第12卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 12, No. 2
1986 年 4 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1986

多输入-多输出系统的模型简化

邵 剑
（浙 江 大 学）

摘 要

用于大系统的模型最优简化的积分平方误差法，至今仅对输入向量的各分量相同时的少数几种函数有效。本文指出，对各分量为不同类型函数的向量输入时，多输入-多输出系统的模型同样可用积分平方误差法进行最优简化。

一、引 言

大系统的模型最优简化已有许多方法。其中 Wilson[1] 提出的积分平方误差法的物理涵义很清晰，它将大系统的输出与简化模型的输出间的误差的某一泛函作为近似的一种量度，并使之为极小而寻找简化模型。现有的积分平方误差法是在二次性能指标意义下，最优简化定常多变量线性系统，但仅仅考虑输入为脉冲、阶跃、正弦和幂函数的形式[2,3]。作者[4] 又将其推广到输入是指数型和多项式类型式以及它们的线性组合形式。但这些工作所考虑的输入函数向量的各分量都是同一函数，使方法的可用性受到限制。

本文针对输入函数向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_p)^T$ 的各分量 u_i 为不同类型函数时，用积分平方误差法对多输入-多输出定常线性大系统模型的最优简化进行研究。 其基本思想是把 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_p)^T$ 分解为已研究过的输入向量的各分量相同时的形式，然后加以叠加。

二、模型简化的基础

考虑一多输入-多输出的定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t),\end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$, $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^q$. 它的模型最优简化问题是求其形为定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_r(t)=A_r\boldsymbol{x}_r(t)+B_r\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}_r(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{y}_r(t)=C_r\boldsymbol{x}_r(t)+N\boldsymbol{u}(t)\end{cases} \tag{2}$$

的简化模型，式中 $\boldsymbol{x}_r\in\boldsymbol{R}^r$, $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$, $\boldsymbol{y}_r\in\boldsymbol{R}^q$, $q\leqslant r<n$. 同时使性能指标

$$J=\int_0^\infty(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_r)^TQ(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_r)dt \tag{3}$$

本文于1984年8月7日收到。

在给定输入时达到最小． 其中N是作用于$\boldsymbol{u}(t)$的线性微分算子；Q是正定对称加权矩阵．

现在研究输入函数向量

$$\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_p(t))^T,\ t\geqslant 0 \tag{4}$$

的各分量$u_i(t),i=1,\cdots p$，为不同类型函数时的上述模型最优简化问题．记$\boldsymbol{v}_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$\boldsymbol{v}_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots$，$\boldsymbol{v}_p=(0,\cdots,0,1)^T$，$\boldsymbol{v}_i\in \boldsymbol{R}^p$，$i=1,\cdots,p$．显然，

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{w}_1(t)+\boldsymbol{w}_2(t)+\cdots+\boldsymbol{w}_p(t),$$

其中

$$\boldsymbol{w}_i(t)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_iu_i(t), & t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{0}, & t<0,\ i=1,\cdots,p.\end{cases} \tag{5}$$

当输入向量$\boldsymbol{u}(t)$的各分量是同一函数或至多相差常数倍时，上述模型的最优简化问题已有文献研究[1-4]．

本文工作的关键在于，找出一个在给定输入函数和脉冲函数叠加输入而具有相同输出的等价系统．

假设多输入-多输出定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{w}_i(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,p,\\ \boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t),\end{cases} \tag{6}$$

分别等价于下列对应的系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)+G_iB\boldsymbol{v}_i\delta(t),\ \boldsymbol{\xi}(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{\xi}(t)+CN_i\boldsymbol{w}_i(t),\ i=1,2,\cdots,p,\end{cases} \tag{7}$$

其中G_i是某$n\times n$阶矩阵；N_i是作用于$\boldsymbol{w}_i(t)$的线性微分算子．那末，式(6)和(7)相对应的输出的拉氏变换应分别相等．即

$$B\boldsymbol{v}_iL(u_i(t))=G_iB\boldsymbol{v}_i+(sI-A)L(N_i\boldsymbol{w}_i(t)),\ i=1,2,\cdots,p. \tag{8}$$

对输入向量(4)，系统(1)的模型最优简化问题有如下性质：

定理． 设式(6)的诸系统的输出分别和式(7)的对应系统的输出相同，则系统(1)，(4)的输出和系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)+\sum\limits_{i=1}^{p}G_iB\boldsymbol{v}_i\delta(t),\ \boldsymbol{\xi}(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{\xi}(t)+C\sum\limits_{i=1}^{p}N_i\boldsymbol{w}_i(t)\end{cases} \tag{9}$$

的输出相同．

证明．由式(5)，(8)可知，系统(1)，(4)的输出的拉氏变换为

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{y}(t))&=C(sI-A)^{-1}B\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{v}_iL(u_i(t))\\ &=C(sI-A)^{-1}\sum_{i=1}^{p}[G_iB\boldsymbol{v}_i+(sI-A)L(N_i\boldsymbol{w}_i(t))]\end{aligned}$$

恰为系统 (9) 的输出 $\boldsymbol{z}(t)$ 的拉氏变换. 即系统 (1) 在向量函数 (4) 输入时的输出和系统 (9) 在向量函数 (4) 与脉冲函数叠加输入时的输出相等. 证毕.

该定理是各分量为不同类型函数的向量输入时的大系统模型最优简化的基础.

三、例

考虑 $p=3$ 的输入函数向量

$$\boldsymbol{u}(t)=(t, \sin\omega t, e^{s_0 t})^T, \quad t\geqslant 0. \tag{10}$$

记 $\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,0)^T$, $\boldsymbol{v}_3=(0,0,1)^T$, $\boldsymbol{v}=(1,1,1)^T$. 于是 (10) 式可写为

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{w}_1(t)+\boldsymbol{w}_2(t)+\boldsymbol{w}_3(t),$$

其中

$$\boldsymbol{w}_1(t)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_1 t, & t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{0}, & t<0;\end{cases} \quad \boldsymbol{w}_2(t)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_2\sin\omega t, & t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{0}, & t<0;\end{cases} \quad \boldsymbol{w}_3(t)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_3 e^{s_0 t}, & t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{0}, & t<0.\end{cases}$$

根据第二节的结论有:

推论. 如果系统 (1) 渐近稳定, A 非奇异, 且 s_0 不是 A 的特征值, 那末由式 (1),(10) 描述的系统的输出和系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)+[A^{-2}B\boldsymbol{v}_1+\omega(A^2+\omega^2 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_2+(A-s_0 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_3]\delta(t), \ \boldsymbol{\xi}(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{\xi}(t)+P\end{cases} \tag{11}$$

的输出相同, 其中

$$\begin{aligned}P=&-CA^{-1}B\boldsymbol{v}_1 t-CA^{-2}B\boldsymbol{v}_1-CA(A^2+\omega^2 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_2\sin\omega t\\ &-\omega C(A^2+\omega^2 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_2\cos\omega t-C(A-s_0 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_3 e^{s_0 t}.\end{aligned} \tag{12}$$

现把 (11) 式改写为所要求的形式. 记矩阵

$$B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3),$$

式中 $\boldsymbol{b}_i$, $i=1,2,3$ 是 n 维列向量. 故

$$B\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{b}_1, \ B\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{b}_2, \ B\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{b}_3.$$

引入矩阵

$$\bar{B}=(A^{-2}\boldsymbol{b}_1, \ \omega(A^2+\omega^2 I)^{-1}\boldsymbol{b}_2, \ (A-s_0 I)^{-1}\boldsymbol{b}_3).$$

于是

$$A^{-2}B\boldsymbol{v}_1+\omega(A^2+\omega^2 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_2+(A-s_0 I)^{-1}B\boldsymbol{v}_3=\bar{B}\boldsymbol{v}. \tag{13}$$

这样, 就把 (11) 式简写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)+\bar{B}\boldsymbol{v}\delta(t), \ \boldsymbol{\xi}(0)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{\xi}(t)+P.\end{cases} \tag{14}$$

根据上述结果, 求系统 (1),(10) 的最优简化模型的步骤为:

1) 对系统 (1),(10), 找出在输入 (10) 和脉冲函数叠加输入而具有相同输出的等价系统 (14).

2) 将等价系统 (14) 输出的瞬态和稳态部分分开. 与由脉冲输入引起的瞬态部分相对应的系统方程是

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t) + \bar{B}\boldsymbol{v}\delta(t), \\ \boldsymbol{z}'(t) = C\boldsymbol{\xi}(t).\end{cases} \tag{15}$$

可以用 Wilson 算法[1,6]求得其最优简化模型，设为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}_r = A_r\boldsymbol{\xi}_r + \bar{B}_r\boldsymbol{v}\delta(t), \\ \boldsymbol{z}'_r = C_r\boldsymbol{\xi}_r.\end{cases} \tag{16}$$

3）把最优简化模型 (16) 加上 (14) 的稳态输出，并重新配置得

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}_r = A_r\boldsymbol{\xi}_r + \bar{B}_r\boldsymbol{v}\delta(t), \\ \boldsymbol{z}_r = C_r\boldsymbol{\xi}_r - C_rA_r^{-1}B_r\boldsymbol{v}_1t - C_rA_r^{-2}B_r\boldsymbol{v}_1 - C_rA_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r\boldsymbol{v}_2\sin\omega t \\ \qquad - \omega C_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r\boldsymbol{v}_2\cos\omega t - C_r(A_r - s_0I)^{-1}B_r\boldsymbol{v}_3e^{s_0t} + \boldsymbol{s},\end{cases} \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} = {} & (C_rA_r^{-1}B_r - CA^{-1}B)\boldsymbol{v}_1t + (C_rA_r^{-2}B_r - CA^{-2}B)\boldsymbol{v}_1 \\ & + [C_rA_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r - CA(A^2+\omega^2I)^{-1}B]\boldsymbol{v}_2\sin\omega t \\ & + \omega[C_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r - C(A^2+\omega^2I)^{-1}B]\boldsymbol{v}_2\cos\omega t \\ & + [C_r(A_r - s_0I)^{-1}B_r - C(A - s_0I)^{-1}B]\boldsymbol{v}_3e^{s_0t}.\end{aligned} \tag{18}$$

设 $\bar{B}_r = (\bar{\boldsymbol{b}}_1, \bar{\boldsymbol{b}}_2, \bar{\boldsymbol{b}}_3)$，其中 $\bar{\boldsymbol{b}}_i, i = 1,2,3$，是 r 维列向量。取

$$B_r = \left(A_r^2\bar{\boldsymbol{b}}_1, \frac{1}{\omega}(A_r^2 + \omega^2I)\bar{\boldsymbol{b}}_2, (A_r - s_0I)\bar{\boldsymbol{b}}_3\right).$$

便有

$$A_r^{-2}B_r\boldsymbol{v}_1 + \omega(A_r^2 + \omega^2I)^{-1}B_r\boldsymbol{v}_2 + (A_r - s_0I)^{-1}B_r\boldsymbol{v}_3 = \bar{B}_r\boldsymbol{v}.$$

从而，由推论可得系统 (17) 和系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_r = A_r\boldsymbol{x}_r + B_r\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}_r = C_r\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{s}\end{cases} \tag{19}$$

具有相同输出．系统方程 (19) 就是在向量 (10) 输入时系统 (1) 的最优简化模型，且它的稳态输出和原系统 (1) 的稳态输出相同．

对一般的各分量为不同类型函数的向量输入时，大系统的模型最优简化以同样步骤进行处理，在此不再赘述．

参 考 文 献

[1] Wilson, D. A., Optimum Solution of Model-Reduction Problem, *Proc. IEE*, **117**(1970), 1161—1165.
[2] Wilson, D. A., Optimal Reduction of Multivariable Systems, *Int. J. Control*, **29**(1979), 267.
[3] 张钟俊、白尔维，正弦函数输入时高阶模型的最优简化，控制理论与应用，**1**(1984)，79—86.
[4] 邵剑，关于高阶模型的最优简化，控制理论与应用，待发表.
[5] Mishra, R. N. and Wilson, D. A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, *Int. J. Control*, **31**(1980), 443.

OPTIMAL MODEL-REDUCTION OF MULTIVARIABLE SYSTEMS

SHAO JIAN
(Zhejiang University)

ABSTRACT

The integral square error method applied to the optimum model reduction of a large scale system is only efficient to a few functions when the components of the input vector are the same. In this paper, it is pointed out that this technique can be applied to multi-input, multi-output systems in which the components of the input vector are of different kinds of functions.