) = \phi^T(t)\theta_i + e_i(t), \quad i = 1, \cdots, p. \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta_i^T &= (a_{i1}^1, \cdots, a_{ip}^1; \cdots; b_{i1}^n, \cdots, b_{ir}^n; \cdots; c_{i1}^n, \cdots, c_{ip}^n) \\ &= (\theta_i^1, \theta_i^2, \cdots, \theta_i^{2np+(n+1)r}); \\ \phi^T(t) &= (\mathbf{y}^T(t-1), \cdots, \mathbf{y}^T(t-n); \mathbf{u}^T(t), \cdots, \mathbf{u}^T(t-n); \\ &\quad \mathbf{e}^T(t-1), \cdots, \mathbf{e}^T(t-n)). \end{aligned}$$

对 $y_i(t)$ 而言, 它是带外生变量的自回归模型, 含有 $2np+(n+1)r$ 个参数, 记为 ARX(n). 因而辨识模型(1)归结为辨识 p 个子模型 ARX(n).

基于数据 $(\mathbf{u}(i), \mathbf{y}(i))$, $i = 1, \cdots, t$, θ_i 的 RELS 估值为^[4]

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + K_i(t)\hat{e}_i(t), \quad (3)$$

$$\hat{e}_i(t) = y_i(t) - \hat{\phi}^T(t)\hat{\theta}_i(t-1), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^T(t) &= (\mathbf{y}^T(t-1), \cdots, \mathbf{y}^T(t-n); \mathbf{u}^T(t), \cdots, \mathbf{u}^T(t-n); \\ &\quad \hat{\mathbf{e}}^T(t-1), \cdots, \hat{\mathbf{e}}^T(t-n)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^T(t-j) = (\hat{e}_1(t-j), \cdots, \hat{e}_p(t-j)), \quad (6)$$

$$K_i(t) = P_i(t-1)\hat{\phi}^T(t)[W + \hat{\phi}^T(t)P_i(t-1)\hat{\phi}^T(t)]^{-1}, \quad (7)$$

$$P_i(t) = [I - K_i(t)\hat{\phi}^T(t)]P_i(t-1)/W. \quad (8)$$

其中 $i = 1, \cdots, p$; W 为遗忘因子; $0 < W \leq 1$, 且初始值为

$$\hat{\theta}_i(0) = \theta_{i0}, \quad P_i(0) = P_{i0};$$

$$\hat{\mathbf{e}}(j) = \mathbf{u}(j) = \mathbf{y}(j) = \mathbf{0}, \quad j = 0, -1, \cdots, 1-n.$$

基于数据 $(\mathbf{u}(i), \mathbf{y}(i))$, $i = 1, \cdots, N$, 残差平方和为

$$V_i(n) = \sum_{t=n+1}^N [\hat{e}_i^*(t)]^2. \quad (9)$$

其中残差 $\hat{e}_i^*(t) = y_i(t) - \hat{\phi}^T(t)\hat{\theta}_i(N)$, $i = 1, \cdots, N$; $e_i(t)$ 的方差 σ_i^2 的采样估值为

$$\hat{\sigma}_i^2 = V_i(n)/(N-n). \quad (10)$$

三、子模型的阶的确定

由(2)式所示的子模型 ARX(n) 的阶可能比 n 小, 因为其中某些参数可能为零. 基于 N 组数据 $(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$, $t = 1, \dots, N$, 为了确定第 i 个子模型(2)的真实阶 n_i , 可由低阶到高阶相继拟合 ARX(n) 模型, $n = 1, 2, \dots$. 对于合适的阶 n_i , 当阶数再增加时, ARX(n_i) 的残差平方和的变化是不显著的. 可用 F 检验法判断模型阶数变化时相应的残差平方和变化的显著性.

对于 ARX(n) 与 ARX($n+1$) 而言, 统计量

$$F_i = \frac{V_i(n) - V_i(n+1)}{V_i(n+1)} \cdot \frac{N - 2(n+1)p - (n+2)r}{2p+r} \quad (11)$$

渐近于 $F(2p+r, N - 2(n+1)p - (n+2)r)$ 分布^[1,5].

取风险水平为 α (例如, $\alpha = 0.01$ 或 0.05), 查 F 分布表得临界值 F_α . 如 $F_i < F_\alpha$, 则 ARX(n) 是合适的(F 检验不显著); 如 $F_i \geq F_\alpha$, 则 ARX(n) 是不合适的(F 检验显著).

对于 $n = 1, 2, \dots$, 在每两个相邻模型之间用上述 F 检验, 直到 ARX(n_i) 模型是合适的为止, n_i 叫第 i 个子模型的阶, 也叫结构指数^[1]. 为了求 n_i , 仅需拟合 (n_i+1) 个 ARX(n), $n = 1, 2, \dots, (n_i+1)$. 这可用软件包自动完成.

四、节省参数模型、子阶和时滞的确定

为了得到节省参数模型, 在得到的子模型 ARX(n_i) 中, $i = 1, \dots, p$, 必须删去某些实际上可以认为是零的参数, 虽然它们的估值近似于零而不等于零. 子阶和时滞只有在删去这些不显著异于零的参数之后才能辨识出来. 这归结为检验 ARX(n_i) 模型中某些参数是否为零的统计问题.

根据文献[6]的定理 3, 对于子模型 ARX(n_i), 在已知数据 $(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$, $t = 1, \dots, N$ 的条件下, θ_i 的条件分布渐近于正态分布, 带有均值 $\hat{\theta}_i(N)$ 和协方差阵 $\hat{\sigma}_i^2 P_i(N)$, 其中 $\hat{\theta}_i(N)$ 和 $P_i(N)$ 用 RELS 算法(3)~(8)式计算, 而 $\hat{\sigma}_i^2$ 的估值 $\hat{\sigma}_i^2$ 用(10)式计算. θ_i 的第 j 个分量 θ_i^j 的条件分布也是渐近于正态的, 带有均值 $\hat{\theta}_i^j(N)$ 和方差 $\hat{\sigma}_i^2 P_i^{jj}(N)$. 其中 $\hat{\theta}_i^j(N)$ 是 $\hat{\theta}_i(N)$ 的第 j 个分量, $P_i^{jj}(N)$ 是 $P_i(N)$ 的第 (j, j) 对角线元素. 于是 θ_i^j 的 95% 置信区间(即 θ_i^j 以 95% 的概率落入此区间)为

$$\hat{\theta}_i^j(N) - 1.96\hat{\sigma}_i\sqrt{P_i^{jj}(N)} < \theta_i^j < \hat{\theta}_i^j(N) + 1.96\hat{\sigma}_i\sqrt{P_i^{jj}(N)}. \quad (12)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, 2np + (n+1)r$, 或写为

$$\theta_i^j = \hat{\theta}_i^j(N) \pm 1.96\hat{\sigma}_i\sqrt{P_i^{jj}(N)}. \quad (13)$$

显然, 假如 $\hat{\theta}_i^j(N)$ 近似等于零, 则 θ_i^j 的 95% 置信区间将包含零点. 这引出下述节省参数模型及其子阶和时滞的 F 检验判决器:

1) 首先, 在 ARX(n_i) 模型中删去 95% 置信区间包含零点的参数, 然后用 RELS 法

重建节省参数的 $ARX(n_i)$ 模型, 它不包含所删去的参数, 记为 $ARX^-(n_i)$.

2) 用 F 检验法判定所删去的参数是否不显著异于零. 注意统计量

$$F_i = \frac{V_i^-(n_i) - V_i(n_i)}{V_i(n_i)} \cdot \frac{N - 2n_i p - (n_i + 1)r}{M_i} \quad (14)$$

渐近于 $F(M_i, N - 2n_i p - (n_i + 1)r)$ 分布^[1,5]. 其中 $V_i^-(n_i)$ 是节省参数模型 $ARX^-(n_i)$ 的残差平方和; M_i 为所删去的参数个数.

取风险水平为 α , 查 F 分布表得临界值 F_α . 若 $F_i < F_\alpha$, 则节省参数模型 $ARX^-(n_i)$ 被接受(即所删去的参数都不显著异于零); 若 $F_i \geq F_\alpha$, 则应进一步分析. 前者是最一般和常见的情形. 后者是个别的和特殊的情形. 这种情形可能发生在数据组 N 较小或 σ_i^2 较大的场合.

对于 $F_i \geq F_\alpha$ 这种个别情形, 并不意味着所删去的参数都不显著异于零. 由(13)式知, 此时可能显著异于零的参数的 95% 置信区间也包含零点. 这是因为 σ_i^2 较大或 $P_i^j(N)$ 较大(由 N 较小引起)将导致置信区间的扩大, 从而把零点也扩大到置信区间中. 在这种情况下, 应进一步在这些删去的参数中, 保留那些显著异于零的参数, 去掉不显著异于零的参数. 而每个参数是否显著异于零可逐一用 F 检验法判别, 进而得到节省参数 $ARX^-(n_i)$ 模型.

3) 合并所得的 p 个节省参数子模型 $ARX^-(n_i)$, $i = 1, \dots, p$, 写成向量矩阵形式, 可得到节省参数的多变量 $CARMA^-(n)$ 模型, 显然模型的阶为

$$n = \max(n_1, n_2, \dots, n_p). \quad (15)$$

因为在子模型 $ARX^-(n_i)$ 中已删去了子模型 $ARX(n_i)$ 中不显著异于零的参数, 因而在所得到的节省参数的多变量 $CARMA^-(n)$ 模型中的某些系数阵可能为零, 即可能出现第一节所述的四种情形, 由此立刻可确定模型的子阶和时滞. 这样就同时得到了节省参数模型、模型的阶、子阶和时滞, 实现了多变量 CARMA 模型的完整的结构辨识.

五、数值模拟例子

两输入两输出的一阶 CARMA(1) 模型为

$$\mathbf{y}(t) = A_1 \mathbf{y}(t-1) + B_1 \mathbf{u}(t-1) + \mathbf{e}(t) + C_1 \mathbf{e}(t-1). \quad (16)$$

其中模型的阶和各子阶均为 1, 时滞为 $d = 1$, 且

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1.3 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

而 $\mathbf{e}^T(t) = (e_1(t), e_2(t))$ 是零均值、协方差为 $\text{diag}(0.0729, 0.0324)$ 的高斯白噪声, 输入 $\mathbf{u}^T(t) = (u_1(t), u_2(t))$ 是零均值、协方差为 $\text{diag}(1, 1)$ 的独立于 $\mathbf{e}(t)$ 的高斯白噪声.

问题是用本文方法根据模型(16)的 $N = 100$ 组输入输出数据 $(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$, $t = 1, 2, \dots, N$, 求它的参数阵估值 \hat{A}_1 , \hat{B}_1 和 \hat{C}_1 及它的阶、子阶和时滞.

应用本文方法在 VICT 机上的模拟结果如下:

首先建立全参数的 CARMA(1) 模型,各参数阵估值为

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.451624, & \underline{2.702267 \times 10^{-3}} \\ 1.289323, & -0.397201 \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_0 &= \begin{bmatrix} \underline{-0.061099}, & \underline{-0.019741} \\ \underline{-6.3616258 \times 10^{-3}}, & \underline{-0.025763} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0.930229, & -0.366100 \\ \underline{-0.043224}, & 1.510582 \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0.382730, & \underline{-9.588089 \times 10^{-3}} \\ 0.156087, & -0.268142 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

每个子模型的残差平方和分别为

$$V_1(1) = 9.011070, \quad V_2(1) = 4.926072. \quad (19)$$

然后建立全参数的 CARMA(2) 模型,可得它的每个子模型的残差平方和分别为

$$V_1(2) = 7.661304, \quad V_2(2) = 4.218527. \quad (20)$$

取风险水平 $\alpha = 0.01$, 对 $N = 100$, 查 F 分布表可得临界值 $F_\alpha = 3.03$. 而各子模型的 F 值分别为

$$F_1 = 2.554606 < F_\alpha, \quad F_2 = 2.431990 < F_\alpha. \quad (21)$$

因而对每个子模型拟合 ARX(1) 模型是合适的, 即合适的全参数 (非节省参数) 模型为 CARMA(1).

在全参数的 CARMA(1) 模型中,系数阵(18)式中画波号的参数的 95% 置信区间包含零点. 删去这些参数后,重新用 RELS 法建立节省参数子模型,可得各子模型残差平方和分别为

$$V_1^-(1) = 9.224483, \quad V_2^-(1) = 5.172495. \quad (22)$$

进一步用 F 检验法比较节省参数与全参数的子模型. 取风险水平 $\alpha = 0.01$, 对 $N = 100$, 查表有 $F_\alpha > 3.5$, 由此可算出

$$F_1 = 0.734185 < F_\alpha, \quad F_2 = 1.550751 < F_\alpha. \quad (23)$$

因此所建立的两个节省参数子模型为最终被接受的模型. 把它们改写成向量矩阵形式就得到最终被接受的节省参数多变量 CARMA (1) 模型:

$$\mathbf{y}(t) = \hat{A}_1 \mathbf{y}(t-1) + \hat{B}_1 \mathbf{u}(t-1) + \mathbf{e}(t) + \hat{C}_1 \mathbf{e}(t-1). \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.482953, & 0 \\ 1.292680, & -0.400296 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.966308, & -0.350084 \\ 0, & 1.492530 \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0.222468, & 0 \\ 0.111053, & -0.406390 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

由此立刻得到模型的阶和各子阶均为 1, 且时滞为 1. 把各参数阵的估值 (25) 式同真实值 (17) 式比较, 可知 RELS 算法有良好的收敛性.

用 RELS 算法估计 CARMA 模型的参数, 通常 MA 部分 ($C(q^{-1})$) 的参数估值收敛

速度很缓慢。本文限定数据组数 $N = 100$, 为不增加数据组数而又给出模型参数的较好的估计, 在此例中提出了循环递推增广最小二乘法方案, 即以递推次数 $N = 100$ 为一个循环, 后一个循环以前一个循环的参数最终估值作为初始估值。第一个循环的参数初始估值取为 $\hat{\theta}_i(0) = \mathbf{0}$, $P_i(0) = 10^4 I$, 共进行五个循环(共递推 500 次), (25) 式是最终的参数估值。图 1 表明了参数估计的一致性。五个循环共用机时 190 分钟(包括打印)。程序占内存 10K (包括 100 组输入输出数据)。在 VICT 微机上最高可辨识两输入两输出的三阶 CARMA 模型(双精度)。如要辨识阶数和输入输出维数更高的模型, 则应扩充微机内存或在内存容量较大的计算机上进行。

上述模拟结果证明了本文方法的有效性

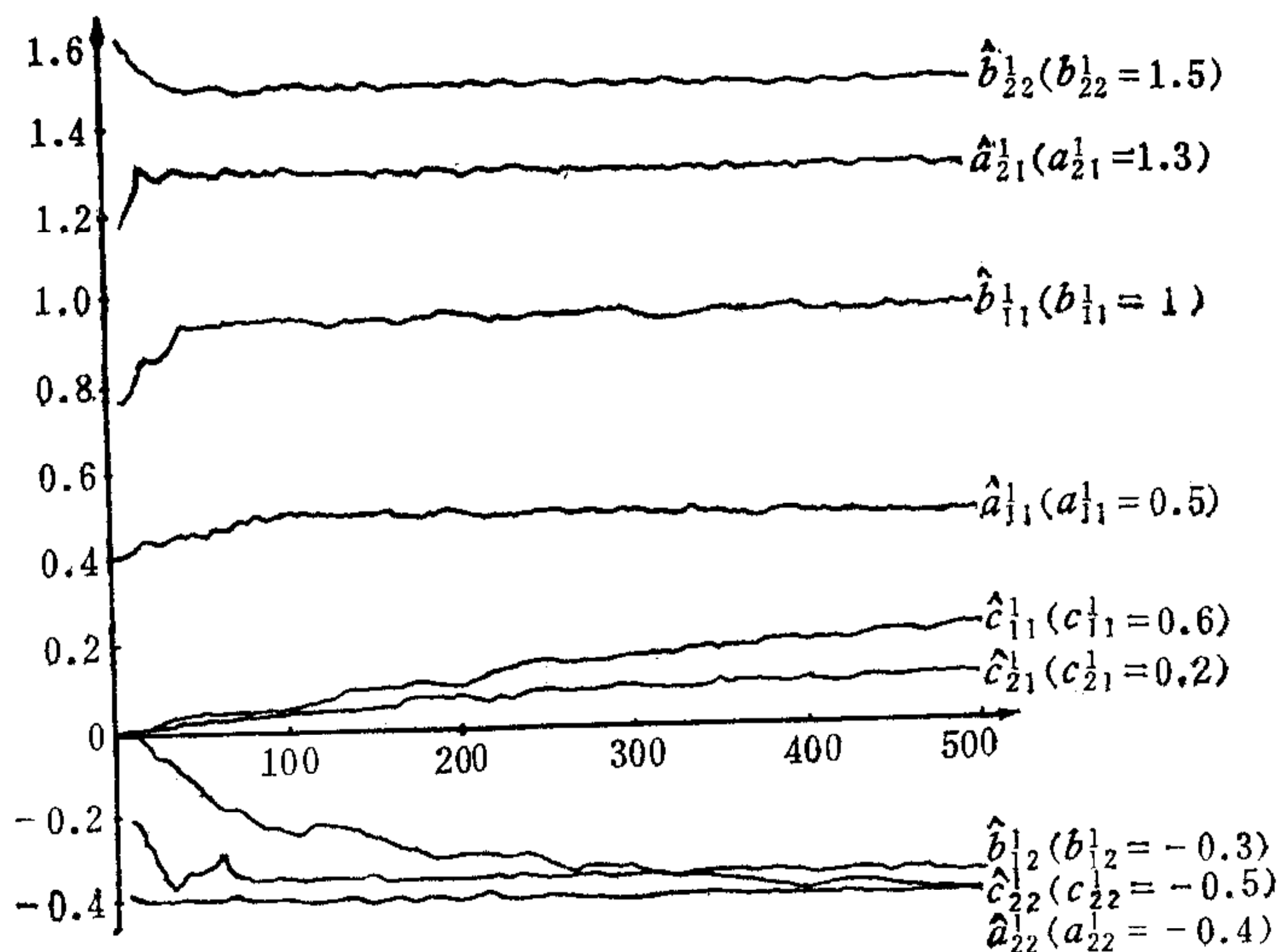


图 1 节省参数模型 RELS 参数估计的收敛性

参 考 文 献

- [1] Bokor, J., L. Keviczky, Structural Properties and Structure Estimation of Vector Difference Equations, *Int. J. Control*, 36(1982), 461—475.
- [2] Kurz, H., W. Goedecke, Digital Parameter-Adaptive Control of Processes with Unknown Dead Time, *Automatica*, 17(1981), 245—252.
- [3] Stoica, P., T. Söderström, On the Parsimony Principle, *Int. J. Control*, 36(1982), 409—418.
- [4] Ljung, L. T. Söderström, I., Gustavsson, Counterexamples to General Convergence of a Commonly Used Recursive Identification Method, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-20 (1975), 643—652.
- [5] Åström, K. J., Lectures on the Identification Problem -the Least Squares Method, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control, Rep. 6806.
- [6] Åström, K. J., B. Wittenmark, Problem of Identification and Control, *J. Math. Anal. Appl.* 34 (1971), 90—103.

STRUCTURE IDENTIFICATION OF MULTIVARIABLE CARMA MODELS

DENG ZILI, GUO YIXIN

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics)

ABSTRACT

In this paper, a new approach of structure identification for multivariable CARMA models, is presented. Based on the recursive extended least squares (RELS) estimation of the model parameters, the F-test detectors for obtaining model order, sub-order and time delay are given, and the parsimonious parameter models are also given. The structure identification approach of Bokor and Keviczky is extended and improved.

A numerical simulation example is given to illustrate the usefulness of the proposed approach.

系统与amp;控制科学青年暑期讨论会在烟台举行

“全国系统与amp;控制科学青年暑期讨论会”于1985年8月在山东省烟台市召开。这次会议是由中国自动化学会控制理论专业委员会支持中国科学院自动化所青年研究生主办的。会议的筹备、组织及与会代表均为从事系统与amp;控制科学研究的硕士、博士研究生和青年科学工作者。代表来自全国20个单位，平均年龄25岁。与会者介绍了各自从事的研究工作并宣读了论文。论文的内容包括双线性系统、非线性系统、自适应系统、系统辨识，预报与控制、系统动力学、生态系统、城市交通控制、工业过程控制、大系统理论、对策论、代数系统、非平衡系统的自组织理论、第五代计算机和机器人技术等。

会议就系统与amp;控制科学的发展方向进行了专题讨论。与会者认为，目前系统与amp;控制理论在处理诸如社会经济系统、生态系统及其它有人参与的复杂系统时，已经遇到了一些本质上的困难。这些困难用现有的手段、工具是难以从根本上克服的。只有在概念上有所突破，方法上有所创新，才能促进学科健康地发展。大家普遍认为系统与amp;控制科学的研究一定不能脱离实际背景，既要取百家之长，又要继承和发扬我国自己的风格，逐步形成我国自己的学派。在这些问题上，与会代表对自己做为青年一代所肩负的责任和重担有清醒的认识。

代表们一致认为：在从事系统与amp;控制科学的青年工作者间，建立更为广泛、更加密切的联系对今后的工作有重要的意义。大家希望今后能定期举行类似的学术活动，交流情况，探讨各种新方向及其应用的可能性，并热切地希望自动化学会及各单位老一辈的科学家对青年科技工作者继续给予帮助和支持，使我国的系统与amp;控制科学能够后继有人，更加蓬勃、兴旺地向前发展。

(陈 亮)