第 12 卷 第 2 期
1986 年 4 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 12, No. 2
Apr., 1986

分散控制系统的固定模式

谢绪恺　　荆海英
(东 北 工 学 院)

摘　　要

本文用简单方法证明了 Anderson 和 Clements 的结果，得到另一判定固定模式的充要条件.

一、数学准备知识

引理 1. 设矩阵 $A\in R^{n\times r}$，$B\in R^{n\times m}$，$C\in R^{l\times r}$，$K\in R^{m\times l}$，则

$$\underset{K}{\mathrm{g.r.}}[A+BKC]=\min\left\{\mathrm{rank}[A\ B],\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}\right\}. \tag{1.1}$$

其中符号 g.r. 表示矩阵的类秩，即当矩阵 K 变动时方括号内矩阵所能有的最大秩.

此引理是文献 [1] 中引理 $A1$ 和 $A2$ 的概括与推广.

引理 2. 符号同引理 1. 条件

$$\underset{K}{\mathrm{g.r.}}[A+BKC]<n$$

成立的充要条件是

$$\mathrm{rank}[AB]<n$$

与

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}<n$$

中至少有一个成立.

引理 3. 设矩阵 $A\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{b}\in R^{n\times 1}$，$\boldsymbol{c}\in R^{1\times n}$，$k$ 为任意实数，且 $\mathrm{rank}[A]<n$，则

$$\underset{K}{\mathrm{g.r.}}[A+\boldsymbol{b}k\boldsymbol{c}]<n$$

的充要条件为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A & b\\C & 0\end{bmatrix}<n+1$$

上述三个引理的证明分别见附录 1—3.

二、主 要 结 论

设有如下的分散控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{N}B_i\boldsymbol{u}_i, \tag{2.1a}$$

本文于 1984 年 5 月 21 日收到.

$$\boldsymbol{y}_i = C_i\boldsymbol{x}_i,\ i = 1,\cdots,N. \tag{2.1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量；$\boldsymbol{u}_i\in R^{m_i}$ 与 $\boldsymbol{y}_i\in R^{l_i}$ 分别为第 i 个局部控制站的输入与输出向量;矩阵 $A\in R^{n\times n}$, $B_i\in R^{n\times m_i}$, $C_i\in R^{l_i\times n}$, $i=1,\cdots,N$.

关于此系统的固定模式存在如下定理.

定理 1.[1] 矩阵 A 的特征值 s 为系统(2.1)的固定模式的充要条件是存在集合 $\{1,\cdots,N\}$ 的某种不相交分划 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 与 $\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$, 使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI-A & B_{i_1}\cdots B_{i_k} \\ C_{i_{k+1}} & \\ \vdots & 0 \\ C_{i_N} & \end{bmatrix} < n. \tag{2.2}$$

证明. 根据固定模式的定义[2] 直接可知，复数 S 为系统 (2.1) 的固定模式的充要条件是

$$\underset{K}{\mathrm{g.r.}}[SI - A + \sum_{i=1}^{N} B_iK_iC_i] < n. \tag{2.3}$$

其中

$$K = \mathrm{blockdiag}[K_1,\cdots,K_N],\ K_i\in R^{m_i\times l_i},\ i = 1,\cdots,N. \tag{2.4}$$

而根据引理 2 可得,条件 (2.3) 成立的充要条件是

$$\operatorname{rank}\left[SI - A + \sum_{i=1}^{N-1} B_iK_iC_i\ B_N\right] < n \tag{2.5}$$

与

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A + \sum_{i=1}^{N-1} B_iK_iC_i \\ C_N \end{bmatrix} < n \tag{2.6}$$

中至少有一个成立. 再对 (2.5) 式应用引理 2. 这时将其中的矩阵

$$\left[SI - A + \sum_{i=1}^{N-2} B_iK_iC_i\ B_N\right]$$

看作引理 2 中的矩阵 A, B_{N-1} 看作 B, $[C_{N-1}\ \ 0]$ 看作 C,则 (2.5) 式成立的充要条件是

$$\operatorname{rank}\left[SI - A + \sum_{i=1}^{N-2} B_iK_iC_i \quad B_{N-1}\ B_N\right] < n \tag{2.7}$$

与

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A + \sum_{i=1}^{N-1} B_iK_iC_i & B_N \\ C_{N-1} & 0 \end{bmatrix} < n \tag{2.8}$$

中至少有一个成立. 同理对 (2.6) 式应用引理 2, 并照此步骤进行,则经过 $(n-2)$ 步之后,必有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI-A & B_{i_1}\cdots B_{i_k} \\ C_{i_{k+1}} & \\ \vdots & 0 \\ C_{i_N} & \end{bmatrix} < n, \tag{2.9}$$

为条件 (2.3) 成立的充要条件．定理 1 证完．

上述定理是 Anderson 和 Clements 首先得到的[1]．但本文的证明简单，且较直观．

现在设系统 (2.1) 中的 $m_i = l_i = 1$，$i = 1, \cdots, N$．这时系统变成具有 N 个通道的单输入单输出系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{u}_i \tag{2.10a}$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x},\ i = 1, \cdots, N. \tag{2.10b}$$

定理 2. 系统 (2.10) 存在固定模式 s 的充要条件是对任何集合 $\{i_1, \cdots, i_M\} \subseteq \{1, \cdots, N\}$，都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A & \boldsymbol{b}_{i_1} \cdots \boldsymbol{b}_{i_M} \\ \boldsymbol{c}_{i_1} & \\ \vdots & 0 \\ \boldsymbol{c}_{i_M} & \end{bmatrix} < n + M,\ M = 1, \cdots, N. \tag{2.11}$$

必要性的证明．设系统 (2.10) 存在固定模式 s，则根据定理 1 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A & \boldsymbol{b}_{i_1} \cdots \boldsymbol{b}_{i_k} \\ \boldsymbol{c}_{i_{k+1}} & \\ \vdots & 0 \\ \boldsymbol{c}_{i_N} & \end{bmatrix} < n. \tag{2.12}$$

在上式的矩阵中任意去掉若干的行与列(前 n 行 n 列除外)，设其和数为 $N - M$．然后在余下的矩阵中加上和数为 M 的行与列，使之配成 (2.11) 中矩阵的形式．由此 (2.11) 式显然成立．必要性证完．

充分性的证明．根据引理 3，从条件 (2.11) 不难推论：对任意集合 $\{i_1, \cdots, i_M\} \subseteq \{1, \cdots, N-1\}$ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A + \boldsymbol{b}_N k_N \boldsymbol{C}_N & \boldsymbol{b}_{i_1} \cdots \boldsymbol{b}_{i_M} \\ \boldsymbol{C}_{i_1} & \\ \vdots & 0 \\ \boldsymbol{C}_{i_M} & \end{bmatrix} < n + M,\ M = 1, \cdots N - 1. \tag{2.13}$$

其中 k_N 为任一实数．同理，从条件 (2.13) 可以推论：对任意集合 $\{i_1, \cdots, i_M\} \subseteq \{1, \cdots, N-2\}$ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A + \boldsymbol{b}_{N-1} k_{N-1} \boldsymbol{c}_{N-1} + \boldsymbol{b}_N k_N \boldsymbol{c}_N & \boldsymbol{b}_{i_1} \cdots \boldsymbol{b}_{i_M} \\ \boldsymbol{c}_{i_1} & \\ \vdots & 0 \\ \boldsymbol{c}_{i_M} & \end{bmatrix} < n + M,\ M = 1, \cdots, N-2. \tag{2.14}$$

继续上述步骤，最后便得

$$\operatorname{rank}\left[SI - A + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i k_i \boldsymbol{c}_i\right] < n. \tag{2.15}$$

其中 k_i，$i = 1, \cdots, N$，为任意实数，因此系统有固定模式 s．充分性证完．

定理 2 表明，具有 N 个通道的单输入单输出系统，产生固定模式 s 的充要条件是其由任意 $M(M = 1, \cdots, N)$ 个通道组成的子系统都有公共传递零点 s[4]．

值得指出，文献[3]中用传递矩阵给出的主要定理实际是本定理的频域表示.

参 考 文 献

[1] Anderson, B. D. O and Clements, D. J. Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control, *Automatic*, **17**(1981), 703—712.

[2] Wang, S. H and Davison, E. J. On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans Aut. Cntrol*, AC-**18**(1973), 473—478.

[3] Seraji, H., On Fixed modes in Decentralized Control Systems, *Int. J. Control*, **35**(1982), 775—784.

[4] Davison. E. J and Wang, S. H. Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, **10**(1974), 643—657.

附录 1.

引理 1 的证明

由等式 $A+BKC=[A\ B]\begin{bmatrix} I \\ KC\end{bmatrix}=[I\ BK]\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}$ (1)

可得

$$\underset{K}{\text{g.r.}}[A+BKC]\leqslant \operatorname{rank}[A\ B],\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}, \tag{2}$$

因此，当 A 为满秩矩阵时，引理的正确性显然，下设 A 为非满秩阵．令

$$\operatorname{rank}[A]=n_0<n, r, \operatorname{rank}[A\ B]=n_0+n_1,\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}=n_0+n_2$$

其中 n_1 和 n_2 为非负整数．不失一般性，可选满秩方阵 T_1 与 T_2，使

$$T_1[AB]=\begin{bmatrix} A_1 & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{31} & B_{32}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \\ C\end{bmatrix}T_2=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23}\end{bmatrix},$$

其中 A_1, A_2, B_{32}, C_{23} 分别为 $n_0\times r$, $n_0\times n_0$, $n_1\times n_1$, $n_2\times n_2$ 的满秩阵．选矩阵

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{32}^{-1}K_1C_{23}^{-1}\end{bmatrix},$$

其中 K_1 为任一 $n_1\times n_2$ 满秩阵．由此有

$$T_1[A+BKC]T_2=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

由上式及(2)式直接得

$$\underset{K}{\text{g.r.}}[A+BKC]=\min\left\{\operatorname{rank}[A\ B],\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}\right\}.$$

引理 1 证完.

附录 2.

引理 2 的证明.

根据引理 1 及其中的(1)式，直接得引理 2.

附录 3.

引理 3 的证明.

必要性的证明. 根据引理 2，可得

$$\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]<n \text{ 或 } \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}<n,$$

不论上面第一式还是第二式成立，显然都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & 0 \end{bmatrix}<n+1.$$

充分性的证明.设

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & 0 \end{bmatrix}<n+1, \tag{4}$$

由给定条件 $\operatorname{rank}[A]<n$ 可知，此时应有

$$\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]<n \text{ 或 } \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}<n, \tag{5}$$

否则将与条件(1)矛盾．对式(5)利用引理1便得

$$\underset{K}{\mathrm{g.r}}\,[A+\boldsymbol{b}K\boldsymbol{c}] = \min\left\{\operatorname{rank}[A\ \ \boldsymbol{b}],\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}\right\}<n.$$

引理3证完．

FIXED MODES FOR DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

XIE XUKAI　JING HAIYING

(Northeast University of Technology)

ABSTRACT

In this paper, a new criteron for the existence of fixed modes is given, and the result presented by Anderson and Clements in 1981 is proved in a simpler way.