

随动系统的奇异最优控制

瞿寿德 穆志纯
(北京钢铁学院)

摘 要

控制量受约束条件下的二次型性能指标 $\int_{t_0}^{t_f} x^T Q x dt$ 最优控制问题, 是一类奇异最优控制问题。本文介绍了把奇异最优控制原理用于高精度快速随动系统的分析设计方法。仿真研究与实时模拟实验的结果证明, 其性能优于用传统方法设计的随动系统。

一、引 言

线性二次型最优控制虽然得到广泛的应用, 但仍有其不足之处。首先, 没有考虑到工程中对控制量和状态变量所加的约束条件; 其次, 线性最优控制律的确定取决于二次型性能指标中加权矩阵的选择, 而权阵的选取往往带有一定的主观性, 至今仍不清楚权阵诸元的值与相应的过渡过程时域指标间的关系。相比之下, 奇异最优控制能以单一的控制策略, 获得 Bang-bang 控制和线性最优控制的长处, 且过渡过程的形状和 Q 阵诸元之间的关系比较容易掌握。应用奇异最优控制的原理设计直流电动随动系统, 可以充分发挥用可控硅整流装置供电和用微型计算机在线控制的技术优势, 设计出各项性能指标都优于传统方法的高精度快速随动系统。

二、随动系统的分析设计

由于可控硅整流装置的容许电流变化率很高, 电流调节内环的响应速度也相当快, 因此由恒定激磁的直流电机所构成的随动系统可以用如下的状态方程来描述:

$$\dot{S} = an, \quad \dot{n} = bi. \quad (1)$$

式中 S 和 n 分别表示位置和速度与给定值 S_r 和 n_r 间的偏差值; i 是作为控制量的电流; a 与 b 皆为常系数。

初始偏差 $S(0) = S_0$, $n(0) = n_0$ 。零终端条件 $S(t_f) = 0$, $n(t_f) = 0$ 。性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (S^2 + qn^2) dt.$$

控制量约束条件为 $-I_m \leq i \leq I_m$ 。状态变量约束条件为 $N_1 \leq n \leq N_2$ 。其中 $N_1 =$

$-n_N - n_r$, $N_2 = n_N - n_r$; n_N 表示额定速度。

在状态变量的约束内域 ($N_1 < n < N_2$) 应有哈密顿函数

$$H = -\frac{1}{2}(S^2 + qn^2) + \phi_1 an + \phi_2 bi,$$

正则方程

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial H}{\partial \phi_1} = an, & \dot{n} &= \frac{\partial H}{\partial \phi_2} = bi; \\ \dot{\phi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial S} = S, & \dot{\phi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial n} = qn - a\phi_1. \end{aligned}$$

根据极大值原理, 最优控制为:

$$i_B^* = \arg \max_i H = I_m \text{sign} \phi_2(t). \quad (2)$$

在最优控制的某个子过程中, $\phi_2(t)$ 几乎处处不为零, 此时的最优控制为 Bang-bang 控制, 控制量取其约束条件边界上的值, 相应的最优轨线称为正常子弧。当位置偏差不很大时, 可能出现奇异情况, 即 $\phi_2(t)$ 在一个或更多的时间间隔上恒等于零。在这种情况下, 应用极大值原理是无法确定最优控制律的, 然而最优控制却确实存在^[1-3]。这时, 控制量在其约束条件的内域取值, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial i} \right|_{i_S^*} &= b\phi_2 = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial i} \right) \right|_{i_S^*} &= b(qn - a\phi_1) = 0, \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial i} \right) \right|_{i_S^*} &= b(qbi_S^* - aS) = 0. \end{aligned}$$

由此可得奇异最优控制律

$$i_S^* = \frac{a}{qb} S. \quad (3)$$

相应的奇异弧为

$$C = \left\{ (S, n) \mid S + \sqrt{q}n = 0, |S| \leq \frac{qb}{a} I_m \right\}. \quad (4)$$

事实上, 若考虑到零终端条件, 则性能指标可以改写为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (S + \sqrt{q}n)^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{q}}{a} S_0^2.$$

由上式可以看出: 如果相点在弧线 $S + \sqrt{q}n = 0$ 上运动, 则性能指标 J 将达到其绝对极小值^[2,3]。式(3)所表示的奇异最优控制律中, 控制量仅是输出量的线性函数, 这样的控制是不能使系统稳定工作的, 修正的方法是在这个控制律中增加某些在奇异弧上恒等于零的附加项, 并根据系统稳定性条件确定所引进的任意常数^[2]。由此, 奇异最优控制律应改为

$$i_S^* = -\frac{a}{qb} S - \frac{2a}{\sqrt{q}b} n. \quad (5)$$

这类控制问题即“部分奇异”(Partial Singular)控制问题^[4,5]。最优轨线是由对应于 Bang-bang 控制的正常子弧和对应于奇异控制的奇异子弧连接而成。连接点应满足加强的广义 Legendre-Clebsch 必要条件^[6]：

$$(-1)^m \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} \frac{\partial H}{\partial u} \right] = qb^2 > 0. \quad (6)$$

式中 m 表示最优奇异弧的阶数。对于本文所讨论的这类系统,连接条件总是能够满足的。

当受控对象的参数给定后,奇异最优控制及其相应的奇异弧仅由二次型性能指标中的加权阵确定。对于本文所讨论的这种比较简单情况,仅仅取决于元素 q 。一般说来, q 值越大,奇异弧就越平、越长,过渡过程时间越长;反之, q 值越小,则奇异弧就越陡、越短,过渡过程时间也相应地缩短。但当 q 值小于某一数值时,奇异控制过程会出现超调,电动机将反转,这在高精度的随动系统中是不允许的。同时还要兼顾状态变量达到其约束边界的情况。在约束边界上, $g(n) = (N_1 - n)(N_2 - n) = 0$ 。由于

$$\frac{dg(n)}{dt} = b(2n - N_1 - N_2)i_g^* = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

其中 t_1 和 t_2 分别表示进入和离开约束边界的时刻,故有 $i_g^* = 0$ 。可以证明,在相迹进入和离开状态变量约束边界的时刻,伴随变量 $\psi(t)$ 能够满足跳跃条件^[7]。综合考虑对各方面的影响,对于所讨论的这类系统,选择 $q > (2an_N/bI_m(1 + \sqrt{28}))^2$ 是适宜的。

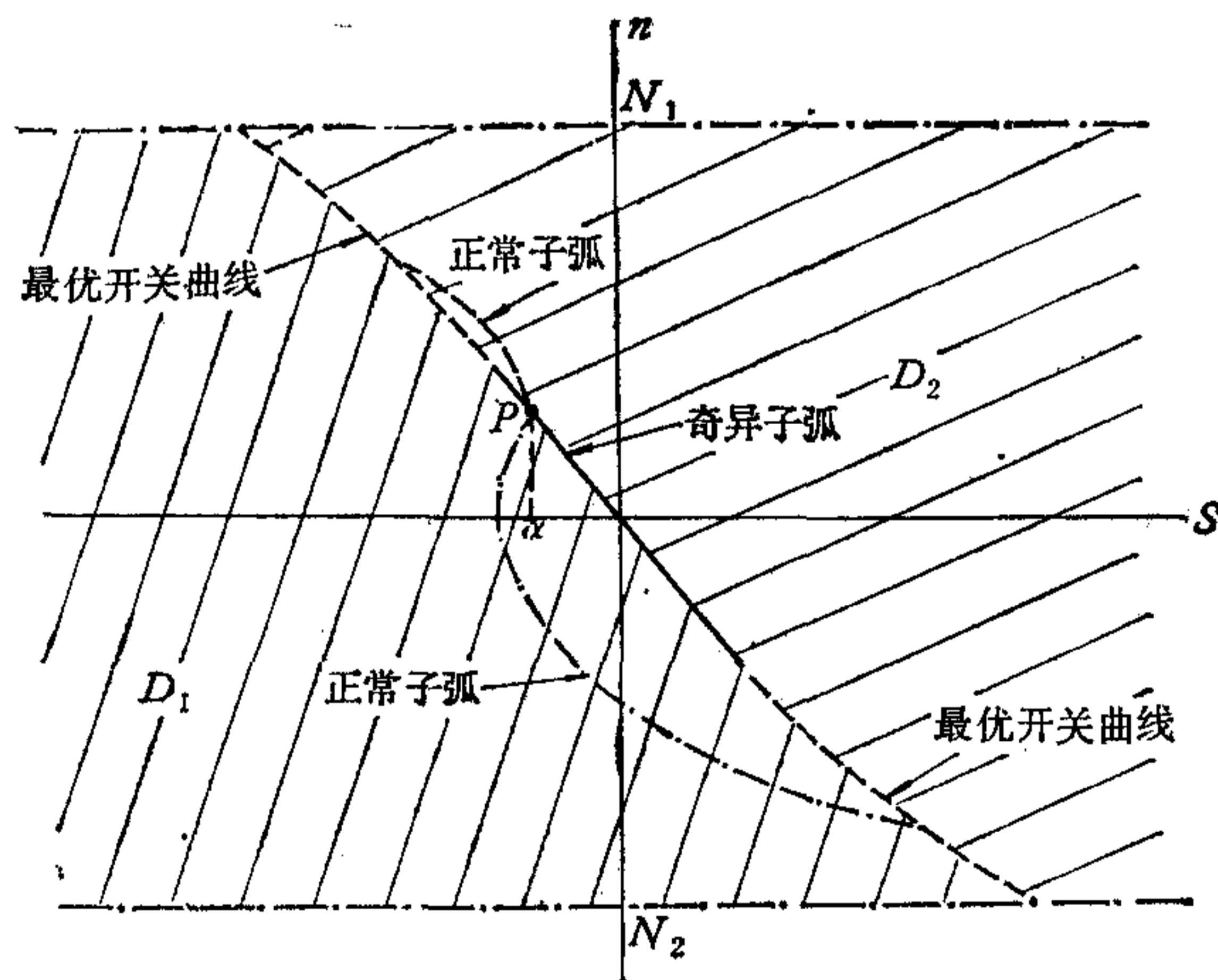


图 1

最优开关曲线可按下述方法计算。在图 1 中,设正常子弧在 t_s 时与奇异子弧相交于 $P(\alpha, -\alpha/\sqrt{q})$ 点, $|\alpha| \leq bI_m q/a$, 则连接奇异子弧的正常子弧必满足正则方程 (其中 $i = I_m \text{sign} \psi_2(t)$) 及相应的末值条件为 $S(t_s) = \alpha, n(t_s) = -\alpha/\sqrt{q}; \psi_1(t_s) = -\sqrt{q} \alpha/a, \psi_2(t_s) = 0$ 。对正则方程逆时间积分,可求得正常子弧的相坐标方程式以及 $\psi_2(t)$ 第一次取零值的开关时刻;连续变化 α 的数值,可算出最优开关曲线的第一部分。据此,用相同的办法可算出开关曲线的第二部分。依此类推,可见,正常子弧的最优开关曲线是由若干子线段组成的。

综上所述,最优控制律可归纳如表 1。

表 1

在奇异弧上 ($S + \sqrt{q}n = 0$)	在状态变量约束边界上	在域 D_1	在域 D_2
$i_B^* = -\frac{a}{qb}S - \frac{2a}{\sqrt{q}b}n$	$i_B^* = 0$	$i_B^* = I_m$	$i_B^* = -I_m$

三、仿真研究与实时模拟实验

现以某连轧机的电动压下装置作为随动系统的一个实例。直流电动机的主要技术参数如下：额定功率 $P_N = 220\text{KW}$ ，额定电压 $U_N = 440\text{V}$ ，额定电流 $I_N = 564\text{A}$ ，额定转速 $n_N = 1000$ 转/分，折算到电动机轴上的飞轮转矩 $GD^2 = 46$ 公斤米²，过载能力是额定电流的 2.5 倍，主回路总电阻 $R_\Sigma = 0.058\Omega$ ，总电感 $L_\Sigma = 1.35\text{mH}$ ， $C_e = 25.5$ 伏/转/秒， $C_m = 0.412$ 公斤米/安， $T_D = \frac{L_\Sigma}{R_\Sigma} = 23.3$ 毫秒， $T_M = GD^2 R_\Sigma / 375 C_e C_m = 41$ 毫秒。减速箱和压下螺丝的比例系数 $K = 0.075$ 毫米/转/秒(图 2)。电动压下装置是由传统的三环系统来控制的。取给定的阶跃型信号为 $S_r = 1.0$ 毫米，分别对现有的控制方案和奇异最优控制方案(选取 $q = 9.5036 \times 10^{-5}$)进行了仿真实验，结果示于图 3。由图可见，后者的响应速度快，跟踪精度高。

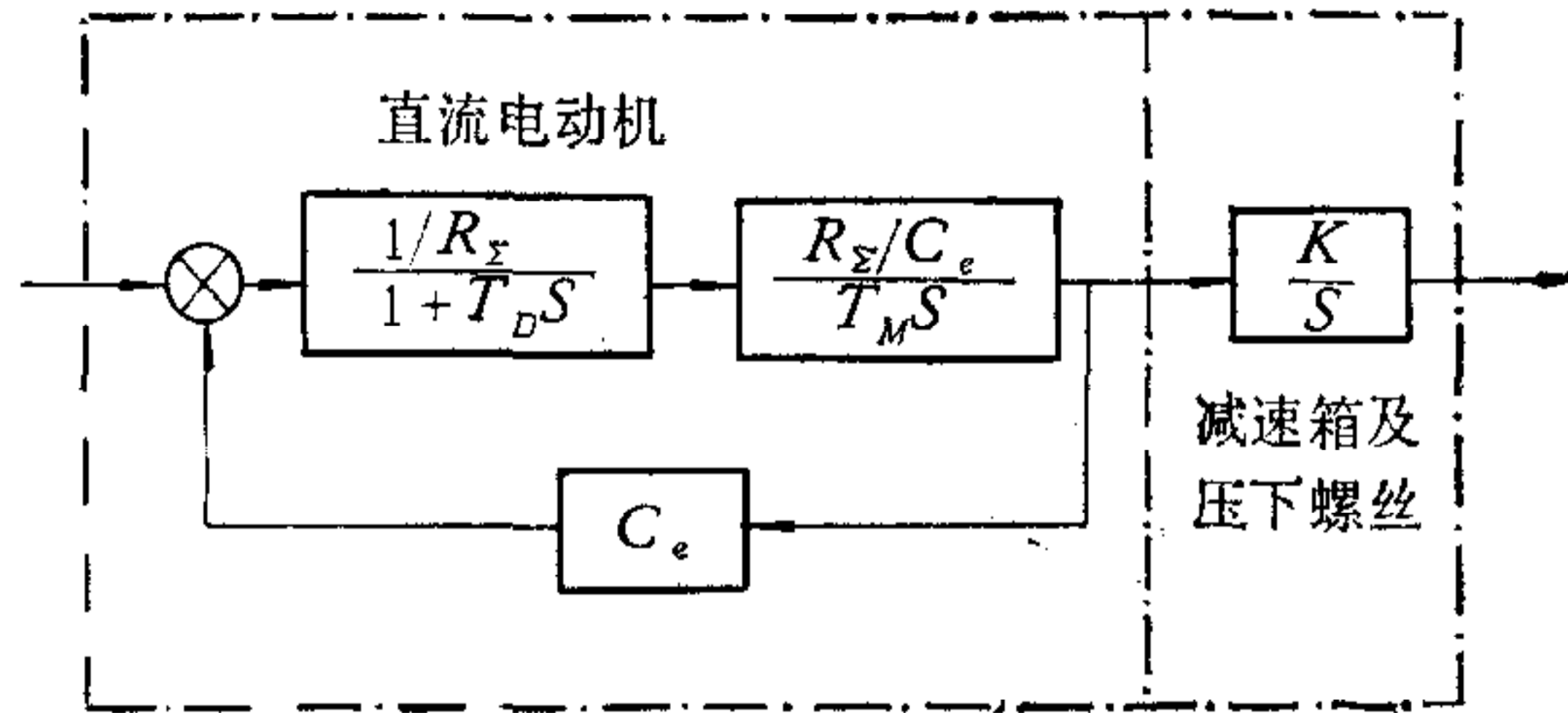


图 2

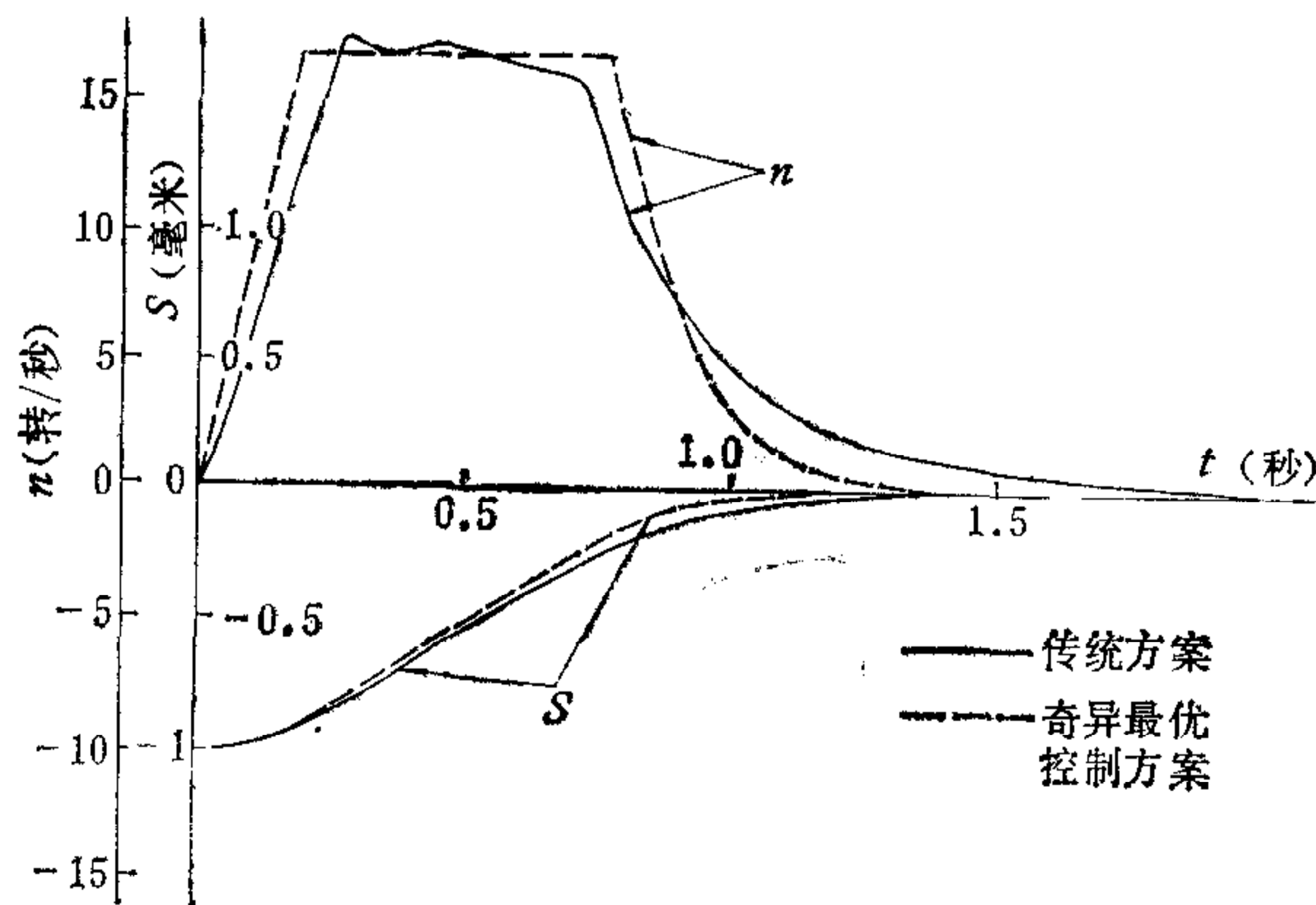
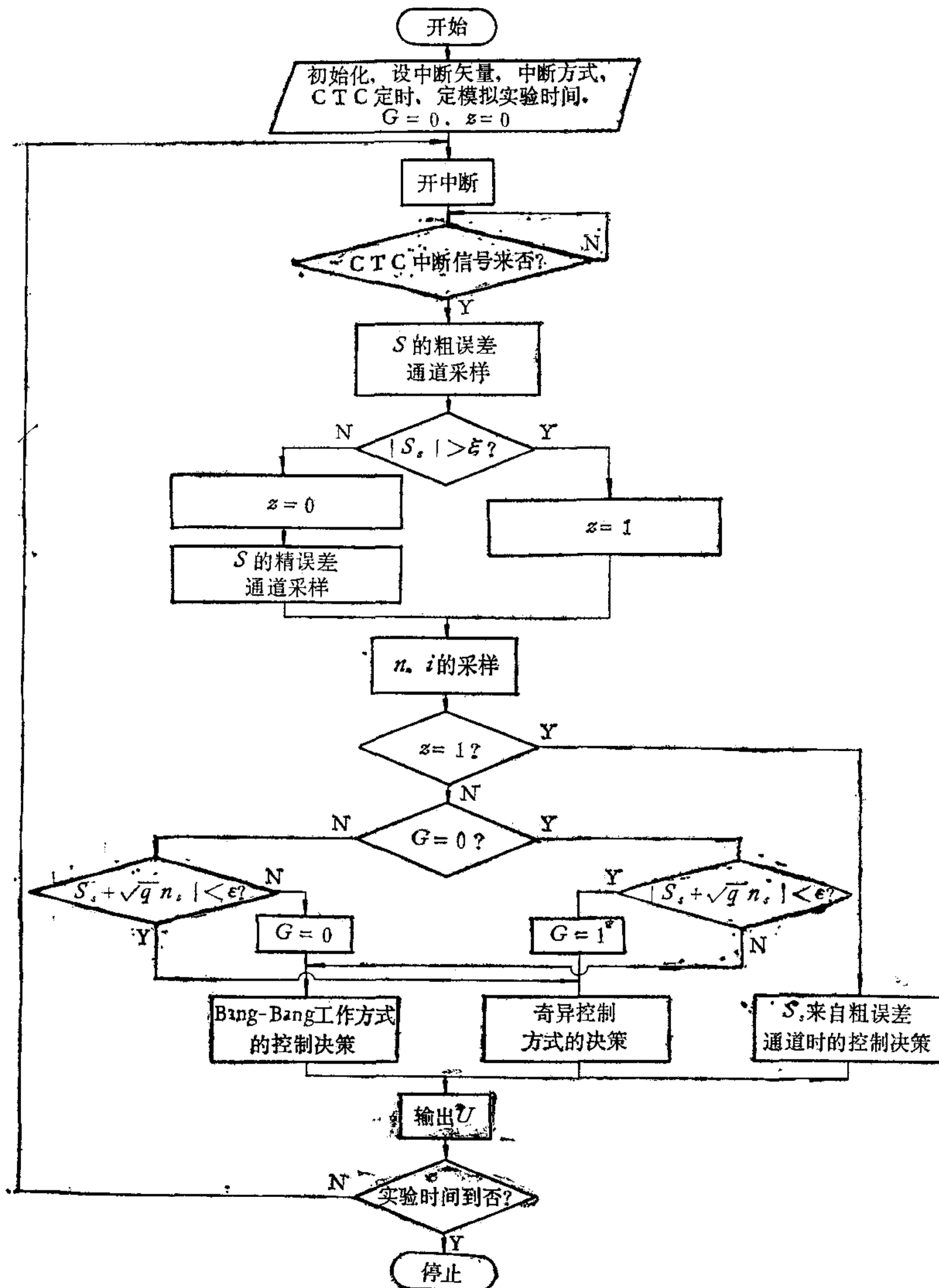


图 3

在阶跃加斜坡型给定信号 $S_r = 1.0 + 0.3t$ 毫米作用下，奇异最优控制可保证无稳

态跟踪误差, 而现有系统的稳态跟踪误差为 0.1 毫米. 对正弦信号 $S_r = 1.5 \sin 0.628 t$ 毫米, 奇异最优控制也有良好的复现能力.

为了考察新方案实现的技术可行性, 在实验室用 TP-801 型单板机 (8 位字长, 工作主频 2 兆赫) 对上述压下装置的动态模型进行了实时模拟实验. 程序框图和实测曲线分别示于图 4 和图 5. 实验结果表明, 只需用低档的单板机作为控制器, 就可以相当高的精度完成所要求的功能.



S_s : S 的采样值.

n_s : n 的采样值.

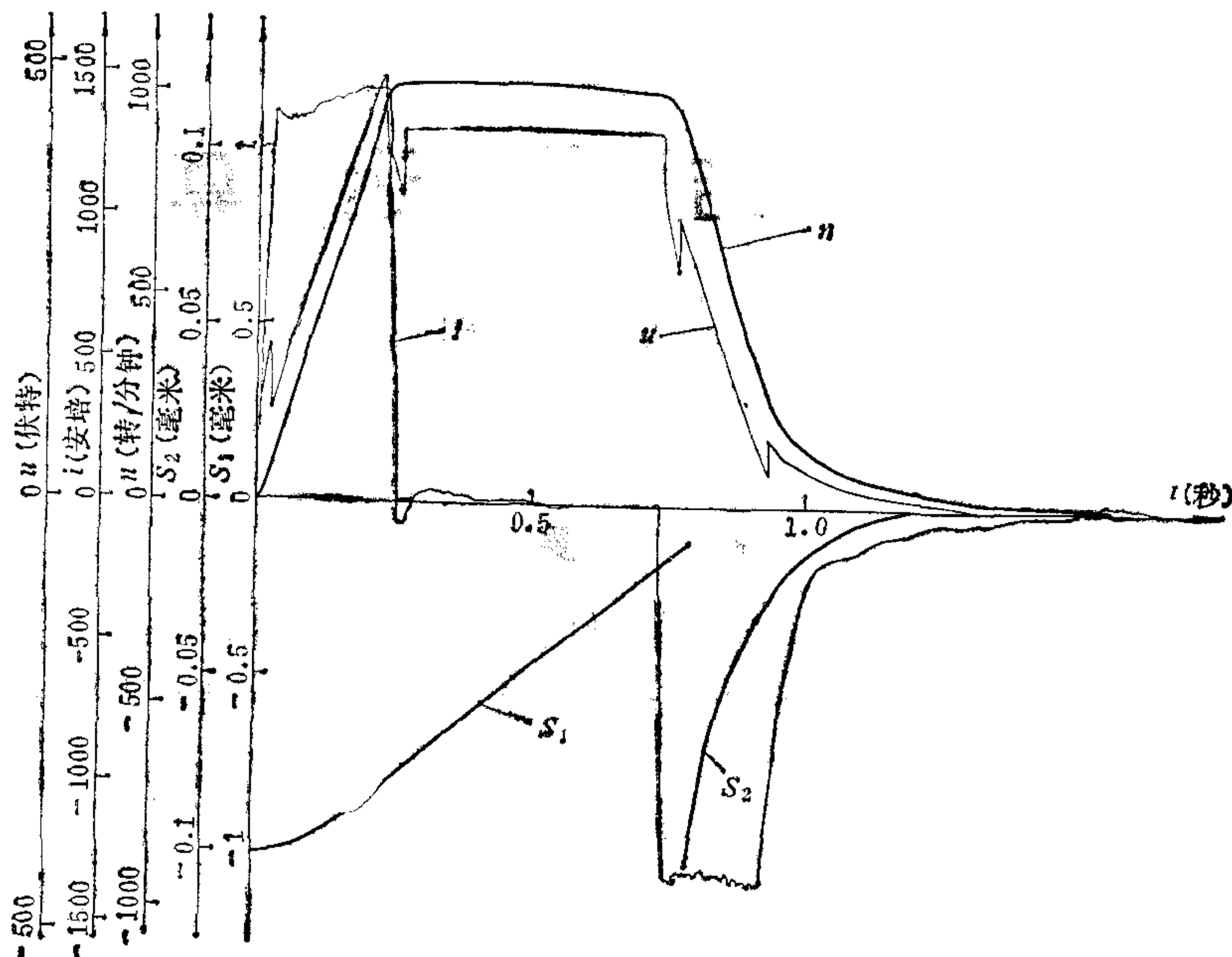
ξ : 选通粗或精通道的界限值.

G : 控制标志. $G=0$ 表示上次采样间隔内, 状态点不在奇异控制弧带内, 否则 $G=1$.

z : 控制标志, $z=0$ 表示 S_s 来自精误差通道, 否则 $z=1$.

e_1 : 奇异控制弧带宽度, $e_1 > e_2$.

图 4



u : 可控硅整流装置输出电压值
 S_1 : 粗误差通道采样值
 S_2 : 精误差通道采样值

参 考 文 献

- [1] Johnson, C. D. and Gibson, J. E., Singular Solutions in Problems of Optimal Control, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-8 (1963), 4—15.
- [2] Wonham, W. M. and Johnson, C. D., Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Performance Index, *Trans. ASME, J. Basic Engng.* 86 (1964), 107—115.
- [3] Bass, R. W. and Webber, R. F., On Synthesis of Optimal Bang-Bang Feedback Control Systems with Quadratic Performance Index, *Proc. 6th JACC* (1965), 213—219.
- [4] Bell, D. J. and Jacobson D. H., *Singular Optimal Control Problems*, Academic Press, (1975).
- [5] Jacobson, D. H., On Singular Arcs and Surfaces in a Class of Quadratic Minimization Problems, *J. Math. Analysis Application*, 37(1972), 185—201.
- [6] McDanell, J. P. and Powers, W. F., Necessary Conditions for Joining Optimal Singular and Non-singular Subarcs, *SIAM J. Control*, 9(1971), 161—173.
- [7] Knowles G., *An Introduction to Applied Optimal Control*, Academic Press, (1981).
- [8] Clements, D. J. and Anderson, B. D. O., *Singular Optimal Control: The Linear-quadratic Problem*, Springer-Verlag, (1978).

SINGULAR OPTIMAL CONTROL OF SERVOMECHANISMS

QU SHOUBE MU ZHICHUN

(Beijing University of Iron and Steel Technology)

ABSTRACT

Optimal control for quadratic performance indices with control constraints is a class of singular optimal control problem. In this paper, an analytical design method for time-optimal servomechanisms with high accuracy based on singular optimal control principles is described. The results of simulation and real time experiments are also given.