

# 一种系统误差检测方法 ——误差投影法

楼希澄

(中国科学院电子所)

## 摘要

本文提出一种线性系统误差检测的方法——误差投影法，用以解决系统参数不确定性情况下系统误差的检测问题。由于利用了矩阵的奇异值分解使得方法简单而清晰。

近年来有过不少文章讨论系统误差的检测和识别这一重要课题<sup>[1]</sup>（这里的“误差”是指控制系统中的传感器、作动器的失效或系统模型的参数因某种原因发生的重大变化），而对系统的不确定性（例如系统模型的不准确或参数的微小变化等）不敏感的误差检测方法，到目前为止，仅有 Chow<sup>[2]</sup>，Chow 与 Willsky<sup>[3]</sup> 的文章讨论过。本文提出一种系统误差检测方法——误差投影法，以解决这个问题。

## 一、系统不存在不确定性的情况

本节讨论系统不存在不确定性时误差投影法的含义。首先考虑一个线性、离散、时不变系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}(k) \in R^n$ ， $\mathbf{y}(k) \in R^m$ ， $A \in R^{n \times n}$ ，而  $C \in R^{m \times n}$ 。为了讨论方便，这里仅考虑传感器和系统其它参数的误差，不考虑作动器的误差，因而在系统方程式中略去了驱动项。

定义长度为  $p$  的扩展的观测矢量为

$$\bar{\mathbf{y}}_p(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+p-1) \end{bmatrix}, \quad p, k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

显然

$$\bar{\mathbf{y}}_p(k) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad (3)$$

令  $s = mp$ , 则  $\bar{\mathbf{y}}_p(k) \in R^s$ .

定义

$$\bar{C}_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \in R^{s \times n} \quad (4)$$

及观测空间  $\mathcal{Z}_p$  为

$$\mathcal{Z}_p = R(\bar{C}_p), \quad (5)$$

这里  $R(\bar{C}_p)$  为  $\bar{C}_p$  的值域. 定义检测空间  $\mathcal{S}_p$  为  $\mathcal{Z}_p$  的直交新空间, 即

$$\mathcal{Z}_p \oplus \mathcal{S}_p = R^s, \quad \mathcal{Z}_p \perp \mathcal{S}_p.$$

因而, 对任何矢量  $\mathbf{g} \in \mathcal{S}_p$ , 有

$$\langle \mathbf{g}, \bar{\mathbf{y}}_p(k) \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

式 (6) (或更准确地讲, 其左边部分) 叫做误差检验式 (Parity Check)<sup>[2,4]</sup>. 在正常情况下 (6) 式的左边等于零; 如果系统发生了误差, 则不等于零. 这就是一种常用的误差检验法.

在本文提出的误差投影法中, 考虑沿  $\mathcal{Z}_p$  到  $\mathcal{S}_p$  的正投影  $P_G$ , 显然对于正常的系统有

$$P_G \bar{\mathbf{y}}_p(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

根据 (7) 式左边是否为零即可判断系统是否出错.

线性空间的正投影具有某些重要的性质:

$$P_G = P_G^2 = P_G', \quad (8)$$

$$R(P_G) = \mathcal{S}_p, \quad \mathcal{N}(P_G) = \mathcal{Z}_p, \quad (9)$$

$$P_G = G(G'G)^{-1}G', \quad (10)$$

式中  $G$  为矩阵, 其列为  $\mathcal{S}_p$  空间的一组基,  $G'$  为  $G$  的转置. 如果系统不存在不确定性, 则只要找到观测空间  $\mathcal{Z}_p$  的直交新空间  $\mathcal{S}_p$  的任一组基, 即可得到  $P_G$ , 从而实现误差投影法. 但在存在系统不确定性的情况下问题就复杂多了.

## 二、系统具有不确定性的情况

为了表示系统不确定性的影响, 引入参数  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . 方程 (1) 可以改写为

$$\mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k), \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_i \mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

式中  $A_i$  和  $C_i$  表示系统矩阵随参数  $i$  的变化.

因而

$$\bar{\mathbf{y}}_p(k) = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{p-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \bar{C}_{pi} \mathbf{x}(k), \quad (12)$$

$$\mathcal{Z}_{pi} = R(\bar{C}_{pi}), i = 1, 2, \dots, l.$$

不难看出,当  $i$  变化时  $\mathcal{Z}_{pi}$  也将随之变化. 因而一般地讲,垂直于所有  $\mathcal{Z}_{pi}$  的  $\mathcal{S}_p$  可能找不到. 也就是说可能无法找到一个  $P_G$  使  $\mathcal{Z}_{pi}$  中的所有矢量 (对所有的  $i$ ) 的投影都是零. 所以需要引入一个新的准则. 这个准则是各  $\mathcal{Z}_i$  (为书写方便将略去  $\mathcal{Z}_{pi}$ ,  $\mathcal{S}_p$  等符号的下标  $p$ ) 中的“单位矢量”在  $\mathcal{S}$  中的最大投影的模之和最小. “单位矢量”为对应于单位长度的状态矢量  $x$  的矢量.

如果定义矩阵  $G$ , 其列向量为  $\mathcal{S}$  的规一化直交基, 则希望选择  $G$  使得观测矢量在  $\mathcal{S}$  上的投影

$$G'y = G' \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^p \end{bmatrix} x \triangleq G' \bar{C}_i x \quad (13)$$

尽可能的小. 这种极小化应对模相同的任意  $x$  都适用. 如果再考虑不确定性的影响, 很自然地有准则

$$\min_G \sum_{i=1}^l \|\bar{C}_i' G\|_F^2, \quad (14)$$

这里  $\|\cdot\|_F$  是矩阵的 Frobenius 范数.  $\|A\|_F^2 \triangleq \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2$ . 式 (14) 的目的是选择  $G$ , 使得  $\mathcal{Z}_i$  中的“单位矢量”在  $\mathcal{S}$  中投影的模的最大值之和最小.

式 (14) 又可以进一步写为

$$\min_{G'G=I} \|\bar{C}' G\|_F^2, \quad (15)$$

$$\bar{C}' = \begin{bmatrix} \bar{C}'_1 \\ \vdots \\ \bar{C}'_l \end{bmatrix}. \quad (16)$$

为了解式 (15) 提出如下引理:

### 引理 1.

如果

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

对称半正定,  $A_{11}$  为  $m \times m$ ,  $A$  为  $n \times n$  矩阵, 其特征值按递增顺序写出, 则

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A_{11}), i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(A) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i(A_{11}) = tr(A_{11}), \quad (18)$$

式中  $tr(\cdot)$  表示矩阵的迹. 证明见文献 [7].

设  $H$  为某矩阵, 满足

$$H'H = I_s,$$

$$H' = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{bmatrix}, H'_1 \in R^{(s-r) \times s},$$

则

$$H'ZZ'H = \begin{bmatrix} H_1'ZZ'H_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

这里  $I_s$  是  $s$  维单位阵,  $Z$  是满足  $Z'Z = I$  的矩阵. 则有

$$\|Z'H_1\|_F^2 = \text{tr}(H_{11}).$$

按照引理 1

$$\sum_{i=1}^{s-r} \lambda_i(ZZ') = \sum_{i=1}^{s-r} \lambda_i(H'ZZ'H) \leq \text{tr}(H_{11}) = \|Z'H_1\|_F^2.$$

等号成立的条件是  $H'$  的各行等于  $ZZ'$  的对应于最小特征值的各特征向量 (例如当  $ZZ'$  的特征值为  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_s$ , 对应的特征向量为  $h_1, \dots, h_s$ , 则  $H'$  的各行应为  $h'_1, \dots, h'_{s-r}$ ). 又因为

$$\lambda_i(ZZ') = \sigma_i^2,$$

$\sigma_i$  为  $Z$  的奇异值, 则有以下定理:

**定理.**

设矩阵  $\bar{C}$  的奇异值为  $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_s$ , 于是

$$\min_{G'G=I} \|\bar{C}'G\|_F^2 = \sum_{i=1}^{s-r} \sigma_i^2, \quad (19)$$

使上式达到极小的  $G^*$  为

$$G^* = [g_1 \dots g_{s-r}]. \quad (20)$$

这里  $g_1, \dots, g_{s-r}$  为  $Z$  的对应于  $\sigma_1, \dots, \sigma_{s-r}$  的奇异矢量.

因而 (19) 和 (20) 式给出了问题 (15) 的一个非常简单的解, 用  $\bar{C}$  的奇异值分解即可得到.

这种方法还可以用来处理存在系统噪声的情况<sup>[7]</sup>.

总而言之, 这种方法包括以下几个步骤:

1) 计算  $\bar{C}_i$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A \\ \vdots \\ C_i A_i^p \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, l.$$

2) 计算矩阵  $\bar{C}$   $\bar{C} = [C_1 C_2 \dots C_l]$ .

3) 计算  $\bar{C}$  的奇异值和奇异矢量  $g_1, \dots, g_{s-r}$ .

4) 矩阵  $G$   $G = [g_1 \dots g_{s-r}]$ .

5) 根据投影  $G'y$  的模  $\|G'y\|$ , 判断系统是否发生误差.

### 三、例

有一个包括三部互相耦合的发电机的发电系统<sup>[6]</sup>, 该系统经过线性化后可表示成一个五阶系统



$$\begin{cases} \dot{x} = Fx, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (21)$$

这里

$$x = \begin{bmatrix} \Delta\omega_r \\ \Delta\delta_c \\ \Delta\omega_c \\ \Delta\delta_d \\ \Delta\omega_d \end{bmatrix},$$

式中  $\Delta\omega_r, \Delta\omega_c$  和  $\Delta\omega_d$  是发电机轴的相对角速度, 而  $\Delta\delta_c$  和  $\Delta\delta_d$  为轴的相对角度. 式(21)中

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0.00756 & 0.00486 & 0.00733 & -0.00181 \\ 0 & 0 & 377 & 0 & 0 \\ 0.0122 & f_{32} & f_{33} & 0.0304 & -0.00454 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 377 \\ -0.292 & 0.163 & -0.0292 & f_{54} & f_{55} \end{bmatrix}.$$

这里  $f_{11}, f_{33}$  和  $f_{55}$  的变化范围为  $-0.15$  到  $-0.2$ .  $f_{32}$  和  $f_{54}$  的变化范围为  $-0.1$  到  $-0.4$ . 为了应用上节的结果, 将式(21)化成离散形式

$$\begin{cases} x(k+1) = A \times (k), \\ y(k) = C \times (k), \end{cases} \quad (22)$$

式中  $A = \exp(F\Delta)$ .

$\Delta$  为取样间隔, 取为 0.25 秒, 相当于此例中最快模式周期的 1/4.

在本例中考虑两种  $C$  矩阵

$$C^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵  $C^1$  表示对  $\Delta\omega_r, \Delta\omega_c$  和  $\Delta\omega_d$  的观测, 而  $C^2$  表示对  $\Delta\omega_r, \Delta\omega_c$  和  $\Delta\delta_c$  的观测.

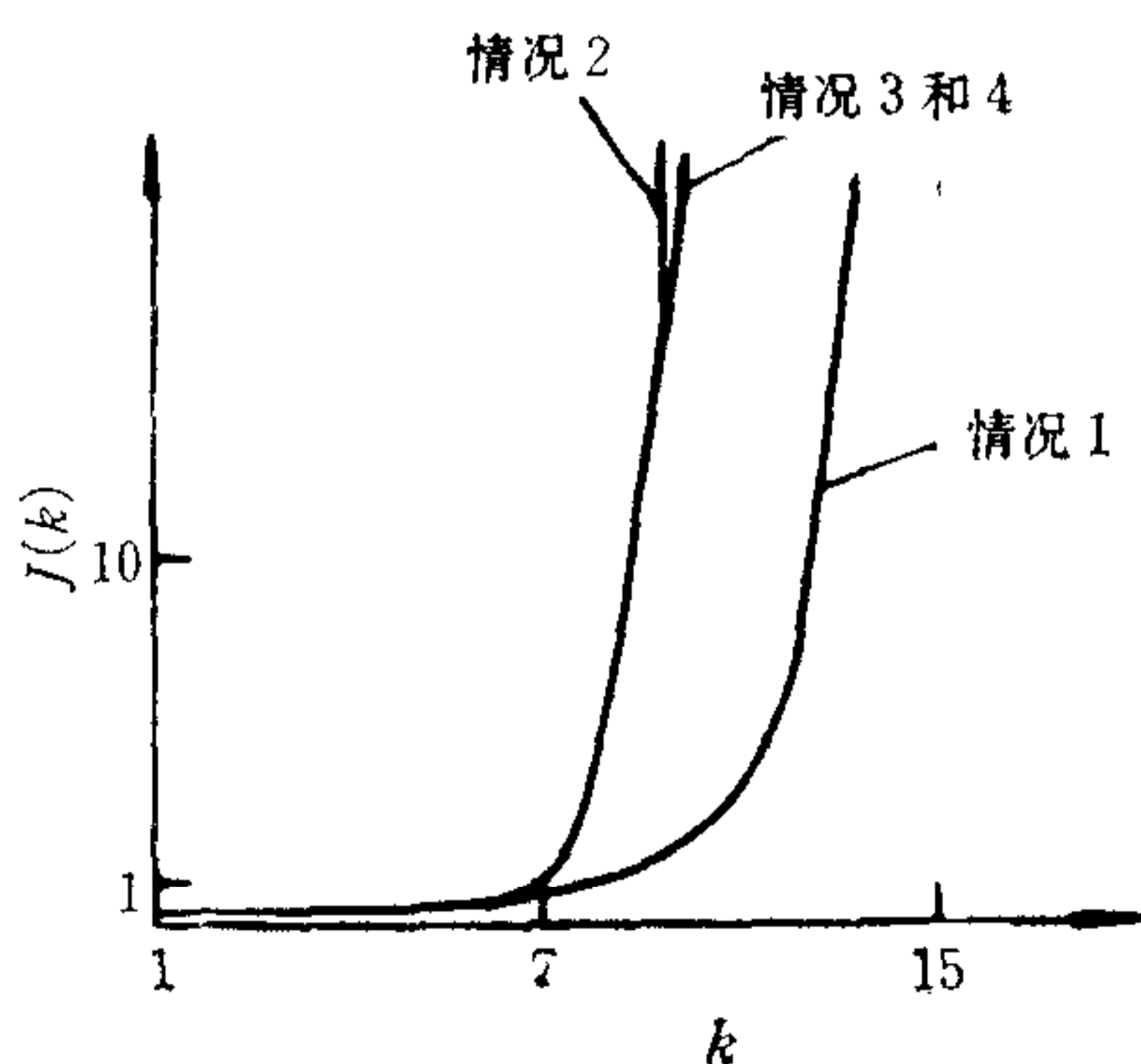


图 1

根据  $f_{11}, f_{33}, f_{55}, f_{32}$  和  $f_{54}$  的变化范围 (它们代表系统参数的不确定性), 将其离散化为三组 ( $i = 3$ ), 如表 1 所示.

表 1

	$f_{11}$	$f_{32}$	$f_{33}$	$f_{54}$	$f_{55}$
1	-0.2	-0.1	-0.2	-0.1	-0.2
2	-0.15	-0.4	-0.15	-0.4	-0.15
3	-0.15	-0.2	-0.15	-0.2	-0.15

下一步是计算  $F_i, A_i = \exp(F_i\Delta)$  和相应的  $\bar{C}_i, i = 1, 2, 3$ .

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{p-1} \end{bmatrix},$$

式中  $C$  可以是  $C^1$  或  $C^2$ .

为了研究  $p$  和  $C$  的影响, 考虑四种情况:

- 1)  $p = 6, C = C^1,$
- 2)  $p = 6, C = C^2,$
- 3)  $p = 4, C = C^1,$
- 4)  $p = 4, C = C^2.$

然后按照 (19) 和 (20) 式计算  $\bar{C}$  的奇异值、奇异矢量和  $J$ .

$$J = \min_{G'G=I} \sum_{i=1}^3 \|\bar{C}'_i G\|_F^2 = \min_{G'G=I} \|\bar{C}' G\|_F^2 = \sum_{i=1}^{s-r} \sigma_i^2.$$

显然  $J$  是随着  $G$  的维数  $s - r$  的增加而单调增加的. 图 1 示出了  $J$  随  $G$  的维数  $k$  变化的关系,  $J(k) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$ , 可以看出, 为了使正常系统的观测矢量的投影足够小,  $G$  的维数在情况 2), 3) 和 4) 下应小于 7 或 8, 而在情况 1) 下应小于 10. 因为  $J(k)$  在  $k$  超过这些值后增长非常快.

感谢麻省理工学院 A. Willsky 教授对本论文的指导; 感谢 G. Verghese 教授在多次讨论中提出的宝贵意见.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Willsky, A. S., A Survey of Several Failure Detection Methods, *Automatica*, (1976), 601—611.
- [ 2 ] Chow, E. Y., A Failure Detection System Design Methodology, Ph. D. dissertation, July, 1980. MIT.
- [ 3 ] Willsky, A. S. Chow, E. Y., et al., Dynamic Model-based Techniques for the Detection of Incidents of Freeways, *IEEE Trans., Automatic Control*, (1980).
- [ 4 ] Potter, J. E., and Suman, M. C., Thresholdless Redundancy Management with Arrays of Skewed Instruments, Integrity in Electronic Flight Control Systems, AGARDOGRAPH-244, (1977), 15—1 to 15—25.
- [ 5 ] Bellman, R., Inequalities, 1963 Macmillan.
- [ 6 ] Winkelman, J. R., Multi-time-scale Analysis of a Power System, *Automatica*, 16(1980), 34—43.
- [ 7 ] X. C. Lou, A. S. Willsky and Verghese, G. C., Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems, Research Report, Dept of EECS, Massachusetts Institute of Technology April, 1983.

## A SYSTEM FAILURE DETECTION METHOD ——FAILURE PROJECTION METHOD

LOU XICHENG

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

In this paper, a system failure detection method——Failure Projection Method (FPM), is proposed, which is used to solve the problem of failure detection in the presence of system parameter uncertainties. This method is simple and clear because of the introduction of a singular value decomposition.