

# 关于准确定位的初步探索

罗兴权

(鞍山钢铁公司自动化研究所)

## 摘 要

本文探讨了位置控制系统的准确定位问题,给出了多级减速折线的特解公式、六个完备的性质、位置控制系统的最大减速级数和使减速时间最小的各折线段斜率的方程式,同时也给出了一个位置控制系统的试验实例。

## 一、引 言

如位置控制系统以最大减速度  $a_m$  进行恒减速,则有

$$v^2 = 2a_m S, \quad (v \leq v_m). \quad (1)$$

这个抛物线型减速过程在接近顶点时,切线斜率无限增加,其精确的控制是物理不可实现的。为了便于用计算机进行控制,有必要进行折线定位的理论研究。图1所示系统的关键在于如何选择控制作用  $W_1$ 。

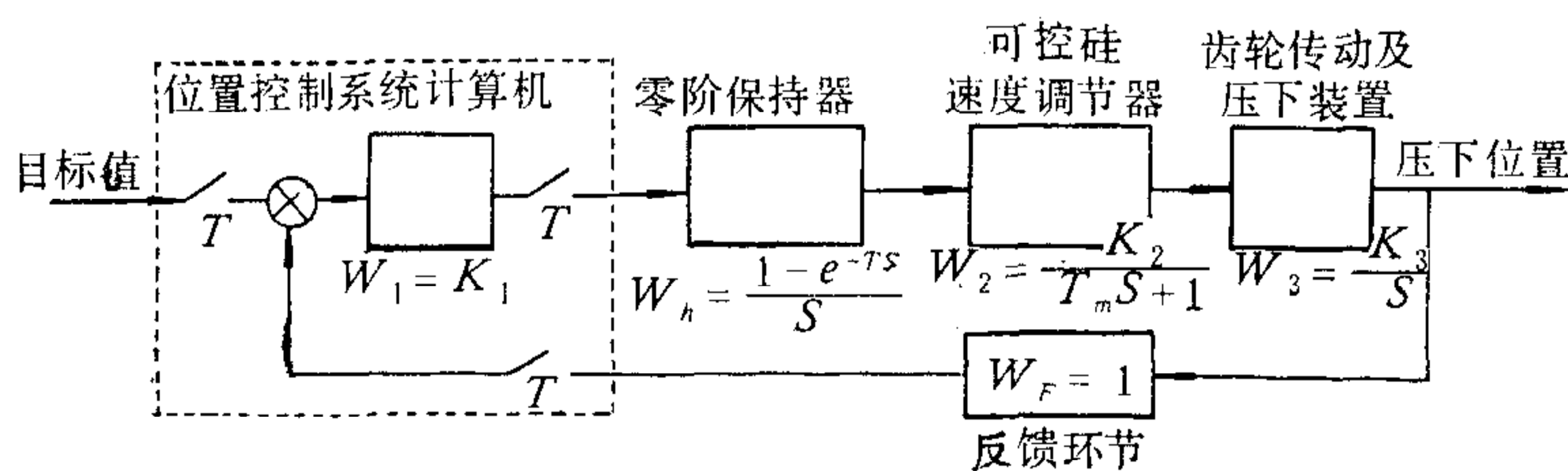


图1 计算机位置控制系统

## 二、关于二级减速折线的探讨

### 1. 二级减速点的求取

对直线段内的任一点  $p(s, v)$ , 有

$$a = \frac{dv}{dt} = kv. \quad (2)$$

这是一个变减速运动。为了使系统最快地减速, 应选

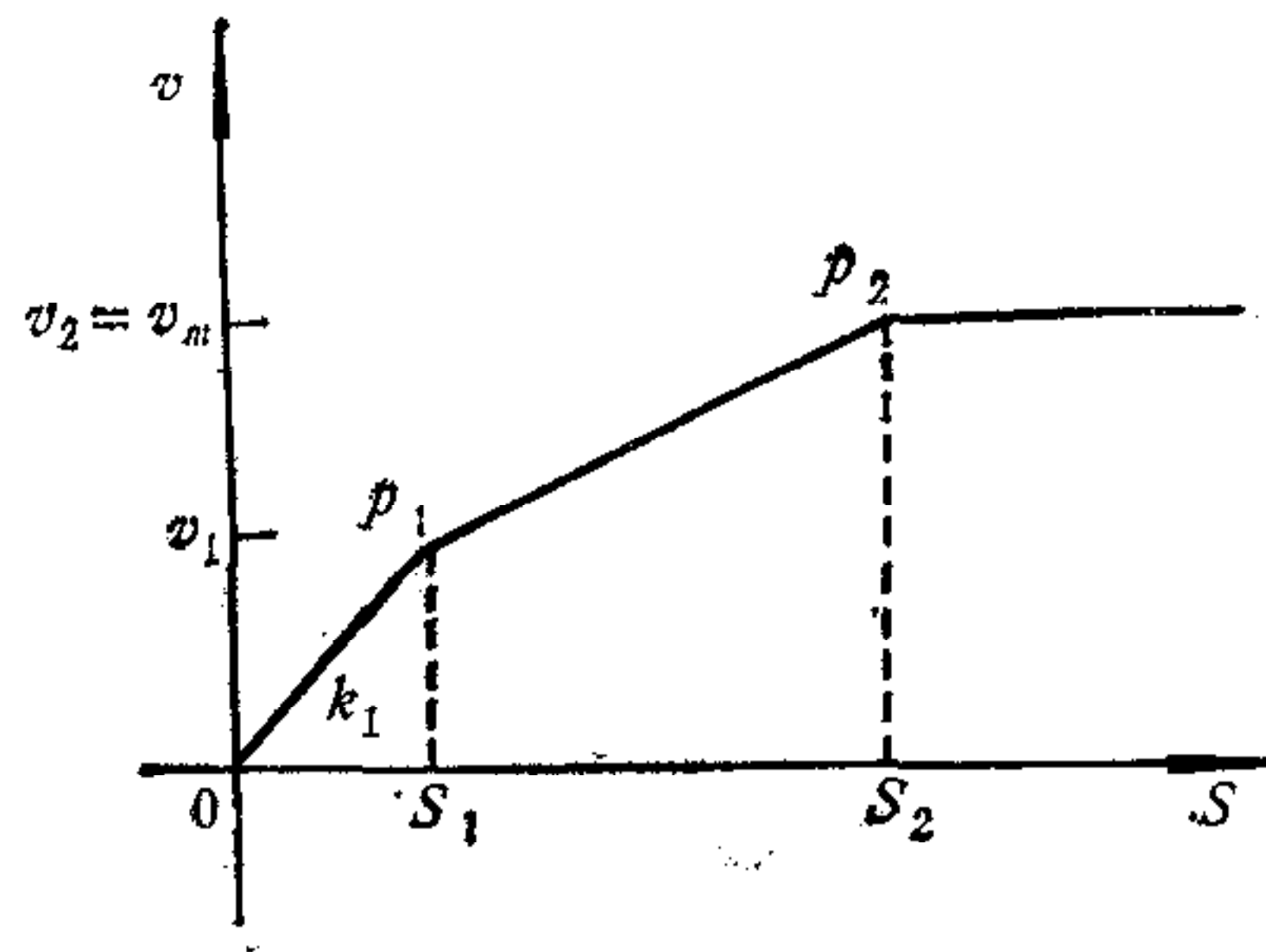


图2 二级减速折线

$$a_{p_1} = k_1 v_1 = a_m, \tag{3}$$

$$a_{p_2} = k_2 v_2 = a_m. \tag{4}$$

根据图2和式(3),(4)列写方程,其解为

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 = v_m, \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 = \frac{a_m}{v_2}, \end{array} \right. \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{v_1^2}{a_m} = \frac{2a_m s_2 \pm v_m \sqrt{4a_m s_2 - 3v_m^2} - v_m^2}{2a_m}, \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{v_m \pm \sqrt{4a_m s_2 - 3v_m^2}}{2}, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{a_m}{v_1} = \frac{2a_m}{v_m \pm \sqrt{4a_m s_2 - 3v_m^2}}. \end{array} \right. \tag{9}$$

应用恒等条件

$$S_2 = S_1 + \overline{S_1 S_2} = \frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2 - v_1}{k_2} = \frac{v_m^2 k_1^2 - a_m v_m k_1 + a_m^2}{a_m k_1^2}, \tag{10}$$

将(5)–(10)联立,可得到二级减速折线的解:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_2 = \frac{3}{4} \frac{v_m^2}{a_m} = 0.75 \frac{v_m^2}{a_m}, \end{array} \right. \tag{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 = v_m, \end{array} \right. \tag{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 = \frac{a_m}{v_m}, \end{array} \right. \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{4} \frac{v_m^2}{a_m} = 0.25 \frac{v_m^2}{a_m}, \end{array} \right. \tag{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} v_m = 0.5 v_m, \end{array} \right. \tag{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 2 \frac{a_m}{v_m}. \end{array} \right. \tag{16}$$

## 2. 二级折线减速的等效抛物线型减速度

称根据二级折线减速距离  $S_2$  所求得的

$$a_2 = \frac{v_m^2}{2s_2} = \frac{v_m^2}{2 \times \frac{3}{4} \frac{v_m^2}{a_m}} = \frac{2}{3} a_m$$

为二级折线减速的等效抛物线型减速度。

### 三、关于多级减速折线的探讨

#### 1. $N$ 级减速折线的减速距离 $S_N$ 和等效的抛物线型减速度 $a_N$

一级折线减速在文[1]中给出, 三级可用类同二级的方法导出, 其等效的抛物线型减速度开列如下:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} a_m = \frac{1}{1+1} a_m, \\ a_2 = \frac{2}{3} a_m = \frac{2}{2+1} a_m, \\ a_3 = \frac{3}{4} a_m = \frac{3}{3+1} a_m. \end{cases}$$

应用数学归纳法可以证明  $N$  级折线的

$$\begin{cases} s_N = \frac{N+1}{2N} \frac{v_m^2}{a_m}, & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_N = \frac{N}{N+1} a_m. & (18) \end{cases}$$

#### 2. 关于 $N$ 级折线的公式

$$\begin{cases} a_{N-i} = \frac{N-i}{(N-i)+1} a_m, & (19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{N-i} = \frac{(N-i)(N-i+1)}{2N^2} \cdot \frac{v_m^2}{a_m}, & (20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{N-i} = \frac{N-i}{N} v_m, & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{N-i} = \frac{N}{N-i} \frac{a_m}{v_m}, i = 0, 1, \dots, N-1. & (22) \end{cases}$$

#### 3. $N$ 级折线减速所具有的性质

1) 减速距离等效性.  $N$  级折线的减速距离  $S_N = \frac{N+1}{2N} \frac{v_m^2}{a_m}$  与以  $a_N = \frac{N}{N+1} a_m$  为恒减速度的抛物线型减速的减速距离相等。

2) 距离收敛性质.  $N$  级折线的减速距离序列  $\left\{ S_N = \frac{N+1}{2N} \frac{v_m^2}{a_m} \right\}$ , 收敛于以系统最大减速度  $a_m$  为恒减速度的抛物线型减速距离  $s = \frac{v_m^2}{2a_m}$ .

3) 时间收敛性质.  $N$  级折线的减速时间序列  $\{t_N\}$  收敛于以  $a_m$  为恒减速度的抛物线型的减速时间  $t = \frac{v_m}{a_m}$ .

证明。设  $s_0 = \alpha s_1, 0 < \alpha < 1$  为定位精度,  $s_0$  对应折线上的  $p_0(s_0, v_0)$ , 则

$$\Delta t_1 = t_{p_1 p_0} = \int_0^{\Delta t_1} d\tau = - \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{k_1 s} = \dots = \frac{1}{N} \frac{v_m}{a_m} \ln \frac{v_m^2}{N^2 a_m s_0}, \tag{23}$$

$$\Delta t_{N-i} = t_{p_{N-i} p_{(N-i)-1}} = - \int_{s_{N-i}}^{s_{(N-i)-1}} \frac{ds}{v} = \frac{N-i}{N} \frac{v_m}{a_m} \ln \frac{N-i}{N-i-1}, \tag{24}$$

$$t_N = \sum_{i=0}^{N-2} \Delta t_{N-i} + \Delta t_1 = \dots = \frac{v_m}{a_m} \left\{ \ln N + \frac{1}{N} \ln \frac{v_m^2}{NN! a_m s_0} \right\}. \tag{25}$$

将  $s_0 = \alpha s_1 = \alpha \frac{v_m^2}{N^2 a_m}$  代入(25)式, 则

$$\begin{aligned} t &= \lim_{N \rightarrow \infty} t_N = \frac{v_m}{a_m} \ln \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\sqrt{N!}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ &= \frac{v_m}{a_m} \ln \{ e \cdot 1 \cdot 1 \} = \frac{v_m}{a_m}. \end{aligned} \tag{26}$$

4) 逐一相切。N级减速折线与等效的抛物线型减速曲线相切在左端点。

5) N级减速折线簇和等效的抛物线型减速曲线簇共收敛于以系统最大减速度  $a_m$  为恒减速度的抛物线型减速曲线  $v^2 = 2a_m s$ 。

6) 速度是时间的指数衰减函数。当取  $p_{N-i}$  为时间的起点时, 折线  $p_{(N-i)-1} p_{N-i}$  上任意点  $p(s, v)$ , 有  $v = v_{N-i} e^{-k_{N-i} t}$ 。

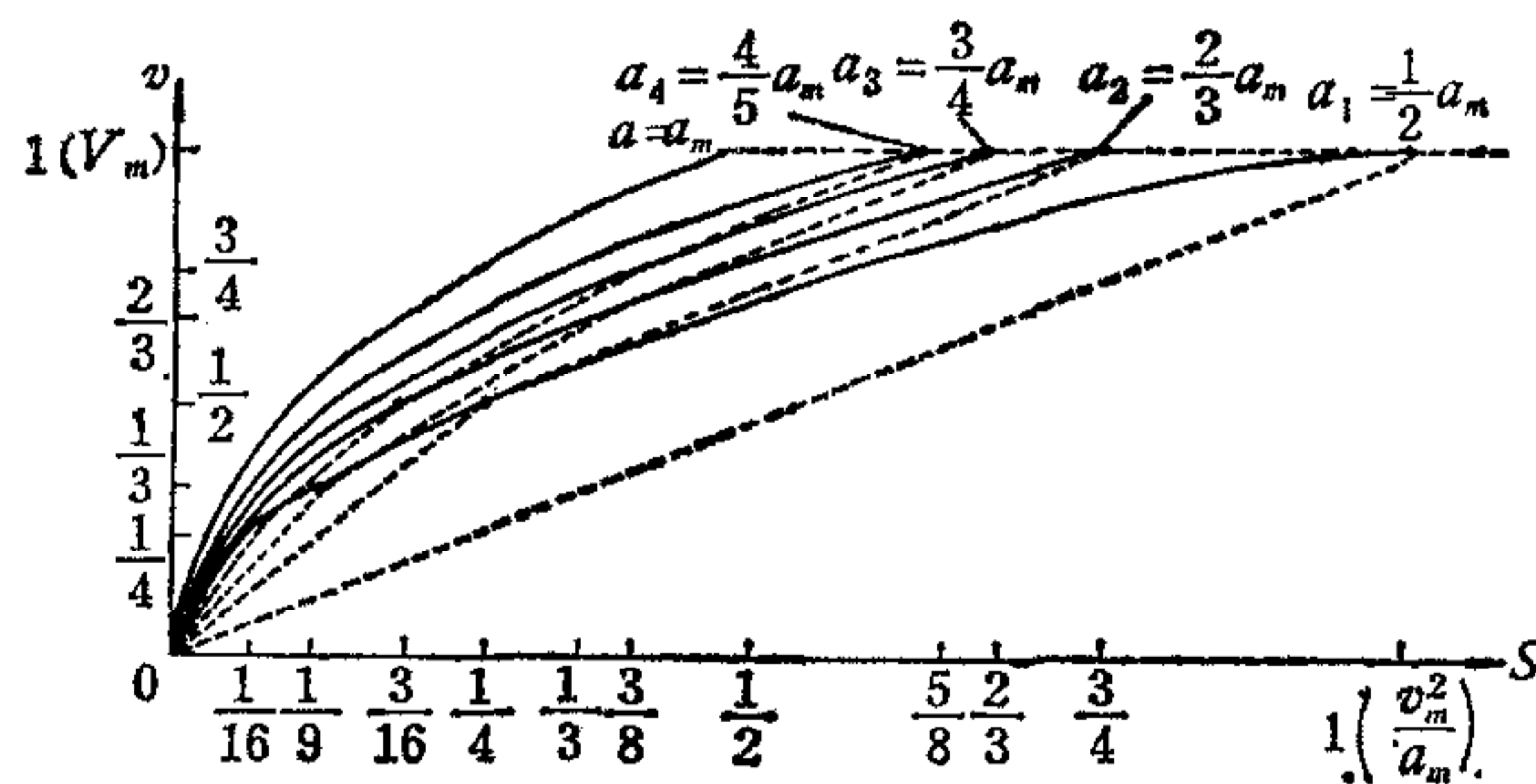


图3 抛物线簇与折线簇

#### 4. 控制系统对增益的限制和最大减速折线级数的确定

通过对控制系统稳定性和位置控制系统不允许超调的分析, 可得到

$$\begin{aligned} 0 < K \leq K_{\max} &= \min \left\{ 1 + \frac{p}{e^p - (1+p)}, \frac{2(1+e^{-p})}{p(1+e^{-p}) - 2(1-e^{-p})} \right\} \\ &\cap \{f(K) \geq 0\}. \end{aligned} \tag{27}$$

式中

$$p = \frac{T}{T_m}; K = K_1 K_2 K_3 T_m, \left( K_1 K_2 K_3 = \frac{K}{T_m} \right);$$

$$\begin{aligned} f(K) &= (1 - e^{-p} - p)^2 K^2 - 2(1 - e^{-p})(1 - e^{-p} + p)K \\ &\quad + (1 - e^{-p})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

由(22)式计算得N级折线的最大斜率  $k_1$

$$k_1 = k_{N-(N-1)} = \frac{N}{N - (N - 1)} \frac{a_m}{v_m} = N \frac{a_m}{v_m}.$$

由  $k_1 = N_{\max} \frac{a_m}{v_m} \leq K_1 K_2 K_3 = \frac{K}{T_m} \leq \frac{K_{\max}}{T_m}$ , 得折线减速的最大级数  $N_{\max}$

$$N_{\max} = \left[ \frac{K_{\max} v_m}{T_m a_m} \right]. \quad (28)$$

#### 四、 $N$ 级折线减速时间最优(小)问题及位置控制系统的初步实践

##### 1. $N$ 级折线减速时间最优(小)问题

下面讨论在满足约束  $v_N = v_m$ ;  $a_m = k_i v_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $k_i \leq k_{\max}$  时, 如何选择各段折线斜率, 使多级折线的减速时间最小.

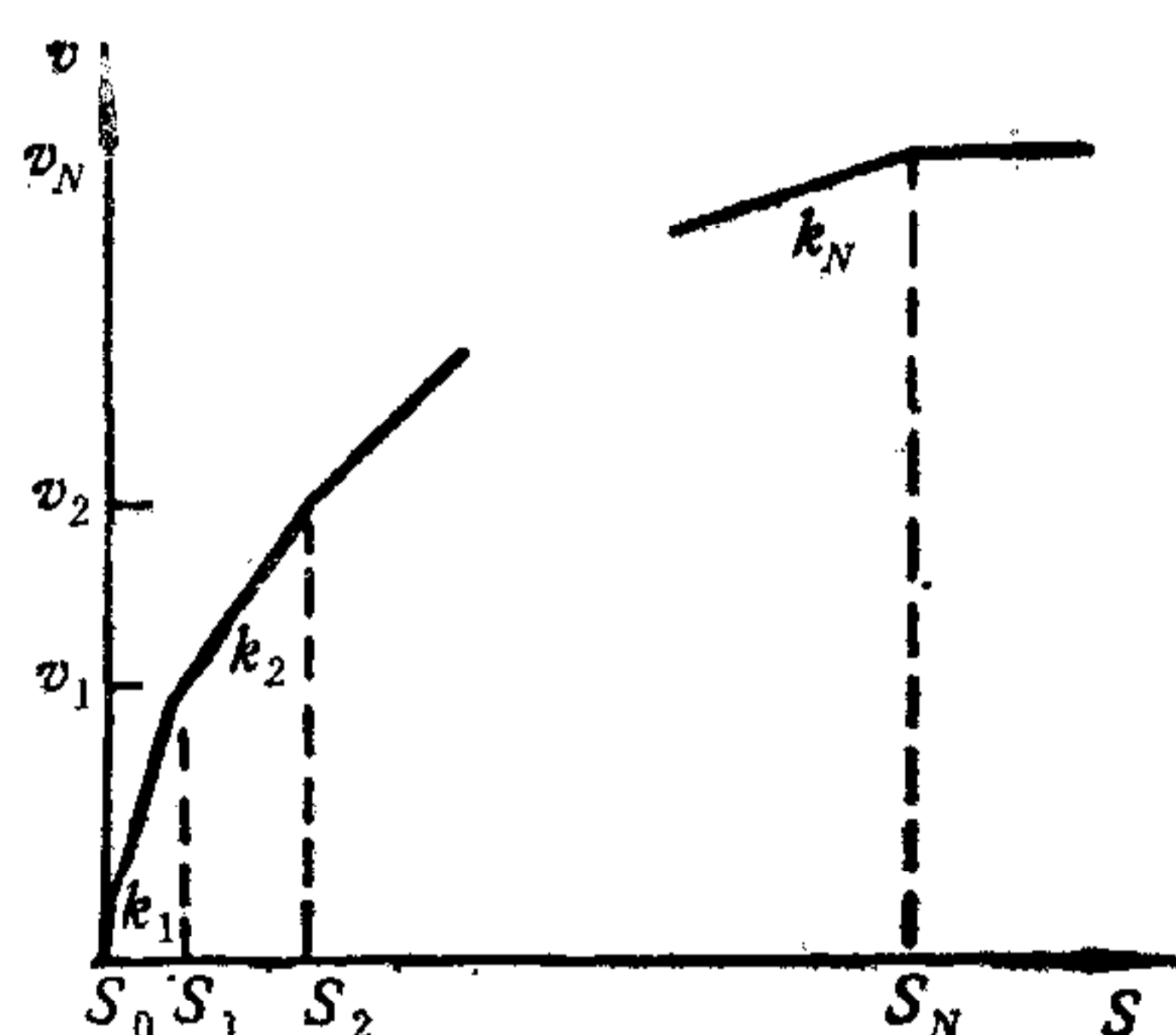


图 4 多级减速折线

$$s_N = \sum_{i=2}^N (s_i - s_{i-1}) + s_1 = \sum_{i=2}^N \left( \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_{i-1}} \right) \frac{a_m}{k_i} + \frac{a_m}{k_1^2}, \quad (29)$$

$$t_N = \Delta t_1 + \sum_{i=2}^{N-1} \Delta t_i + \Delta t_N = \frac{1}{k_1} \ln \frac{a_m}{k_1^2 s_0} + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{k_i} \ln \frac{k_{i-1}}{k_i} + \frac{v_m}{a_m} \ln \left( k_{N-1} \frac{v_m}{a_m} \right). \quad (30)$$

假设系统被加速到  $v_m$  时的位置偏差  $s \geq s_N$ , 且将  $s$  点作为时间的零点, 则

$$\left\{ \begin{aligned} t &= \frac{s - s_N}{v_m} + t_N = \frac{s}{v_m} + \frac{1}{k_1} \ln \frac{a_m}{k_1^2 s_0} - \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_1^2} \\ &+ \sum_{i=2}^{N-1} \left\{ \frac{1}{k_i} \ln \frac{k_{i-1}}{k_i} - \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_i} \left( \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_{i-1}} \right) \right\} \\ &+ \frac{v_m}{a_m} \ln \left( k_{N-1} \frac{v_m}{a_m} \right) - \left( \frac{v_m}{a_m} - \frac{1}{k_{N-1}} \right), \\ &k_i \leq k_{\max}. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

对  $t$  的  $N-1$  个变元  $k_1, \dots, k_{N-1}$  求极小值, 有

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} - 2 - \ln \frac{a_m}{s_0} + 2 \ln k_1 - 2 \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_1} - \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_2} = 0, \\ \ln \frac{k_i}{k_{i+1}} + 1 - \frac{k_{i+1}}{k_{i+2}} - 2 \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_{i+1}} + \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_i} + \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_{i+2}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-3, \\ \ln \frac{k_{N-2}}{k_{N-1}} + 2 - \frac{v_m}{a_m} k_{N-1} - 2 \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_{N-1}} + \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_{N-2}} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

对于二级折线,有

$$\ln k_1 = \left( \frac{1}{2} \ln \frac{a_m}{s_0} + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_m}{a_m} k_1 - \frac{a_m}{v_m} \frac{1}{k_1}. \quad (33)$$

表 1 为  $v_m = 1968.9922 \times 10^{-2} \text{mm/sec}$ ,  $a_m = 1150.5952 \times 10^{-2} \text{mm/sec}^2$ ,  $s_0 = 12 \times 10^{-2} \text{mm}$ ,  $s = 5054 \times 10^{-2} \text{mm}$  时,取  $v = v_m$  为时间的起点即  $t = 0$  时,系统的减速时间. 表 1 中减速级数 2 中方框部分是按本节所给公式计算的,带\*的式子是时间最优解,余者为按以前推导的特解公式计算值.

表 1

减速级数 $N$	减速距离 $S_N = \frac{N+1}{2N} \frac{v_m^2}{a_m}$	当 $s \geq s_N$ 时,行走时间 $t = \frac{v_m}{a_m} \left\{ \ln N + \frac{1}{N} \ln \frac{v_m^2}{NN   a_m s_0} \right\} + \frac{S - S_N}{v_m}$
1	$k_1 = 0.58436, S_1 = \frac{v_m^2}{a_m} = 3369.4998$	$t = 9.6475$ 秒
2	$k_1 = 1.16872, k_2 = 0.58436$ $S_2 = \frac{3}{4} \frac{v_m^2}{a_m} = 2527$	$t = 4.8238 + 0.42788 = 5.25168$ 秒
	$S_2 = \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{a_m}{k_2} + \frac{a_m}{k_1^2}$ $k_1 = 2.9, k_2 = 0.58436, S_2 = 2827.3$ $k_1^* = 2.9, k_2^* = 0.58436, S_2^* = 2831.5$ $k_1 = 6.835578, k_2 = 0.58436, S_2 = 3249.7$	$t_1 = \frac{1}{k_1} \ln \frac{a_m}{k_1^2 s_0} + \frac{v_m}{a_m} \ln \left( k_1 \frac{v_m}{a_m} \right) + \frac{S - S_2}{v_m}$ $t = 3.58060 + 0.275369 = 3.85597$ 秒 $t^* = 3.582597 + 0.273236 = 3.85583$ 秒 $t = 4.31385 + 0.06082 = 4.37467$ 秒
	$S_3 = \frac{2}{3} \frac{v_m^2}{a_m} = 2246$	$t = 3.4472 + 0.570596 = 4.01779$ 秒
4	$S_4 = \frac{5}{8} \frac{v_m^2}{a_m} = 2106$	$t = 2.8315 + 0.64169 = 3.47319$ 秒
5	$S_5 = \frac{3}{5} \frac{v_m^2}{a_m} = 2022$	$t = 2.4944 + 0.68436 = 3.17876$ 秒
⋮		
11	$S_{11} = \frac{6}{11} \frac{v_m^2}{a_m} = 1835$	$t = 1.8846 + 0.77933 = 2.66393$ 秒
⋮		
∞	$S = \frac{1}{2} \frac{v_m^2}{a_m} = 1685$	$t = 1.7113 + 0.85551 = 2.56681$ 秒

表 2

道次序号	设定值	起始位置 12285	误 差	起始位置 450	误 差	起始位置 453	误 差
		实控值		实控值		实控值	
1	11001	11010	+9	11007	+6	11001	0
2	9000	8994	-6	9003	+3	8997	-3
3	7500	7506	+6	7506	+6	7509	+9
4	6300	6309	+9	6309	+9	6294	-6
5	5202	5193	-9	5193	-9	5196	-6
6	4200	4194	-6	4194	-6	4209	+9
7	3300	3303	+3	3303	+3	3294	-6
8	2601	2604	+3	2592	-9	2610	+9
9	2100	2091	-9	2091	-9	2100	0
10	1650	1641	-9	1644	-6	1641	-9
11	1305	1311	+6	1308	+3	1311	+6
12	1050	1044	-6	1044	-6	1044	-6
13	852	858	+6	858	+6	849	-3
14	702	711	+9	708	+6	696	-6
15	600	606	+6	606	+6	597	-3
16	501	501	0	507	+6	504	+3
17	450	450	0	453	+3	453	+3

从表 1 可以看出, 同级解中最优解所用时间确实最小。而当取这个系统的最大级数  $N_{\max}$  等于 11 时, 特解折线所用减速时间  $t_{11} = 2.6639$  与理想的抛物线型减速时间  $t_{\infty} = 2.5668$  相差甚小。由于特解公式的简捷特性, 避免了最优解的繁杂数值解法, 因而具有工程应用价值。

## 2. 位置控制系统的初步实践

试验电机位置系统的控制数据如表 2 所示。使用的辊缝仪测量单位是  $3 \times 10^{-2} \text{mm}$ , 控制精度  $\delta = 12 \times 10^{-2} \text{mm}$ 。控制结果全部在  $\pm 3$  个测量单位以内。当时的电流填充系数是 0.8, 如它接近于 1, 定位精度可取得更小些, 控制误差也将会更小些。

宝钢自动化部的虞孟起同志仔细地审校本文, 提出了很多宝贵意见。鞍钢自动化所的葛汝增、张祥等同志为本人提供了试验条件, 在此致以衷心的感谢。

## 参 考 文 献

- [1] 顾兴源, 计算机控制系统, 冶金工业出版社, 1981.

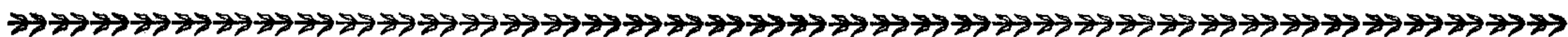
## A TENTATIVE RESEARCH FOR ACCURATE POSITIONING

LUO XINGQUAN

*(The Automation Research Institute of The Anshan Iron and Steel Company)*

### ABSTRACT

The problem of accurate positioning for position control systems is explored in this paper. Particular solution formulae of multi-grade deceleration broken line, six complete properties, the maximum number of deceleration grade for position control systems and equations of the gradient of each broken line segment which minimizes the deceleration time are proposed. An experimental example of position control systems is also given.



## 一九八六年度全国自动化技术应用学术交流会

### 征文通知

中国自动化学会应用委员会定于 1986 年 11 月在深圳大学召开一九八六年度全国自动化技术应用学术交流会。欢迎全国科技工作者积极投稿。征文范围为：自动化技术新系统、新理论、新方法、新装置在国民经济各个方面的应用，尤其欢迎有显著社会、经济效益的论文。来稿请于 1986 年 8 月 20 日前寄到北京丰台冶金部自动化所中国自动化学会应用委员会秘书组。

中国自动化学会应用委员会