

设计最优调节器的混合法

王子才 权太范

(哈尔滨工业大学)

摘 要

本文根据 Kalman 最优调节器理论和 Wonham 极点配置理论,提出了设计最优调节器的一种方法. 文中提出了等价权阵的概念,研究了权阵与闭环极点的关系以及最优调节器综合评价问题,从而改进了以往工程中常用的试探法.

一、等价权阵概念及权阵与闭环极点关系

最优调节器的设计方法可分为基于二次型性能指标的 Kalman 法和 Wonham 极点配置法两大类. 为寻找它们之间的内在关系,先引入等价权阵的概念.

定义. 在 LQ 问题中,若两个权阵所确定的闭环系统的动态响应完全一致,则两个权阵等价.

设可控标准型系统为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + bu, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X'QX + u^2)dx. \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \cdots -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \{q_{ij}\}.$$

定理 1. 在系统 (1) 中,对角型等价权阵

$$\hat{Q} = \text{diag}(q_{11}, q_{22} - 2q_{13}, \dots, q_{ii} + 2 \sum_{j=1}^i (-1)^j q_{i-ji+1}, \dots, q_{nn}). \tag{2}$$

由定理 1 可知,在系统(1)中原有的权阵 Q 可等价简单的对角型矩阵 \hat{Q} . 于是,在迭代算法中权阵的元素由 $n(n+1)/2$ 个减少到 n 个.

例. 若系统(1)中 $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \alpha_3 = 25, \alpha_4 = 5,$

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -3 & 40 \end{pmatrix}.$$

则由定理 1 求得的等价权阵为

$$\hat{Q}_I = \text{diag}(9, 0, -5, 40), \quad \hat{Q}_{II} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

经计算可知, 权阵 Q , \hat{Q}_I , \hat{Q}_{II} 所对应的系统闭环极点均为 $(-0.24563 \pm j 0.24561, -4.02489 \pm j 2.94959)$, 这时反馈矩阵 F 均为 $(3, 13.188, 3.96875, 3.5403)$.

根据 Hamilton 矩阵性质, 可推出权阵和等价极点关系. 即

定理 2. 设系统(1)的希望闭环极点为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有

$$\begin{aligned} & s^n - (q_n + \alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2})s^{n-1} + \dots + (-1)^k(q_{n-k+1} + \alpha_{n-k}^2) \\ & + 2 \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j \alpha_{n-k-j} \cdot \alpha_{n-k+j} s^{n-k} + \dots + (-1)^n (q_1 + \alpha_0^2) \\ & = (s - \lambda_1^2)(s - \lambda_2^2) \cdots (s - \lambda_n^2) = \prod_{1 \leq i \leq n} (s - \lambda_i^2). \end{aligned} \quad (3)$$

定理 2 揭示了两种设计方法的内在联系, 据此可混合应用两种设计方法.

二、算 法

首先把系统化为可控标准型系统(1). 根据设计要求, 设闭环极点的分布区域 $D(s)$ 如图 1 所示. 在工程设计中往往难于事先给出希望的闭环极点, 但区域 $D(s)$ 还是较容易给出的. 然后根据定理 2, 求出对应边界点处 (即主导极点分别在图 1 中的 L_0, L_N, L_f 处) 的权阵, 并令对应 L_0 的权阵为初始权阵. 计算 $D(s)$ 边界处的权阵, 可确定权阵各元素的变化范围及趋势. 最后根据系统的动态响应择优选择. 但是二次型性能指标是设计最优调节器的一种工具, 而不能做为评价与不同权阵对应的各调节器性能的依据. 为此本文采用了综合评价方法^[1].

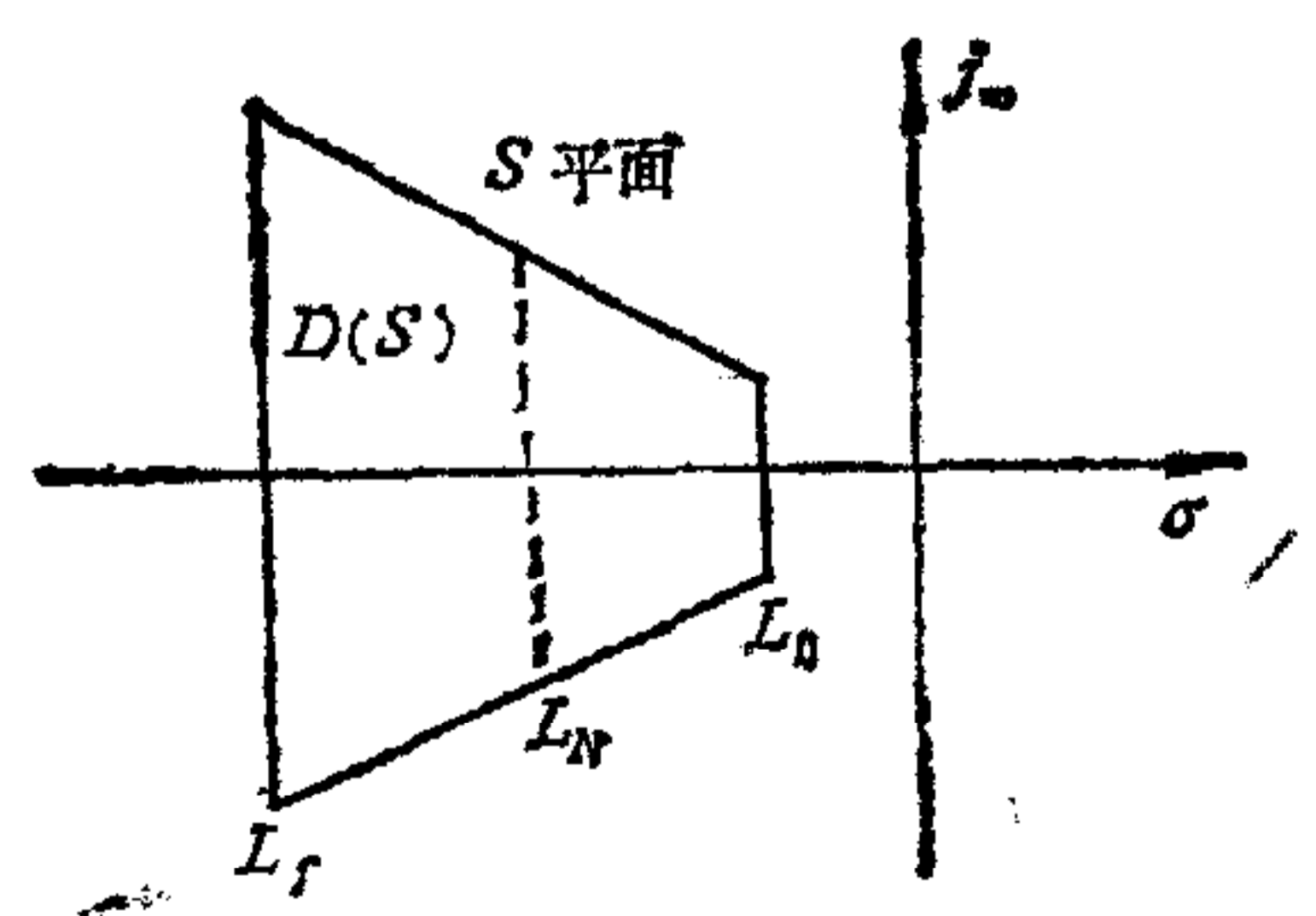


图 1 闭环极点区域 $D(s)$

设调节器性能指标的因素集为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_5\} = \{\text{超调量, 快速性, 稳定性, 抗干扰能力, 控制量大小}\}$. 评价结果取 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\} = \{\text{很好, 好, 一般, 差, 不好}\}$.

根据综合评价的向量定义, 有

$$V = W \circ R = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}. \quad (4)$$

其中 模糊变换 R 为 $U \rightarrow V$, $R = (r_{ij})$ 是由单因素评价组成的五阶模糊矩阵. 在评价

时要考虑系统各状态变量的动态响应, 因此构造 R 时应采用多层次综合评价模型^[1].

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_5\}$$

是权数分配, 反映了设计者的着眼点. 这里令 $\sum_{i=1}^5 w_i = 1$. 表示模糊内积

$$v_j = (w_1 * r_{1j}) * (w_2 * r_{2j}) * \dots * (w_5 * r_{5j}). \quad (5)$$

其中 $*$, \ddagger 分别表示广义与、或运算. 通常认为 $v_j = \bigvee_{i=1}^5 (w_i \wedge r_{ij})$ 是一种保守的悲观的评价, 而 $v_j = \bigwedge_{i=1}^5 (w_i \vee r_{ij})$ 是乐观的评价.

为体现考虑问题时的慎重(保守)和大胆(乐观)的统一, 引入协调引子 λ . 即

$$v_j = \lambda \left(\bigvee_{i=1}^5 (w_i \wedge r_{ij}) \right) + (1 - \lambda) \times \left(\bigwedge_{i=1}^5 (w_i \vee r_{ij}) \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (6)$$

式(6)中, 若 $\lambda = 0$ 则 v_j 反映乐观的评价. 若 $\lambda = 1$ 则 v_j 表示保守的评价. 由此可见, λ 反应了乐观和保守的协调程度. 心理学的实验证明, 人类对多因素的综合判定, 恰好是保守的信息处理机. 为此应取 $0.5 < \lambda < 1$.

图2为计算流程图. 图中 I 为极点配置法, II 为 Kalman 法, III 为模糊评价.

三、计算实例

设某型飞行器状态方程为

$$\dot{X} = AX + bu.$$

其中 x_1 为高度偏差, x_2 为垂直速度偏差, x_3 为俯仰角偏差, x_4 为俯仰角角速度偏差, x_5 为中间变量(无物理意义),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6861 & 3.1729 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -41.1528 & 1334.9416 \\ 0 & 0 & 0 & -1.21139 & 38.6097 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3976 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

经可控标准变换可得系统(1), 即

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 19.3738, \quad \alpha_3 = 29.9825, \quad \alpha_4 = 3.2292.$$

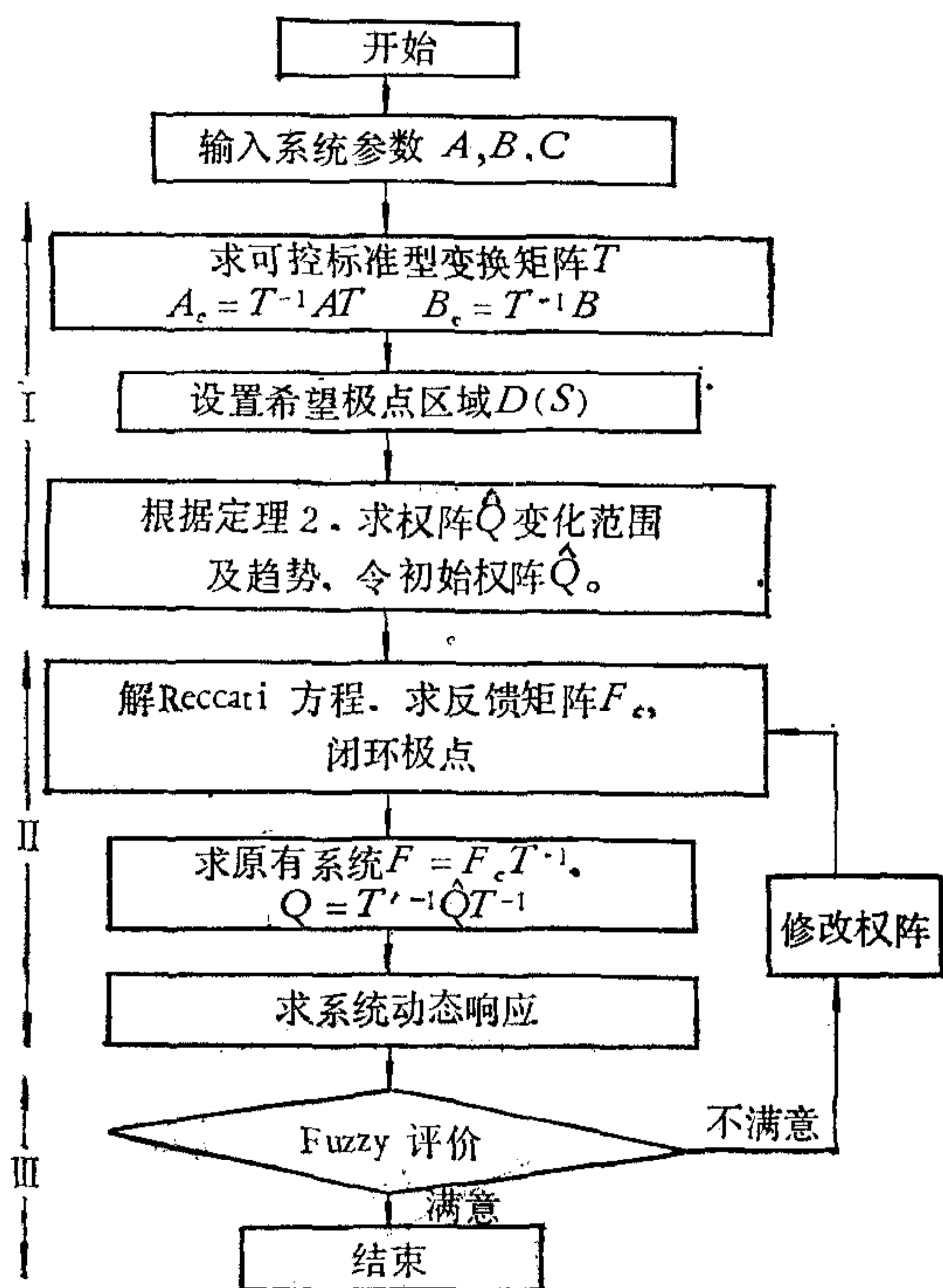


图2 计算流程图

由定理 2 有

$$S^5 - (q_5 - 49.54)S^4 + (q_4 + 773.8)S^3 - (q_3 + 375.3)S^2 + q_2S - q_1 = (S - \lambda_1^2)(S - \lambda_2^2) \cdots (S - \lambda_5^2). \quad (7)$$

表 1

边 界	闭 环 极 点			权阵 $Q = \text{diag}(q_1 q_2 \cdots q_5)$				
L_0	$-0.3 \pm j0.1$	$-1 \pm j0.3$	-1.5	0.027	0.4805	-371.79	-768	53.8
L_N	$-0.5 \pm j0.1$	$-1 \pm j0.2$	-1.5	0.165	1.53	-370	-766	54
L_f	$-1.5 \pm j1$	$-2 \pm j1.5$	-5	10315	3778	1219	-565	80

表 1 表示了由式 (7) 求得的 $D(S)$ 边界点处的参数。由表 1 可确定权阵各元素的变化范围及趋势。经计算及评价, 最后得到反馈阵 F 为 (2.13, 3.65, -2.48, 1.03, 10.626)。这时权阵 $Q = \text{diag}(264, 499, -203, -712, 56.1)$, 闭环极点 λ 为 ($-1.5 \pm j1, -2 \pm j1.5, -0.8$)。

本设计实例说明, 混合法不但综合了 Kalman 和 Wonham 两种设计方法的优点, 而且减少了计算量, 摆脱了传统设计中的盲目性和不全面性。

系统所韩京清同志对本文提出了宝贵意见, 在此深表感谢。

参 考 文 献

- [1] 汪培庄等, 综合评价的数学模型, 第 1 期 (1983)p.61—70。

A MIXTURE METHOD FOR THE DESIGN OF OPTIMAL REGULATORS

WANG ZHICAI QUAN TAIFAN
(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT

A hybrid method for the design of optimal regulators is presented by means of Kalman optimal regulator and Wonham pole assignment theory. The concept of equivalent weighing matrix is proposed. In addition the relation between quadratic weights and poles of closed-system, and the problem of multifactorial evaluations for optimal regulations are studied. The trial and error method conventionally used in engineering is also improved.