

# 自适应消除干扰的新算法 (使用矩阵奇异值分解)

曹长修  
(重庆大学)

## 摘要

本文提出一种自适应消除干扰的新算法(使用矩阵的奇异值分解 SVD 定理)。该算法先由参考输入的自相关函数及参考输入与主输入之间的互相关函数,估计出自适应滤波器的脉冲响应,然后由矩阵的奇异值分解定理计算滤波器的系数。文中并给出计算滤波器脉冲响应的一种递推算法。在数字计算机上的仿真结果说明了该算法的特性。

## 一、引言

1975年以来,自适应消除干扰(ANC)的方法受到各方面的极大关注<sup>[1-3]</sup>,但其中所使用的是一种有限脉冲响应(FIR)滤波器,用梯度法计算滤波器的系数。这种 FIR 滤波器仅是一种次最优滤波器,梯度法有时收敛得很慢。以后人们在自适应消除干扰的计算中引入了系统辨识技术<sup>[4]</sup>,使用了无限脉冲响应(IIR)滤波器,用广义最小二乘法(ELS)或极大似然估计(RML)等算法计算这些 IIR 自适应滤波器的参数,这种算法在大多数情况下是收敛的。本文提出一种与现有算法完全不同的算法,称为 IR 算法。在数字计算机上的仿真结果表明,许多情况下 IR 算法所需要的计算时间远小于 RML 算法,而且当参考输入或主输入中混有较强的噪声时,IR 算法比 RML 算法给出更高的估计精度,特别是对于自适应滤波器的极点估计。

## 二、IR 算法

### 1. IIR 滤波器的脉冲响应

如图 1 所示,设信号  $x(t)$ , 共同的干扰  $z(t)$  以及测量噪声  $n(t)$ ,  $m(t)$  之间在统计上是相互独立的。

主输入

$$y(t) = x(t) + z(t) + n(t), \quad (1)$$

参考输入

$$u(t) = z_r(t) + m(t) \quad (2)$$

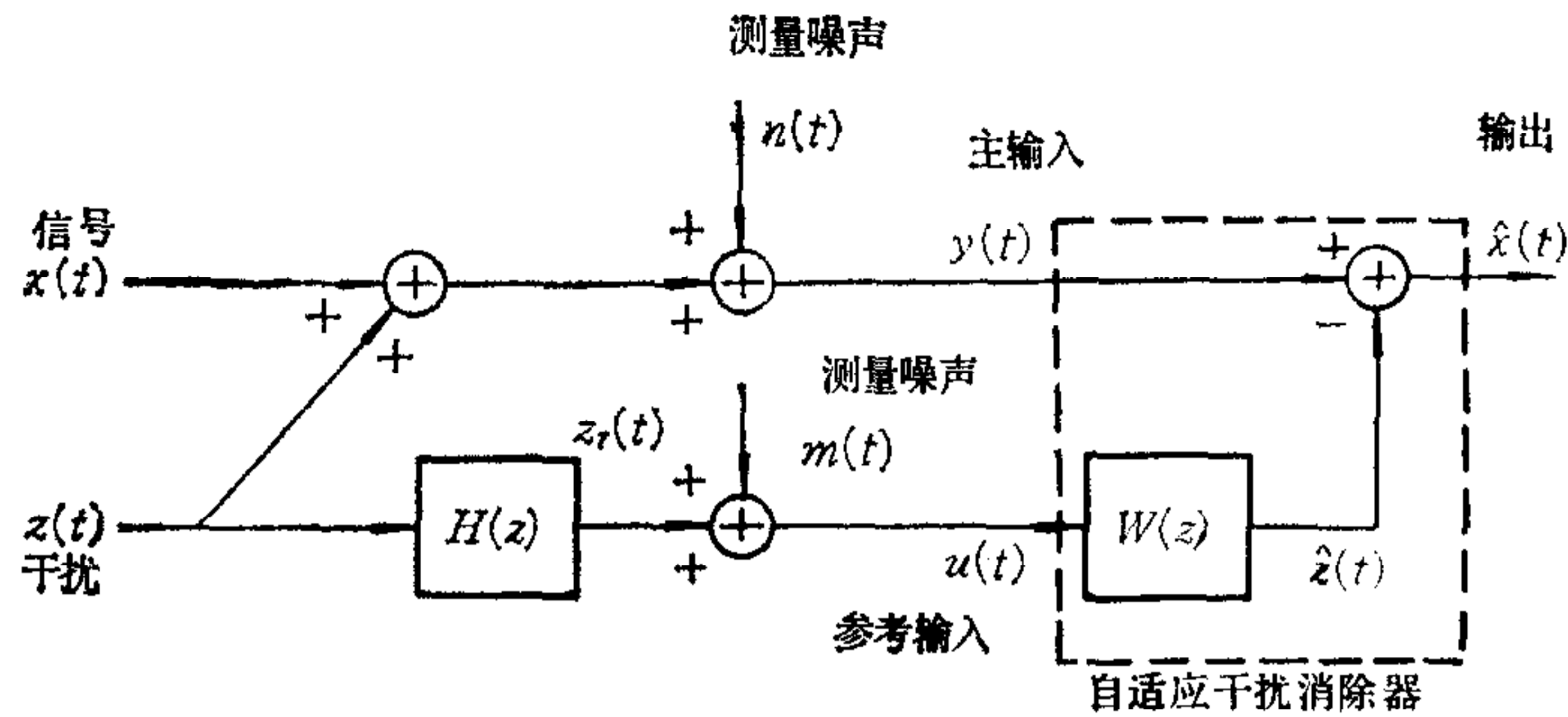


图1 ANC 的输入和输出

及参考输入与主输入之间的互相关函数

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= E\{u(t)y(t+\tau)\} \\ &= E\{[z_r(t) + m(t)][x(t+\tau) + z(t+\tau) + n(t+\tau)]\} \\ &= E\{z_r(t)z(t+\tau)\} = R_{z_r z}. \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $R_{z_r z}$  是  $z_r(t)$  与  $z(t)$  之间的互相关函数,而

$$z_r(t) = H(z)z(t)$$

或

$$z(t) = \frac{1}{H(z)} z_r(t) \quad (4)$$

和

$$\begin{aligned} R_{z_r z}(\tau) &= E\{z_r(t)z(t+\tau)\} = E\left\{z_r(t) \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z_r(t+\tau-k)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E\{z_r(t)z_r(t+\tau-k)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E\{u(t)u(t+\tau-k)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)r(\tau-k) \doteq \sum_{k=0}^{N_1-1} h(k)r(\tau-k). \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $r(\tau)$  是参考输入的自相关函数,  $h(k)$  ( $k=0, 1, \dots, N_1-1$ ) 是  $1/H(z)$  的脉冲响应 ( $W(z) = 1/H(z)$ ), 其中  $N_1$  表示脉冲响应序列的长度, 可以根据经验或用简单的试验办法粗略地估计出来. 由(3)式

$$R_{uy}(\tau) = \sum_{k=0}^{N_1-1} h(k)r(\tau-k), \quad (6)$$

分别令  $\tau = 0, 1, \dots, M_1-1$  (其中  $(M_1-1)$  表示所计算的自相关函数序列中所取的最大延迟时间), 则

$$AH = b. \quad (7)$$

式中  $A \in R^{M_1 \times N_1}$ ,  $H \in R^{N_1 \times 1}$ ,  $b \in R^{M_1 \times 1}$ .

$$A = \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(-N_1 + 1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(-N_1 + 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(M_1 - 1) & r(M_1 - 2) & \cdots & r(-N_1 + M_1) \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N_1 - 1) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) \\ R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(M_1 - 1) \end{bmatrix}.$$

式(7)是一个基本关系,根据下面将要介绍的矩阵奇异值分解定理,可以用该式由自相关函数矩阵  $A$  及互相关函数向量  $b$  得到脉冲响应向量  $H$ . 在选择  $M_1$  时要注意,当  $M_1 = N_1$  时,若  $A$  为非奇异阵,则(7)式存在唯一解.  $M_1$  要选得比  $N_1$  大,这时矩阵  $A$  可以提供更多的信息,可以得到  $H$  的更精确的估计值. 由仿真结果可以看出,过大的  $M_1$  会使计算量增加很多,而估计精度并不再提高.

**定理 1.**<sup>[5]</sup> 设  $A \in R_r^{M \times N}$ , 则存在正交矩阵  $U \in R^{M \times M}$  和  $V \in R^{N \times N}$ , 使得

$$A = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r), \quad (\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0).$$

数  $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$  及  $\sigma_{r+1} = 0, \cdots, \sigma_N = 0$  一起称作  $A$  的奇异值.

在实际计算中,可以用子程序<sup>[6]</sup> SVD 或 MINFIT 进行矩阵的奇异值分解. 根据所得到的信息矩阵  $A$ , 可以选择在谱范数意义下最接近  $A$  的近似满秩矩阵  $A_r$ , 这时在对角阵  $\Sigma$  的主对角线上,从第  $(r+1)$  个奇异值起,其数值急剧减小并接近零,  $\sigma_{r+1} \geq \cdots \geq \sigma_N > 0$  (当其按数值大小次序排列时), 且  $\sigma_{r+1}, \cdots, \sigma_N$  可视为零. 例如可选择机器精度的平方根和矩阵范数的乘积作为其界限值. 由(7)式可得

$$H = A^+ b, \quad (9)$$

而  $A$  及  $\Sigma$  的广义逆矩阵分别为

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由所得参考输入  $u(k)$  的观测值  $u(1), u(2), \cdots$  及主输入  $y(k)$  的观测值  $y(1), y(2), \cdots$  可以计算出  $A$  及  $b$  的估计值. 因此,根据(9)式可以得到脉冲响应序列  $h(0), h(1), \cdots, h(N_1 - 1)$  的估计值.

本文算法也可以写成递推形式,以便于在线实时数据处理. 在(7)式中取矩阵  $A$  的维数  $M_1 = N_1$  (等于脉冲响应序列的长度),并按下式计算自相关函数矩阵元素的估计值

$$\hat{A}(i, j) = \frac{1}{N - N_1 + 1} \sum_{k=N_1}^N \bar{u}(k+1-i) u(k+1-j), \quad (10)$$

$$1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq j \leq N_1$$

( $\bar{u}$  上面的一横表示复数共轭), 其中假定在观测集合  $1 \leq k \leq N$  之外的  $u(k)$  值均为零. 这时  $N_1 \times N_1$  自相关函数矩阵的估计值  $\hat{A}$  可以方便地写成矩阵乘积形式

$$\hat{A} = \frac{1}{N - N_1 + 1} U_N^* U_N. \quad (11)$$

式中  $U_N$  是  $(N - N_1 + 1) \times N_1$  数据矩阵, 其中“\*”表示共轭转置运算, 下标  $N$  表示数据矩阵与其观测数据的长度有关, 而

$$U_N(i, j) = u(N_1 + i - j), \quad 1 \leq i \leq N - N_1 + 1, \quad 1 \leq j \leq N_1. \quad (12)$$

即

$$U_N = \begin{bmatrix} u(N_1) & u(N_1 - 1) & \cdots & u(1) \\ u(N_1 + 1) & u(N_1) & \cdots & u(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u(N) & u(N - 1) & \cdots & u(N - N_1 + 1) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

同理, 可按下式计算互相关函数矩阵元素的估计值

$$\hat{\delta}(i) = \frac{1}{N - N_1 + 1} \sum_{k=N_1}^N u(k - i + 1) y(k), \quad 1 \leq i \leq N_1. \quad (14)$$

这时互相关函数向量估计值也可以很方便地写成下列数据矩阵乘积的形式

$$\hat{\delta}_N = \frac{1}{N - N_1 + 1} U_{bN} Y_N. \quad (15)$$

式中  $U_{bN}$  是  $N_1 \times (N - N_1 + 1)$  数据矩阵,  $Y_N$  是  $(N - N_1 + 1)$  维数据向量,

$$U_{bN} = \begin{bmatrix} u(N_1) & u(N_1 + 1) & \cdots & u(N) \\ u(N_1 - 1) & u(N_1) & \cdots & u(N - 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(N - N_1 + 1) \end{bmatrix}, \quad Y_N = \begin{bmatrix} y(N_1) \\ y(N_1 + 1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

因此, (7) 式可写成

$$U_N^* U_N H_N = U_{bN} Y_N. \quad (17)$$

式中下标  $N$  表示其与观测数据的长度  $N$  有关, 当获得第  $(N + 1)$  个观测值对 (即  $u(N + 1)$  及  $y(N + 1)$ ) 时, 则

$$U_{N+1}^* U_{N+1} = U_N^* U_N + u_{N+1}^* u_{N+1}. \quad (18)$$

式中

$$u_{N+1} = [u(N + 1) u(N) \cdots u(N - N_1 + 2)]$$

及

$$\hat{\delta}_{N+1} = U_{bN} Y_N + u_{b(N+1)} y(N + 1) = \hat{\delta}_N + u_{b(N+1)} y(N + 1). \quad (19)$$

式中

$$u_{b(N+1)} = \begin{bmatrix} u(N + 1) \\ u(N) \\ \vdots \\ u(N - N_1 + 2) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

由 (19) 式可见, 随着观测数据的增加, 可以很容易地由  $\hat{\delta}_N$  得到  $\hat{\delta}_{N+1}$  (即将  $u_{b(N+1)}$  的每一个分量都乘以新获得的观测数据  $y(N + 1)$  后, 分别加到  $\hat{\delta}_N$  的对应分量上). 由 (17) 式, 当获得了第  $(N + 1)$  个观测值之后, 为了计算脉冲响应向量的递推值  $\hat{H}_{N+1}$ , 必须

计算  $(U_{N+1}^*U_{N+1})^{-1}$ . 根据下列定理可以由(18)式得到计算  $(U_{N+1}^*U_{N+1})^{-1}$  的递推公式.

**定理 2.**<sup>[7]</sup> 设  $A$  及  $A + u^*v$  均为非奇异  $s \times s$  矩阵, 其中  $u$  及  $v$  均为  $s$  维行向量, 则

$$[A + u^*u]^{-1} = A^{-1} - \frac{[A^{-1}u^*][vA^{-1}]}{1 + vA^{-1}u^*}. \tag{21}$$

对于(18)式, 可以选取  $A = U_N^*U_N$  及  $u = v = u_{N+1}$ , 则得到下列矩阵求逆的递推形式

$$[U_{N+1}^*U_{N+1}]^{-1} = [U_N^*U_N]^{-1} - \frac{y_{N+1}^*y_{N+1}}{1 + y_{N+1}u_{N+1}^*} \tag{22}$$

对于  $N \geq 2N_1 - 1$ .

式中

$$y_{N+1} = u_{N+1}[U_N^*U_N]^{-1}.$$

可以使用标准的矩阵求逆子程序计算上述递推算法中的初始逆矩阵  $[U_N^*U_N]^{-1}$ . 在每次迭代中, 计算出  $[U_{N+1}^*U_{N+1}]^{-1}$  后, 可以通过计算乘积  $[U_{N+1}^*U_{N+1}]^{-1}\hat{b}_{N+1}$  得到脉冲响应向量新的修正值  $H_{N+1}$ .

### 2. IIR 滤波器的系数

设

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{q-1}z^{-(q-1)}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{p-1}z^{-(p-1)}} \tag{23}$$

以及  $1/H(z)$  的单位脉冲响应为  $h(0), h(1), \dots$ , 则<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{q-1}z^{-(q-1)}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{p-1}z^{-(p-1)}} \\ &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots. \end{aligned} \tag{24}$$

分子分母的阶数估计值可以由自相关函数及  $u(t)$  与  $y(t)$  之间的互相关函数得到<sup>[8]</sup>. 若单位脉冲响应在  $h(N_1 - 1)$  截止, 则<sup>[9,10]</sup>

$$\sum_{n=0}^{p-1} a_n h(i-n) = \begin{cases} b_i, & \text{当 } i = 0, 1, \dots, q-1, \\ 0, & \text{当 } i \geq N_1 \end{cases} \tag{25}$$

和

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{q-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(q-1) & h(q-2) & \dots & h(q-p) \\ h(q) & h(q-1) & \dots & h(q-p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N_1-1) & h(N_1-2) & \dots & h(N_1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

上式可写成分块矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} B \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_2 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_{21} \vdots H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ A_{12} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

式中

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(q-1) & h(q-2) & \cdots & h(q-p) \end{bmatrix}, \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} h(q) & h(q-1) & \cdots & h(q-p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(N_1-1) & h(N_1-2) & \cdots & h(N_1-p) \end{bmatrix}, \\
 H_{21} &= \begin{bmatrix} h(q) \\ \vdots \\ h(N_1-1) \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} h(q-1) \cdots h(q-p+1) \\ \vdots \\ h(N_1-2) \cdots h(N_1-p) \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{q-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

则

$$[H_{21}H_3] \begin{bmatrix} 1 \\ A_{12} \end{bmatrix} = 0.$$

从而

$$B = H_1 A_1 \quad (28)$$

和

$$H_3 A_{12} + H_{21} = 0. \quad (29)$$

式(23)分母系数  $a_i$  的最小二乘解可以用矩阵的奇异值分解定理及广义逆矩阵由(29)式得到,由(28)式的简单乘法运算给出分子系数  $b_i$ .

利用上述方法确定了自适应滤波器  $W(z)$  的系数之后,将参考输入  $u(k)$  的观测值送入该滤波器,便得到干扰的估计值  $\hat{z}(t)$ . 图1表示出消除干扰后的信号估计值  $\hat{x}(t)$ .

### 三、在数字计算机上的仿真结果

对于不同的信噪比(SNR),检验所提出算法的特性.在主输入中  $\text{SNR}(\rho_P)$  及在参考输入中  $\text{SNR}(\rho_R)$  的定义分别如下<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned}
 \rho_P &= \frac{\text{信号}(x(t)) \text{ 功率}}{\text{测量噪声}(n(t)) \text{ 功率}}, \\
 \rho_R &= \frac{\text{干扰}(z_r(t)) \text{ 功率}}{\text{测量噪声}(m(t)) \text{ 功率}}.
 \end{aligned} \quad (30)$$

例1.

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}, \quad (31)$$

传递函数有一对复数共轭极点,  $z_r(t)$  是一个含有白噪声的正弦干扰,  $\rho_P = 0\text{db}$ ,  $\rho_R = 10\text{db}$ , 仿真结果示于表1.

表 1

参数	真实值	IR	RML
$a_1$	-1.0	-1.0004	-0.9451
$a_2$	0.5	0.5072	0.5007
$b_0$	1.0	0.9144	0.9215
$b_1$	0.8	0.7475	0.8184

**例 2.** 传递函数  $1/H(z)$  及干扰  $z_r(t)$  均如上例, 而  $\rho_P = 10\text{DB}$ ,  $\rho_R = 20\text{DB}$ . 为了权衡参数的计算精度和计算时间, 在该例中变化矩阵  $A$  的维数  $M_1 \times N_1$  (参看(7)式). 由表 2 可见, 选择  $M_1 = 25$ ,  $N_1 = 20$  已足够好, 这时 IR 的计算时间仅为 RML 算法的十二分之一. 当传递函数的阶数增加时, IR 算法所要的计算时间变化很少, 而 RML 算

表 2

		参 数				计算时间 (秒)
		$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	
IR	真实值	-1.0	0.5	1.0	0.8	
	RML	-0.9903	0.5008	1.0002	0.8052	35.83
$M_1 = 15$ $N_1 = 10$		-1.0057	0.4982	0.9955	0.7635	1.2900
$M_1 = 25$ $N_1 = 20$		-1.0030	0.5030	0.9989	0.7888	2.7900
$M_1 = 40$ $N_1 = 30$		-1.0030	0.5030	0.9994	0.7891	7.3000
$M_1 = 50$ $N_1 = 40$		-1.0041	0.5041	0.9979	0.7884	13.7500
$M_1 = 60$ $N_1 = 50$		-1.0035	0.5041	0.9989	0.7903	23.5800

法所需的计算时间几乎按指数规律增长(例如当阶数从 2 增加到 3 时, 计算时间约为原来的 5 倍).

### 例 3.

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

该例的目的是分析一下估计误差的来源. 例如, 由上式可以准确地计算出其脉冲响应, 然后用它作为 IR 算法第二部分(即(28), (29)式)的输入, 从而可估计出该传递函数的系数, 如表 3 所示. 这些计算给出精确的结果. 因此, 算法误差主要来自其第一部分, 即来自对脉冲响应的估计. 其次由表 3 可见, 当主输入及参考输入中均无测量噪声时, IR 算法仍然给出精确的估计. 该算法误差主要来自有噪声存在的情况下对自相关函数的估计误差. 当然, 无法给出与信号完全无关的真正的白噪声, 也会使仿真中给出的结果有所降低.

表 3

	参 数				
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
真实值	0.1	-0.2	1.0	1.0	2.0
使用精确的脉冲响应	0.1000	-0.2000	1.0000	1.0000	2.0000
无测量噪声 无信号	0.0999	-0.2001	1.0000	0.9999	1.9999
无测量噪声 有信号	0.0989	-0.2019	1.0032	0.9952	1.9928
$\rho_P = 20\text{dB}$ $\rho_R = 20\text{dB}$	0.1000	-0.2020	0.9935	0.9936	1.9827

## 结 束 语

本文提出一种自适应消除干扰的新算法 IR, 并且给出算法的递推形式。仿真结果说明, 在一般情况下 IR 算法类似于 RML 算法。但是由于在 IR 算法中引入了相关技术, 故当主输入或参考输入中含有较强的测量噪声时, IR 算法比 RML 算法给出的结果好得多。且 IR 算法所需要的计算时间也少。

## 参 考 文 献

- [1] Widrow, B. et al., Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications, Proc. IEEE. **63**(1975), 692—1716.
- [2] Widrow, B. et al., Stationary and Nonstationary learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter, Proc. IEEE, **64**(1976), 1151—1156.
- [3] Glover, J., Adaptive Noise Cancelling Applied to Sinusoidal Interferences, *IEEE Trans. ASSP-25* (1977), 484—494.
- [4] Friedlander, B., System Identification Techniques for Adaptive Noise Cancelling, *IEEE Trans. ASSP-30*(1982), 240—246.
- [5] Klema, V. C., Laub, A. J., The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications, *IEEE Trans. Automat. contr.* **AC-25**(1980), 164—176.
- [6] Garbow, B. S. et al., Matrix Eigensystem Routines = EISPACK Guide Extension (Lecture Notes in Computer Science), **51**, New York: Springer Verlag, 1977.
- [7] Cadzow, J. A., Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach, Proceedings of The IEEE, **70**(1982), 907—939.
- [8] Cao Changxiu and Sorenson H. W., Parameter and Order Estimation for Noise Cancelling, Proceedings 1985-ICCAS, IEEE CAS.
- [9] Shanks J. L. Recursion Filters for Digital Processing, *Geophysics* **32**(1967), 33—51.
- [10] Burrus, C. S. and Parks T. W., Time Domain Design of Recursive Digital filters, *IEEE Trans., Audio and Electroacoustics*, **AU-18**(1970), 137—141.



# A NEW ALGORITHM FOR ADAPTIVE NOISE CANCELLATION USING SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

CAO CHANGXIU

*(Chongqing University)*

## ABSTRACT

A new algorithm for noise cancellation using singular value decomposition of matrix is presented in this paper. By this algorithm, the impulse response of an adaptive filter from an auto-correlation function and cross-correlation function of reference input and primary input is first estimated, and then using singular value decomposition of matrix, the coefficients of the filter is obtained. A recursive algorithm for calculating the impulse response of the adaptive filter is also presented. Simulation results illustrate the behavior of the algorithm.