第12卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 2
1986 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1986

状态反馈极点配置的直接方法

张 福 恩
(哈尔滨工业大学)

摘 要

本文研究了线性时不变系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$, 引进状态反馈 $\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x}$ 任意配置闭路极点问题. 文中通过矩阵 $[sI-A]^{-1}B$ 的右既约分解矩阵,导出了闭路系统特征方程的 $p \times p$ 维多项式矩阵行列式表示式 ($p = \mathrm{rank}B$). 利用这一表示式直接配置闭路极点,计算反馈矩阵 K. 文中同时给出了计算矩阵 $[sI - A]^{-1}B$ 右既约分解矩阵的一种新算法. 最后举例说明了它们的应用,并进一步讨论了 K 矩阵的灵活算法.

一、引 言

给定能控的线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量; $\boldsymbol{u}$ 为 p 维控制向量; $\boldsymbol{y}$ 为 m 维输出向量; A, B, C 分别为相应维数的实常数矩阵. 不失一般性假定 $\mathrm{rank}B = p$, 对系统 (1) 引进状态反馈

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

得闭路系统特征多项式

$$\phi(s) = |sI - A + BK|. \tag{3}$$

对于任意给定的一组闭路极点直接根据 (3) 式计算 K 矩阵, 通常遇到求解非线性方程组的困难. 目前已有多种方法避开这一困难, 但算法皆比较繁, 并附加一定的限制条件[1,2,3,4].

本文提出了计算矩阵 $[sI - A]^{-1}B$ 右既约分解矩阵及计算 K 矩阵的一种新方法.

二、特征多项式低维矩阵行列式表示式

下面推导闭路系统特征多项式 (3) 的 $p \times p$ 维多项式矩阵行列式表示式.

设

$$G(s) = [sI - A]^{-1}B = N(s)T^{-1}(s), \tag{4}$$

称 $sI - A$ 和 B 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的左分解;称 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右分解, 并且 $T(s)$ 和 $N(s)$ 分别为 $p \times p$ 和 $n \times p$ 维多项式矩阵. 若 $[B \vdots sI - A]$ 矩阵的 Smith

本文于 1984 年 1 月 11 日收到.

标准型为 $[I_n\vdots 0]$，则称 $sI-A$ 和 B 为 $G(s)$ 的左既约分解；同理若 $\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$ 的 Smith 标准型为 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$，则称 $T(s)$ 和 $N(s)$ 为 $G(s)$ 的右既约分解[1].

引理 1. 若系统 (1) 能控，则 $sI-A$ 和 B 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的左既约分解.

引理 2. 若 $sI-A$ 和 B 矩阵，$T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵分别为 $G(s)$ 矩阵的左和右既约分解，则 $sI-A$ 和 $T(s)$ 矩阵，B 和 $N(s)$ 矩阵除 1 以外的不变因子完全一致.

由引理 2 得知，$|sI-A|$ 和 $|T(s)|$ 只差一个常数因子.

引理 3. 若 P 和 Q 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 维矩阵，则

$$|I_n+PQ|=|I_m+QP|. \tag{5}$$

上述三引理见文献[5].

定理 1. 假定系统 (1) 能控，$T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解，则

$$\phi(s)=|T(s)+KN(s)|. \tag{6}$$

证明．已知

$$[sI-A]^{-1}B=N(s)T(s)^{-1}, \tag{7}$$

由于

$$\begin{aligned}\phi(s)&=|sI-A+BK|=|sI-A|\cdot|I_n+[sI-A]^{-1}BK|\\&=|sI-A|\cdot|I_p+KN(s)T^{-1}(s)|\\&=|sI-A|\cdot|T(s)|^{-1}\cdot|T(s)+KN(s)|,\end{aligned} \tag{8}$$

若不考虑上式中的常数因子，则 (6) 式成立，定理证毕.

(6) 式就是特征多项式的 $p\times p$ 维多项式矩阵行列式表示式.

三、$T(s)$, $N(s)$ 矩阵的计算

计算 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵已有一些算法[5]，下面介绍一种新的简单算法.

假定矩阵对 (A, B) 能控，则 $sI-A$ 和 B 矩阵互左素，即为 $G(s)$ 矩阵的左既约分解，并存在 $n\times n$ 和 $(n+p)\times(n+p)$ 维么模矩阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$，使得

$$P(s)[-B\vdots sI-A]Q(s)=[-I_n\vdots 0] \tag{9}$$

和存在 $P(s)$ 和 $Q'(s)$ 么模矩阵，使得

$$P(s)[-B\vdots sI-A]Q'(s)=[-I_n\vdots U(s)], \tag{10}$$

其中 $U(s)$ 为 $n\times p$ 多项式矩阵.

定理 2. 若矩阵对 (A,B) 能控，则对于 $G(s)$ 矩阵的右分解矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 有

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix}=Q_p(s). \tag{11}$$

并且由 (11) 式确定的 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解. 其中 $Q_p(s)$ 为 (9) 式中么模矩阵 $Q(s)$ 后 p 列组成的 $(n+p)\times p$ 维矩阵.

证明．由 $[sI-A]^{-1}B=N(s)T^{-1}(s)$ 得

$$[-B \vdots sI - A]\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix} = 0. \tag{12}$$

考虑到 (9) 式,则得

$$\left[\begin{array}{c:c:c} -I_p & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -I_{n-p} & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} T'(s) \\ \cdots\cdots \\ N_1'(s) \\ \cdots\cdots \\ N_2'(s) \end{bmatrix} = 0, \tag{13}$$

其中

$$\begin{bmatrix} N_1'(s) \\ N_2'(s) \end{bmatrix} = N'(s), \quad \begin{bmatrix} T'(s) \\ \cdots\cdots \\ N'(s) \end{bmatrix} = Q^{-1}(s)\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

$T'(s)$ 和 $N_2'(s)$ 为 $p \times p$ 维矩阵,N_1' 为 $(n-p) \times p$ 维矩阵. 由 (13) 式可知,$T'(s)=0$, $N_1'(s)=0$, $N_2'(s)$ 为任意矩阵. 选取 $N_2'(s)=I_p$, 则由 (14) 式得 (11) 式成立. 由于

$$Q^{-1}(s)\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中 $Q^{-1}(s)$ 亦为么模矩阵, 所以 $\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix}$ 的 Smith 标准型为 $\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, 故由 (11) 式所确定的 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解,定理 2 证毕.

推论. 若矩阵对 (A,B) 能控,则对于 $G(s)$ 矩阵的右分解矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 有

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ \cdots\cdots \\ N(s) \end{bmatrix} = Q'(s)\begin{bmatrix} U(s) \\ I_p \end{bmatrix}. \tag{16}$$

并且由 (16) 式所确定的 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解.

证明. 选取 $\begin{bmatrix} I_n & U(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ 么模矩阵,则由 (10) 式得

$$P(s)[-B \vdots sI - A]Q'(s)\begin{bmatrix} I_n & U(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = [-I_n \vdots 0], \tag{17}$$

从而得

$$Q(s) = Q'(s)\begin{bmatrix} I_n & U(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad Q_p(s) = Q'(s)\begin{bmatrix} U(s) \\ I_p \end{bmatrix}. \tag{18}$$

由此得 (16) 式. 根据定理 2 推论得证.

定理 2 及其推论给出了计算 $[sI-A]^{-1}B$ 矩阵右既约分解矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 的方法,就是通过对复合矩阵 $[-B \vdots sI - A]$ 进行基本行列变换求得 $Q(s)$ 或 $Q'(s)$, $U(s)$ 即可.

四、K 矩阵的计算

1) 从 $T(s)+KN(s)$ 矩阵中任取一行 $\boldsymbol{t}_i(s)+\boldsymbol{k}_iN(s)$ (其中 $\boldsymbol{t}_i(s)$ 和 $\boldsymbol{k}_i$ 分别为

$T(s)$ 和K的第 i 行)，该行为 p 维多项式行向量，其多项式系数为 $\boldsymbol{k}_i$ 的 n 个元素的线性函数。对这一行配置一个极点需要 p 个元素，配置两个极点需 $2p$ 个元素，以此类推，对该行最多能配置 $[n/p]$ 个极点。 这里 $[n/p]$ 表示 n/p 的整数部分。 不失一般性，考虑 $T(s)+KN(s)$ 的前 $p-1$ 行，可配置极点 $\eta_1 \leqslant (p-1)[n/p]$ 个，同时确定 $\boldsymbol{k}_1 \sim \boldsymbol{k}_{p-1}$ 行向量。

2) 从 $|T(s)+KN(s)|$ 中提出已经配定的 η_1 阶多项式，则得余下部分特征多项式

$$\phi_1(s)=\begin{vmatrix} M(s) \\ \boldsymbol{t}_p(s)+\boldsymbol{k}_p N(s) \end{vmatrix}, \tag{19}$$

其中 $M(s)$ 为 $(p-1)\times p$ 维已知多项式矩阵；$\boldsymbol{t}_p(s)$ 和 $\boldsymbol{k}_p$ 分别为矩阵 $T(s)$ 和K的第 p 行。将 (19) 式展开得

$$\phi_1(s)=[\boldsymbol{t}_p(s)+\boldsymbol{k}_p N(s)]\boldsymbol{\Delta}, \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}$ 为 (19) 式最后一行元素代数余子式组成的 p 维多项式列向量。式 (20) 为 $n-\eta_1$ 阶多项式，其系数为 $\boldsymbol{k}_p$ 的 n 个元素的线性函数。对 (20) 式配置余下的 $n-\eta_1$ 个极点，并计算得到 $\boldsymbol{k}_p$ 行向量，最后完成了K矩阵的计算。

五、举　　例

已知能控系统参数矩阵为[4]

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

给定闭路极点为$-1,-1,-1,-2\pm i$，计算状态反馈矩阵 K。

1) 应用第三节给出的方法计算得

$$T(s)=\begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \\ s^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N(s)=\begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\tau}, \tag{22}$$

并得闭路系统特征多项式为

$$\phi(s)=\begin{vmatrix} k_{13}s^2+k_{12}s+k_{11} & s+k_{11}+k_{14} & k_{11}+k_{15} \\ k_{23}s^2+k_{22}s+k_{21} & k_{21}+k_{24} & s+k_{21}+k_{25} \\ s^3+k_{33}s^2+k_{32}s+k_{31} & k_{31}+k_{34} & k_{31}+k_{35} \end{vmatrix}, \tag{23}$$

其中 k_{ij} 是K矩阵的第 i 行第 j 列元素。

2) 因为 $[n/p]=1$，故首先对 (23) 式第一行和第二行各配置一个极点-1，此时取 $k_{11}=k_{12}=k_{13}=k_{15}=k_{21}=k_{22}=k_{23}=k_{24}=0$，$k_{14}=k_{25}=1$ 即可，则得

$$\phi(s)=\begin{vmatrix} 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \\ s^3+k_{33}s^2+k_{32}s+k_{31} & k_{31}+k_{34} & k_{31}+k_{35} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

将已配定的 $(s+1)^2$ 二次式从 (24) 式中提出来,则得余下部分特征多项式为

$$\phi_1(s) = s^3 + k_{33}s^2 + k_{32}s + k_{31}. \tag{25}$$

已知

$$\phi_1(s) = (s+1)(s+2+i)(s+2-i) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5, \tag{26}$$

比较 (25) 和 (26) 式中 s 同次幂系数,最后得

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

这个结果要比文献 [4] 中的结果简单得多. 对该例这也是一个最简单的结果. 因为五阶系统要实现闭路极点任意配置,一般情况至少需要五个参数. 同时,对该例还有其它参数选取方案. 例如,对第一行和第二行进行联合配置. 取 $k_{11}=k_{12}=k_{13}=k_{14}=k_{21}=k_{22}=k_{23}=0$, $k_{15}=-1$, 则得闭路系统特征多项式

$$\phi(s) = \begin{vmatrix} 0 & s & -1 \\ 0 & k_{24} & s+k_{25} \\ s^3+k_{33}s^2+k_{32}s+k_{31} & k_{31}+k_{34} & k_{31}+k_{35} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

将 (28) 式展开得

$$\phi(s) = (s^2 + k_{25}s + k_{24})(s^3 + k_{33}s^2 + k_{32}s + k_{31}). \tag{29}$$

取闭路极点为 $-3\pm 2i$, -1, $-2\pm i$, 则得

$$\phi(s) = (s^2 + 6s + 13)(s^3 + 5s^2 + 9s + 5). \tag{30}$$

由 (29) 和 (30) 式直接得

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\ 5 & 9 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

在文献 [3] 和 [4] 中, 分别要求 $p-1$ 和 $n-p+1$ 个闭路系统极点选取不同实数. 对该例按上述方法选取 K 矩阵的参数,则闭路系统极点的预先选取没有限制条件.

一般根据矩阵 $T(s)+KN(s)$ 的具体形式可以采用灵活算法, 诸如行与行的联合配置, 保留部分开路系统极点等, 这样通常可以简化计算, 并且可以得到尽可能简单的 K 矩阵.

结 束 语

本文给出的计算状态反馈矩阵 K 的方法是基于闭路系统特征方程的 $p\times p$ 维行列式表示式. 由于这一表示式中的多项式的系数都是 K 矩阵元素的线性函数, 所以计算只要求解线性代数方程.

计算 $[sI-A]^{-1}B$ 矩阵右既约分解矩阵,在对 $[-B\vdots sI-A]$ 进行基本行列变换时, 应首先尽量实行基本行变换, 而后实行列变换, 这样可以简化计算步骤, 并且可得到尽可能简单的 $Q(s)$ 矩阵. 当 A, B 为能控或为输入可辨识标准型时, 采用此法计算 $[sI-A]^{-1}B$ 的右既约分解矩阵是非常简单的,对 $[-B\vdots sI-A]$ 只作行变换即可.

采用文中给出的方法计算状态反馈矩阵不仅比已有的方法简单，而且参数选取直观、灵活、自由度大(单输入情况除外)，有多个解可供选用，通常还可以得到尽可能简单的，即非零元素尽可能少的状态反馈矩阵.

参 考 文 献

[1] Portor, B. and Cross, R., Modal Control Theory and Application, London, Taylor and Fracis, New York, Barnes and Noble, 1972.

[2] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, New York, Springer, 1974.

[3] Munro, N. and Novin-Hirbod, S., Pole Assignment Using Full Rank Output feedback Compensator, *Int. J. Systems Sci.*, **10**(1979), 285.

[4] Lovass-Nogy, V., O'bennon, M. and Robson, G., Pole Assignment Using Matrix Generalized Inverses, *Int. J. Systems Sci.*, **12**(1981), 385—392.

[5] [日]须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979.

A DIRECT METHOD FOR POLE ASSIGNMENT USING STATE FEEDBACK

ZHANG FUEN

(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT

In this paper the problem of the pole assignment in a linear time-invariant system $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}$, using the state feedback law $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}$ is studied. In the paper a determinant experession of the $p\times p$ polynomial matrix for the characteristic polynomial of the closed-loop system is derived by means of the relative right reduced factorization matrices of the matrix $[sI\text{-}A]^{-1}B$ ($p=\mathrm{rak}B$). Based on the expression the poles are assigned directly and the matrix K is computed. In addition a new algorithm for computing the relative right reduced factorization matrices of the matrix $[sI\text{-}A]^{-1}B$ is presented. Finally, a numerical example is given to illustrate their applications, and by means of the example flexible computation of the matrix K is further shown.