第 12 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 2
1986 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1986

应用于地震数据去卷的自校正白噪声估值器

邓 自 立
(黑龙江省应用数学研究所)

摘　　要

本文把地震数据去卷问题处理为估计带观测噪声的 ARMA 模型的白噪声问题，应用时间序列分析方法提出了不同于 Mendel 的新的稳态最优白噪声估值器，文章基于两个 ARMA 新息模型的在线辨识，进一步给出了自校正白噪声估值器。

一、引　　言

估计白噪声问题出现在许多不同的领域，如反射地震学[1-5]和通讯系统等[6]，在石油勘探开发中，把地震数据去卷问题归结为估计白噪声反射系数序列，引起了有关人员的注意和兴趣[1-5]，Mendel[1,4] 把地震数据去卷问题处理为估计下述的离散的典型状态空间模型的白噪声 $w(t)$，

$$\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t-1)+\boldsymbol{b}w(t), \tag{1}$$

$$z(t)=\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{x}(t)+v(t), \tag{2}$$

其中 T 表示转置号，且

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,$$

$$\boldsymbol{b}=(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})^T,$$

$$\boldsymbol{h}^T=(1, 0, \cdots, 0),$$

$$A=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-a_n, -a_{n-1}, \cdots, -a_1} \end{array}\right], \quad I_{n-1} \text{ 为 } (n-1)\times(n-1) \text{ 单位阵.}$$

假设. (i) 矩阵 A 是非异的和稳定的；(ii) 反射系数序列 $w(t)$ 是均值为零，方差为 σ_w^2 的白噪声；(iii) 观测噪声 $v(t)$ 是独立于 $w(t)$ 的均值为零，方差为 σ_v^2 的白噪声.

最小方差去卷问题[4]是基于观测 $\{z(t), z(t-1), \cdots\}$ 求 $w(k)$ 的最优估值器 $\hat{w}(k|t)$，其极小化条件数学期望

$$J=E[(w(k)-\hat{w}(k|t))^2|z(t), z(t-1), \cdots],$$

其中 E 为均值号. 对 $k=t$, $\hat{w}(t|t)$ 称最优滤波器；对 $k<t$, $\hat{w}(k|t)$ 称最优平滑器.

本文于 1984 年 6 月 9 日收到.

本文应用时间序列分析方法和射影理论，提出了新的稳态最优白噪声滤波器和平滑器.

二、模型辨识

状态空间模型 (1)-(2) 的辨识问题可以转化为两个 ARMA 新息模型的辨识问题.

由文献 [7]，状态空间模型 (1)-(2) 等价于如下的带观测噪声 $v(t)$ 的 ARMA $(n, n-1)$ 模型:

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})w(t), \tag{3}$$

$$z(t) = y(t) + v(t). \tag{4}$$

其中 $y(t) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{x}(t)$ 是噪声自由信号; $A(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 是反向位移算子 q^{-1} (即 $q^{-1}y(t) = y(t-1)$) 的多项式.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n},$$
$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1q^{-1} + \cdots + c_{n-1}q^{-(n-1)},$$

n 是模型的阶,且

$$(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})^T = B\boldsymbol{b},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ a_2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1}, & \cdots, & a_2, & a_1, & 1 \end{bmatrix}.$$

显然 $c_0 = b_0$. 不失一般性，假定 $c_0 = 1$; 否则 $w(t)$ 用未知常数 c_0 作刻度的比例变换[4],则可化为 $c_0 = 1$ 的情形.

假设 (i) 引出多项式 $A(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外,因而 ARMA 模型 (3)是平稳的;为了保证它是可逆的，要求 $C(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外,于是 $w(t)$ 是过程 $y(t)$ 的新息序列[8],且称 ARMA 模型 (3) 为 $y(t)$ 的新息模型.

把 (4) 式代入 (3) 式有

$$A(q^{-1})z(t) = C(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t). \tag{5}$$

(5)式右边的两个滑动平均过程之和可用一个等价的滑动平均过程表示[8,13]:

$$C(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t) = D(q^{-1})e(t). \tag{6}$$

其中 $e(t)$ 是零均值,方差为 σ_e^2 的白噪声,且

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \cdots + d_nq^{-n}.$$

由 (5) 式和 (6) 式得到观测模型

$$A(q^{-1})z(t) = D(q^{-1})e(t). \tag{7}$$

为了保证 ARMA 模型(7)是可逆的,要求 $D(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外,因而 $e(t)$ 是 $z(t)$ 的新息序列,且称 ARMA 模型 (7) 为观测过程 $z(t)$ 的新息模型.

首先,基于观测 $\{z(t), z(t-1), \cdots\}$, 新息模型 (7) 的参数 a_i, d_i, σ_e^2 可应用递推

增广最小二乘法[9]（RELS）估计，且模型的阶 n 可用 F-检验[10]决定．其次，基于所辨识的 ARMA 新息模型（7），新息模型（3）和观测方程（4）的参数 c_i，σ_w^2，σ_v^2 可用一种实现方法[11]估计．定义

$$u(t) = C(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t) = D(q^{-1})e(t),$$

由（6）式和假定（ii），$u(t)$ 的相关函数可表示为

$$\begin{aligned} R_u(k) &= E[u(t)u(t-k)] \\ &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{n-1-k} c_j c_{j+k} + \sigma_v^2 \sum_{j=0}^{n-k} a_j a_{j+k} \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{n-k} d_j d_{j+k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $c_0 = a_0 = d_0 = 1$．对 $k = n$，因 $C(q^{-1})$ 是 $n-1$ 次多项式，有

$$R_u(n) = \sigma_v^2 a_n = \sigma_e^2 d_n. \tag{9}$$

引出

$$\sigma_v^2 = \frac{d_n}{a_n}\sigma_e^2. \tag{10}$$

其中由假定（i）引出 $a_n \neq 0$．于是 σ_v^2 可由所辨识的 ARMA 新息模型（7）决定．

由（8）式，$C(q^{-1})w(t)$ 的相关函数可表示为

$$\begin{aligned} R_c(k) &= E[C(q^{-1})w(t)\cdot C(q^{-1})w(t-k)] = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{n-1-k} c_j c_{j+k} \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{n-k} d_j d_{j+k} - \sigma_v^2 \sum_{j=0}^{n-k} a_j a_{j+k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{11}$$

因而 $R_c(k)$ 也可用所辨识的 ARMA 新息模型（7）计算．

参数 c_i 和 σ_w^2 可根据 $R_c(k)$ 用 Gevers 和 Wouters 算法[11]得到．计算

$$R_{cw}(i, i-k) = R_c(k) - \left(\sum_{s=k+1}^{n-1} R_{cw}(i, i-s)R_{cw}(i-k, i-s)/R_w(i-s, i-s)\right),$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-1;\ i = 0, 1, 2, \cdots \tag{12}$$

其中规定

$$R_w(i, i) = R_{cw}(i, i), \quad R_w(0, 0) = R_c(0), \tag{13}$$

$$R_{cw}(i, i-j) = 0, \quad R_w(i-j, i-j) = 0, \quad 对\ i < j. \tag{14}$$

有

$$\sigma_w^2 = \lim_{t\to\infty} R_{cw}(t, t), \quad c_i = \lim_{t\to\infty} R_{cw}(t, t-i)/\sigma_w^2, \tag{15}$$

其中 $i = 0, 1, \cdots, n-1$．上述算法可保证 $C(q^{-1})$ 的零点在单位圆外[11]．

三、最优白噪声估值器

本节将导出比 Mendel[4] 的白噪声估值器简单的稳态最优白噪声滤波器和平滑器，其参数完全由两个 ARMA 新息模型决定．为了导出稳态估值器，假定初始时刻 $t_0 = -\infty$．

因为 ARMA 新息模型 (7) 是平稳、可逆的，则观测 $\{z(t), z(t-1), \cdots\}$ 和新息序列 $\{e(t), e(t-1), \cdots\}$ 包含同样的统计信息，且 $e(t)$ 可用已知数据计算为

$$e(t) = \frac{A(q^{-1})}{D(q^{-1})} z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j q^{-j} z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z(t-j). \tag{16}$$

其中系数 g_j 用比较如下恒等式 q^{-j} 系数得到

$$A(q^{-1}) = D(q^{-1})(g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_j q^{-j} + \cdots). \tag{17}$$

引出递推公式[8]

$$g_j = -d_1 g_{j-1} - \cdots - d_n g_{j-n} + a_j. \tag{18}$$

其中 $g_0 = 1$; $g_j = 0$ 对 $j < 0$; $a_j = 0$, 对 $j > n$.

应用射影理论[12]，基于观测 $\{z(t), z(t-1), \cdots\}$ 的 $w(k)$ 的最优估值器 $\hat{w}(k|t)$，是 $w(k)$ 在由 $\{e(t), e(t-1), \cdots\}$ 所张成的 Hilbert 空间上的射影，记为

$$\hat{w}(k|t) = P_{roj}[w(k)|e(t), e(t-1), \cdots].$$

由新息序列 $e(t)$ 的正交性和射影公式[12]有

$$\begin{aligned}\hat{w}(k|t) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{roj}[w(k)|e(t-j)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E[w(k)e(t-j)] \cdot \frac{1}{\sigma_e^2} \cdot e(t-j).\end{aligned} \tag{19}$$

由 (6) 式，$e(t)$ 可表为

$$\begin{aligned}e(t) &= \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} w(t) + \frac{A(q^{-1})}{D(q^{-1})} v(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j w(t-j) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j v(t-j).\end{aligned} \tag{20}$$

其中 g_j 由 (18) 式计算，f_j 可类似递推计算为

$$f_j = -d_1 f_{j-1} - \cdots - d_n f_{j-n} + c_j. \tag{21}$$

其中 $f_0 = 1$; $f_j = 0$, 对 $j < 0$; $c_j = 0$, 对 $j > (n-1)$.

应用假设 (i), (ii) 和 (20) 式有

$$E[w(k)e(i)] = \begin{cases} f_{i-k}\sigma_w^2, & i \geqslant k, \\ 0, & i < k. \end{cases} \tag{22}$$

由 (22) 和 (19) 式，对 $k \leqslant t$ 有稳态最优白噪声估值器为

$$\begin{aligned}\hat{w}(k|t) &= \sum_{j=0}^{t-k} P_{roj}[w(k)|e(t-j)] \\ &= \sum_{j=0}^{t-k} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \cdot f_{t-j-k} \cdot e(t-j).\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $e(t-j)$ 由 (16) 式计算. 应用 (22) 和 (23) 式可得估值误差方差为

$$\begin{aligned}P(k|t) &= E[(w(k) - \hat{w}(k|t))^2] \\ &= \sigma_w^2 \left[1 - \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \sum_{j=0}^{t-k} f_{t-j-k}^2\right].\end{aligned} \tag{24}$$

由 (23) 式引出最优白噪声滤波器为

$$\hat{w}(t|t) = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} e(t). \tag{25}$$

最优固定滞后N或固定点 t 白噪声平滑器为

$$\hat{w}(t|t+N) = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \sum_{i=0}^{N} f_i e(t+i), \tag{26}$$

带固定区间N的最优白噪声平滑器为

$$\hat{w}(k|N) = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \sum_{i=0}^{N-k} f_{N-i-k} e(N-i). \tag{27}$$

四、自校正白噪声估值器

由上节看到，最优白噪声估值器的参数完全被两个新息模型 (3) 和 (7) 式的参数所决定．因此自校正白噪声估值器由如下两步实现:

第一步．用递推增广最小二乘法 (RELS)[9,10] 在线辨识 ARMA 新息模型(7)式．设模型的阶、参数和方差的估值分别为 $\hat{n}$, $\hat{a}_i$, $\hat{d}_i$ 和 $\hat{\sigma}_e^2$. 把它们分别代入 (10) 和 (11) 式可得 $R_c(k)$ 和 σ_v^2 的估值 $\hat{R}_c(k)$ 和 $\hat{\sigma}_v^2$. 再把估值 $\hat{R}_c(k)$ 代入算法 (12)—(15) 式可得 c_i 和 σ_w^2 的估值 $\hat{\sigma}_w^2$, $\hat{c}_i$. 把估值 $\hat{c}_i$ 和 $\hat{d}_i$ 代入 (21) 式可得 f_i 的估值 $\hat{f}_i$. $e(t)$ 的估值 $\hat{e}(t)$ 可由 (7) 式递推计算为

$$\begin{aligned}\hat{e}(t) = z(t) + \hat{a}_1 z(t-1) + \cdots + \hat{a}_{\hat{n}} z(t-\hat{n}) \\ - \hat{d}_1 \hat{e}(t-1) - \cdots - \hat{d}_{\hat{n}} \hat{e}(t-\hat{n}).\end{aligned} \tag{28}$$

其中置初始值 $\hat{e}(i) = 0$，对 $i \leqslant 0$.

第二步．自校正白噪声估值器分别为:

自校正白噪声滤波器

$$\hat{w}(t|t) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{\hat{\sigma}_e^2} \hat{e}(t); \tag{29}$$

自校正固定滞后N或固定点 t 白噪声平滑器

$$\hat{w}(t|t+N) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{\hat{\sigma}_e^2} \sum_{i=0}^{N} \hat{f}_i \hat{e}(t+i); \tag{30}$$

自校正固定区间N白噪声平滑器

$$\hat{w}(k|N) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{\hat{\sigma}_e^2} \sum_{i=0}^{N-k} \hat{f}_{N-i-k} \hat{e}(N-i). \tag{31}$$

上述两步骤在每时刻 t 重复进行.

假如模型的阶的估计是正确的，即 $\hat{n} = n$，且 RELS 算法参数估计是一致的，即当 $t \to \infty$ 时 $\hat{a}_i \to a_i$，$\hat{d}_i \to d_i$，则也有 $\hat{e}(t) \to e(t)$，$\hat{\sigma}_e^2 \to \sigma_e^2$，$\hat{\sigma}_v^2 \to \sigma_v^2$，$\hat{R}_c(k) \to R_c(k)$，$\hat{\sigma}_w^2 \to \sigma_w^2$，$\hat{c}_i \to c_i$，$\hat{f}_i \to f_i$. 因而自校正白噪声估值器 (29)—(31) 式将分别收敛到最优白噪声估值器 (25)—(27) 式，于是所提出的自校正白噪声估值器具有渐近最优(自校正)性.

因为 Gevers 和 Wouters 算法，(12)—(15) 式完全是纯量运算，于是可简单地在线计算，在应用问题中只需迭代有限次 (t 充分大) 即可.

五、结 论

(1) 本文处理地震数据去卷问题为估计时间序列的 ARMA 模型的白噪声，与 Mendel 的估计状态空间模型的白噪声的观点不同[1-4].

(2) 本文所提出的稳态最优白噪声滤波器和平滑器不同于 Mendel 的稳态白噪声估值器，Mendel 是基于 Kalman 滤波方法，且要求解稳态代数矩阵 Riccati 方程.

(3) 所提出的最优白噪声估值器完全被两个 ARMA 新息模型决定，而自校正白噪声估值器归结为这两个 ARMA 新息模型的在线辨识.

(4) 自校正白噪声估值器概念具有渐近最优性，本文结果除了处理地震数据去卷问题外，还可应用于通讯领域.

参 考 文 献

[1] Mendel, J. M., White Noise Estimation for Seismic Data Processing in Oil Exploration, Proc. 1976 Joint Automatic Control Conference, p. 642.

[2] Mendel, J. M., Kormylo, J., New Fast Optimal White-noise Estimators for Deconvolution, *IEEE Trans. Geoscience Electronics*, GE-**15**(1977),32—41.

[3] Mendel, J. M., Kormylo, J., Single-Channel White-Noise Estimators for Deconvolution, *Geophysics*, **43**(1978), No. 1.

[4] Mendel, J. M., Minimum-variance Deconvolution, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing*, GE-**19** (1981), 161—171.

[5] Mendel, J. M., White Noise Estimators for Seismic Deta Processing in Oil Exploration, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-**22**(1977), 694—706.

[6] Benedetto, S., Bigiler, E., On Linear Receivers for Digital Trasmission Systems, *IEEE Trans. Communication*, **22**(1974), 1205—1215.

[7] Mendel, J. M., Discrete Techniques of Parameter Estimation, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[8] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Time Series Analysis, Holden-Day, San Francisco, 1970.

[9] Ljung, L., Södrerström, T., Gustavsson, I., Counterexamples to General Convergence of a Commonly Used Recursive Identification Method, *IEEE Trans., Automat. Contr.*, AC-**20**(1975), 643—652.

[10] Bokor, J., Keviczky, L., Structural Properties and Structure Estimation of Vector Difference Equations, *Int. J. Control*, **36** (1982), 461—475.

[11] Gevers, M., Wouters, W. R. E., An Innovations Approach to the Discrete-Time Stochastic Realization Problem, Journal A, **19**(1978), No. 2.

[12] Wouters, W. R. E., Gevers, M., An Innovations Approach to the Discrete-Time Linear Least-squares Estimation Problem, Journal A, **19**(1978), No. 1.

[13] Deng, Z. L., Multivariate Self-tuning Filter and Smoother, Proc. of 6th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Washington, DC., 1982.

SELF-TUNING WHITE NOISE ESTIMATORS WITH APPLICATION TO SEISMIC DATA DECONVOLUTION

DENG ZILI

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics)

ABSTRACT

In this paper, the problem of seismic data deconvolution is treated as a problem of estimating the white noise of the ARMA model with observation noise. Using the time series analysis method, we present new steadystate optimal white noise estimators which are different from that of Mendel. Based on the on-line identification of two ARMA innovation models, the selftuning white noise estimators are further given.