第12卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 2
1986 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1986

得到误差检验式的频域方法

楼 希 澄
(中国科学院电子所)

摘　　要

误差检验式是线性系统误差检验中常用的关系式. 本文首先建立了误差检验式的时域和频域之间的关系. 由此出发,证明了只要得到多项式矩阵 $[C'(zI-A)']'$ 的左零空间的基,则可得到所有的误差检验式;证明了用"按行搜寻格子" (Searching the Crate by Rows) 的方法可以得到 $[C'(zI-A)']'$ 的左零空间的最小基,从而得到误差检验式的频域方法.

一、引　　言

系统的误差检测是一个既具有理论意义也具有实际意义的问题. 在这方面人们已经做过大量的工作,提出过许多误差检测方法[1]. 其中一种方法是利用系统观测信号之间的线性相关性来检测误差. 例如,考虑某个飞行体的状态方程,其状态变量是飞行体的速度和加速度.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \\ y(k) &= x(k), \end{aligned} \tag{1}$$

式中 $x'(k)=[x_1(k)x_2(k)]'$, $x_1(k)$]为速度; $x_2(k)$ 为加速度. 在该例中检测速度和加速度传感器误差的方法可以用下式计算:

$$\alpha(k)=y_1(k+1)-y_1(k)-Ty_2(k), \tag{2}$$

式中 T 为取样间隔. 如 $\alpha(k)=0$, 则认为系统处于正常状态; 如 $\alpha(k)\neq 0$, 则认为传感器发生了故障. 关系式 (2) 叫做误差检验式 (Parity Check).

一般地讲,如果考虑一个线性离散时不变系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $x(k)\in R^n$; $y(k)\in R^m$; A 和 C 为具有相应维数的矩阵. 定义

$$\bar{y}'_p(k)=[y'(k)y'(k+1)\cdots y'(k+p-1)]', \tag{4}$$

则误差检验式可以写成

$$\alpha(k)=a'_p\bar{y}(k), \tag{5}$$

式中 a_p 为某个 pm 维常矢量

$$a'_p=[a'_{p0}a'_{p1}\cdots a'_{pp}]. \tag{6}$$

p 叫做误差检验式的长度.

本文于 1982 年 9 月 29 日收到.

用几何方法研究误差检验式的产生是一个曾经广泛讨论过的问题[1,2,6]．但这种方法只能处理 p 固定的情况．本文提出一种频域描述的方法．这种方法给出一组具有最小长度的基本误差检验式，由此可产生任何长度的误差检验式．

二、误差检验式的频域描述

序列 $y(i), i=0,1,\cdots$ 的单边 Z 变换为

$$y(z)=\sum_{i=0}^{\infty} y(i) z^{-i}, \tag{7}$$

利用这个定义，可以证明下述时域和频域间的关系．

定理 1．下面两条命题是等价的．

1) $a_p'\bar{y}_p(k)=0,\ k=1,\cdots,p=0,\cdots \forall x_0 \in R^n$; (8)

2) $p'(z) C'(zI-A)^{-1}=q'(z)$, (9)

式中 $q(z)$ 是某个 $n\times 1$ 多项式矢量，

$$p'(z)=\sum_{i=0}^{p} a_{pi}' z^i.$$

证明．

(8) 式的 Z 变换为

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{p} a_{pt}' z^t\left(y(z)-\sum_{r=0}^{t-1} y(r) z^{-r}\right) \\
&=\sum_{t=0}^{p} z^t a_{pt}' y(z)-\sum_{t=0}^{p} z^t a_{pt}' \sum_{r=0}^{t-1} y(r) z^{-r} \\
&=p'(z) y(z)-\sum_{t=0}^{p} a_{pt}' \sum_{r=0}^{t-1} y(r) z^{t-r}=0.
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
y(z)&=C(zI-A)^{-1} x_0 z, \\
y(r)&=C x(r)=C A^r x_0,
\end{aligned}$$

因而 (8) 式的 Z 变换可以写成

$$p'(z) C(zI-A)^{-1} x_0=\sum_{t=0}^{p} a_{pt}' C \sum_{r=0}^{t-1} A^r z^{t-r-1} x_0.$$

因为此式对所有 $x_0 \in R^n$ 都是正确的，则

$$p'(z) C(zI-A)^{-1}=\sum_{t=0}^{p} a_{pt}' C \sum_{r=0}^{t-1} A^r z^{t-r-1}=s'(z),$$

式中 $s(z)$ 是 $n\times 1$ 多项式矢量．

定义

$$g(k)=a_p'\bar{y}_p(k)=\sum_{i=0}^{p} a_{pi}' y(k+i),$$

由前面的证明过程可以看出，$g(k)$ 的 Z 变换为

$$g(z)=p'(z)C(zI-A)^{-1}x_0-s'(z)x_0,$$

考虑到 (9) 式

$$g(z)=[q'(z)-s'(z)]x_0,\ \forall x_0\in R^n,$$

因为 $q(z)$ 和 $s(z)$ 为多项式矢量,所以 $g(z)$ 是一多项式函数. 可是

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k},$$

因而

$$g(k)=a_p'\bar{y}_p(k)=0,\ k=1,\cdots.$$

因为 (8) 式是误差检验式,而 (9) 式可看做其频域描述,所以这个定理给出了时域和频域之间的联系.

下面证明 $p(z)$和 $q(z)$ 占了多项式矩阵的 $[C'(zI-A)']'$ 的左零空间. 因为 (9) 式可以写成

$$p'(z)C=q'(z)(zI-A)$$

或

$$[p'(z)\ -q'(z)]\begin{bmatrix}C\\ zI-A\end{bmatrix}=0, \tag{10}$$

如果把 $[p'(z)\ -q'(z)]'$ 叫做多项式检测矢量，并且把 $[C'(zI-A)']'$ 的左零空间叫做 N_{lc}，则由 (10) 式可以看出 $[p'(z)\ -q'(z)]\in N_{lc}$.

反之由定理 1 可证明，N_{lc} 中的任一多项式矢量都对应于某个长度 p 的误差检验式. 因而找到 N_{lc} 的一组基,即可产生所有可能长度的所有误差检验式.

三、N_{lc} 的最小基

一个有理式矢量所构成的线性空间的精细结构是与其最小多项式基(最小基)相联系的[3]. 从工程的角度来看最小基是很重要的. 因为多项式检测矢量的次数越低则所需的延迟元件越少.

为了说明如何产生 N_{lc} 的最小基，首先引入"按行搜寻格子法"[3,4]. 所谓格子是一 m 列 n 行的表格. 其 m 列对应于 C 矩阵的行 c_1', $\cdots$, c_m', 而 n 行则对应于 I, A, $\cdots$, A^{n-1}. 因而表格的 (i,j) 单元对应于列矢量 $c_j'A^{i-1}$.

搜寻的过程是这样的. 首先搜寻表格的第一行，即从 c_1' 到 c_m'. 如果 c_j' 与 c_1', $\cdots$, c_{j-1}' 线性无关,则在第 $(1,\ j)$ 格子中写个×，否则写个 0 . 然后用同样方法搜寻下面各行. 要注意的是当某一行中一旦出现一个 0 以后，在它下面同一列中的其它矢量将与前面的矢量线性相关，而且不难证明它们并不产生新的多项式误差检验关系. 因而将在这些格子中留下空白. 如果系统是可观察的，则用这种方法将得到有 m 个 0 和 n 个×的表格(见本文后面的例子).

表格中的 m 个 0 代表了 m 个误差检验式. 例如某个 0 出现在第一行的 $(1,\ j)$ 格子中. 因而由搜寻的过程可知

$$c'_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_i c'_i$$

或者

$$[a_1 \cdots a_{j-1} \ -1 \ 0 \cdots 0]\begin{bmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_j \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix} x(k)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i c'_i - c'_j\right] x(k) = 0.$$

如果定义

$$a' = [a_1 \cdots a_{j-1} \ -1 \ 0 \cdots 0],$$

则 $a'y(k) = 0$，显然这是个误差检验式.

可以进一步证明

定理 2. 按行搜寻格子法产生 N_{lc} 的最小基.

因为篇幅的限制证明从略[5].

由本节的结果可以得出产生所有可能的误差检验式的方法:

1）利用按行搜索格子法得到 N_{lc} 的一组最小基 $m_1(z), \cdots, m_m(z)$.

2）构造一多项式矩阵 $M(z)$，其行为最小基 $m_1(z), \cdots, m_m(z)$.

3）任何检验矢量 $p(z)$（由 $p(z)$ 得到相应的误差检验式，见前节）都可由某个多项式行矢量左乘 $M(z)$ 而产生.

$$p'(z) = r'(z)M(z). \tag{11}$$

四、搜寻格子法的例子

考虑一个系统，其参数为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$CA = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad CA^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

由于 C 的头两行互相独立而第三行与第一行相关，则可以标出表格的第一行，如图 1 所示. 用同样的方法可以确定第二和第三行. 对应于第一行中第一个零的误差检验式为

$$a'_1 C = [\,2 \ \ 0 \ -1\,]C = 0.$$

如果用 $y_1(k)$，$y_2(k)$ 和 $y_3(k)$ 表示系统的输出，则这个误差检验式可以写成

$$2y_1(k) - y_3(k) = 0.$$

	c_1'	c_2'	c_3'
A^0	×	×	0
A^1	×	0	
A^2	0		

图 1

其相应的多项式矢量 $m_1(z)$ 为

$$m_1(z)=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}z^0=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

与此类似，经过简单的计算可以证明，对应于第二行中零的第二个误差检验式为

$$a_2'\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=[1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0]\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=0.$$

这对应于误差检验式

$$y_1(k)-y_2(k+1)=0.$$

相应的多项式矢量 $m_2(z)$ 为

$$m_2(z)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}z^0+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}1\\-z\\0\end{bmatrix}.$$

利用线性代数的知识还可以证明，对应于第三行中零的误差检验式为

$$a_3'=[-1\ \ 1\ \ 0\ \ -2\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0],$$

这对应于

$$-y_1(k)+y_2(k)-2y_1(k+1)-y_1(k+2).$$

相应的多项式矢量为

$$m_3(z)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}z^0+\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}z^2=\begin{bmatrix}-1-2z-z^2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

因而

$$M(z)=\begin{bmatrix}m_1'(z)\\m_2'(z)\\m_3'(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\1 & -z & 0\\-1-2z-z^2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

所有其它的误差检验式都可按 (11) 式得到.

感谢麻省理工学院电机系 A. Willsky 教授对此文所做的指导. 感谢 G. Uerghese 教授和J. Willems 教授对本文提出了宝贵建议及给予的热情帮助.

参　考　文　献

[1] Willsky, A. S., A Survey of Seueral Failure Defection Methods, *Automatica*, (1976), 601—611.
[2] Chaw, E. Y., A Failure Defection System Design Methodology, Ph. D. Disserfation, MIT. July 1980.
[3] Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, Inc. 1980.
[4] Kalman, R. E., Kronecker Invariants and Feedback, Proceedings of a Conference of Ordinary Differential Equations, June 14—23, 1971.
[5] X. C. Lou, A. Willsky and G. Uerghese, Optimally Robust Redundency Relations for Failure Detection in Uncertain Systems, Submitted to Automatica.

A FREQUENCY DOMAIN APPROACH TO OBTAIN ALL PARITY CHECKS

Lou Xicheng

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

Abstract

Parity check expression is a useful formulation in system failure detection. In this paper, the relationship between time and frequency domain descriptions of parity check is established. Then it is proved that all parity checks can be generated from the basis of the left null space of the polynomial matrix $[C'(zI-A)']$. It is also proved that this basis can be obtained by the method of "searching the crate by rows". And thus, frequency domain approach for parity check is obtained.