

继电控制系统振荡状态的分析

余祖铸

(上海精密仪器研究所)

摘 要

本文提出了用z变换方法分析非线性继电控制系统的自振问题。用z变换法分析继电系统的自振,可直接在时域内定量地求得自振参数。

非线性控制系统中,如果回路的参数满足一定的条件,系统将处于稳定的自持振荡状态。自振的参数可以用谐波平衡法来求得。

具有典型继电特性的非线性系统,通常工作在振荡状态。当回路自振时,继电元件的输出是一列矩形脉冲,因而可将回路等效成离散系统,并用分析离散系统的z变换法来研究回路的自振。

一、继电控制系统的分析

由阈值为D的继电元件组成的非线性控制系统如图1(a)所示。其中 $W_0(S)$ 是系统线性部分的传递函数。

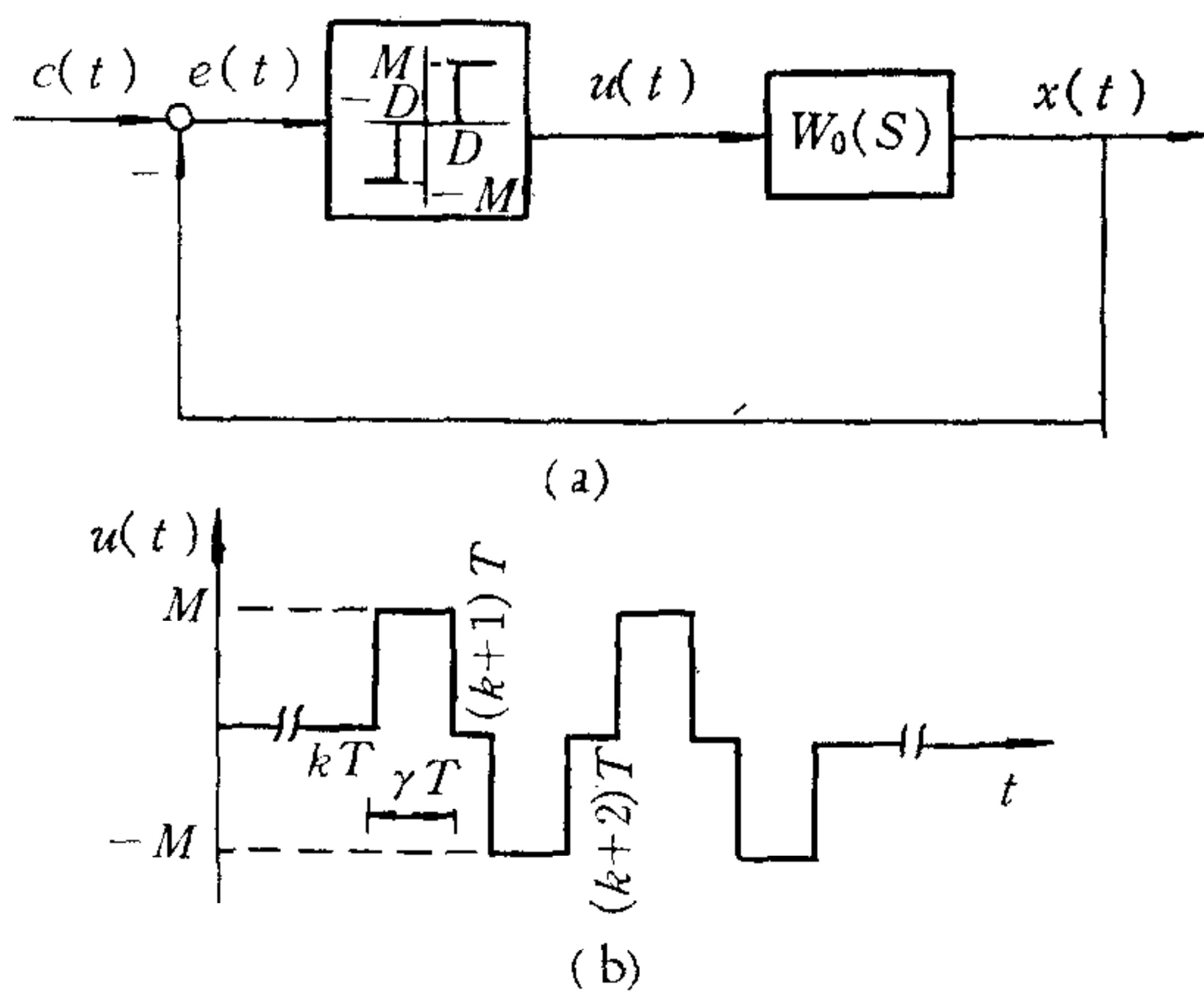


图 1

当回路的参数满足一定的条件时,系统将处于稳定的振荡状态,频率和振幅都保持不变. 于是,在 $c(t) = 0$ 时,继电元件的输出 $u(t)$ 将是正负交替的矩形脉冲,其波形如图 1(b) 所示. 振幅为 M , 周期为 $2T$.

设继电元件的输入为 $e(t)$, 则输出 $u(t)$ 可用如下的方程来描述:

$$u(t) = \begin{cases} Mf[e(t)], & kT \leq t \leq kT + rT, \\ 0, & kT \leq t \leq (k+1)T, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中 M 是继电元件输出的幅值; rT 是脉冲的持续时间,且

$$f[e(t)] = \begin{cases} -1, & \text{当 } e(t) \leq -D \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } -D < e(t) < D \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } e(t) \geq D \text{ 时.} \end{cases}$$

信号 $u(t)$ 可以看成是正负相间的脉冲序列通过零阶保持环节以后形成的波形. 因此,回路自振时,图 1(a) 所示的非线性继电系统可以等效成图 2 的离散系统.

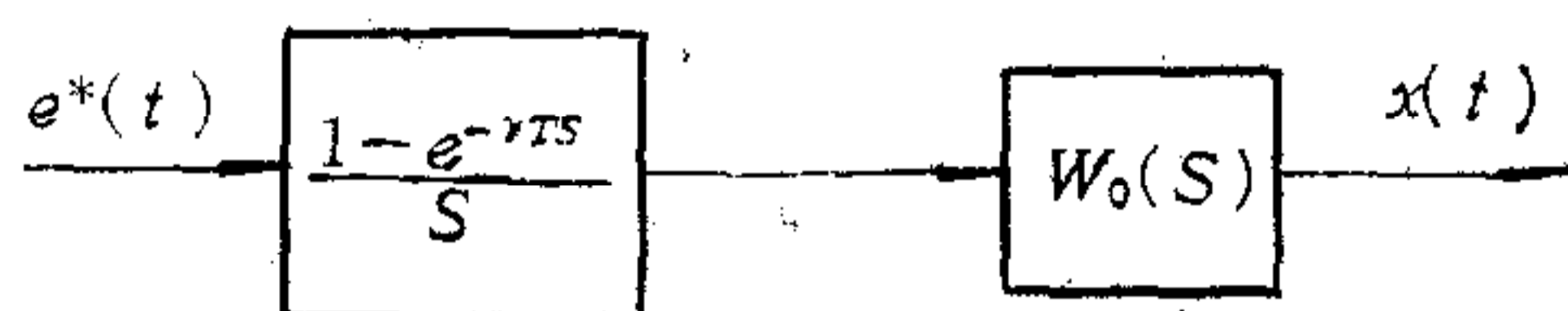


图 2

其中 rT 是零阶保持环节的保持时间. $x(t)$ 可以看成是线性环节 $\frac{(1 - e^{-rTS})}{S} W_0(S)$ 对输入脉冲序列 $e^*(t)$ 的稳态响应,且 $e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M(-1)^k \delta(t - kT)$. 其中 $\delta(t - kT)$ 为脉冲函数.

为了能求出系统不同时刻的输出值,引入一超前环节 $e^{\epsilon TS}$,并用广义 Z 变换的方法进行分析. 离散系统的传递函数可以写成

$$W(S) = \frac{(1 - e^{-rTS})e^{\epsilon TS}}{S} W_0(S).$$

如果假定 $W_0(S) = \frac{K_0(S + c)e^{-\tau S}}{S(S + a)(S + b)}$. 利用部分分式展开的方法,可将系统的传递函数表示成

$$W(S) = \left(\frac{A}{S + a} + \frac{B}{S + b} + \frac{C}{S} \right) \frac{K(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}e^{\epsilon TS}}{S}. \quad (2)$$

其中

$$K = K_0/ab; \quad A = b(c - a)/(a - b); \quad B = a(b - c)/(a - b).$$

若离散系统的脉冲传递函数为 $W(z) = Z[W(S)]$, 则系统输出的 Z 变换式为

$$X(z) = W(z)E(z).$$

设 $M = 1$, 输入为单位脉冲序列 $e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)(-1)^k$. 其 Z 变换式为

$$E(z) = Z[e^*(t)] = z/(1 + z).$$

因此,输出的 Z 变换式可写成 $X(z) = W(z)z/(1 + z)$. 对 $X(z)$ 求 Z 反变换,就能得到系统输出的时间响应,因而也就可求得自振的参数.

先研究在两种不同状态下的离散系统输出:

(1) 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统的传递函数为

$$W(S) = \left(\frac{A}{S+a} + \frac{B}{S+b} + \frac{C}{S} \right) \frac{K(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}}{S}. \quad (3)$$

根据线性系统的迭加原理, 可逐项求出离散系统脉冲传递函数各分式的 Z 变换式, 然后进行线性运算, 求得系统的输出表达式.

首先求首项 $W_1(S) = \frac{KA(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}}{S(S+a)}$ 的 Z 变换式:

$$Z[W_1(S)] = \frac{KA}{a} \frac{z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}} [e^{-a(T-rT-\tau)} - e^{-a(T-\tau)}].$$

如果令 $g_1 = \frac{KA}{a} e^{-a(T-\tau)}(e^{arT} - 1)$, 则有

$$Z[W_1(S)] = g_1 \frac{z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}.$$

同样, 第二项 $W_2(S) = \frac{KB(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}}{S(S+b)}$ 的 Z 变换式为

$$Z[W_2(S)] = g_2 \frac{z^{-1}}{1 - e^{-bT}z^{-1}}.$$

其中 $g_2 = \frac{KB}{b} e^{-b(T-\tau)}(e^{brT} - 1)$.

类似地, 第三项 $W_3(S) = \frac{KC(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}}{S^2}$ 的 Z 变换式为

$$Z[W_3(S)] = g_3 \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

其中 $g_3 = KC\tau T$.

为分析方便, 令

$$W'_3(S) = \frac{KC(1 - e^{-rTS})e^{-\tau S}}{S(S+d)}, \quad \text{其中 } d \rightarrow 0.$$

因为 $C/S = \lim_{d \rightarrow 0} C/(S+d)$, 所以有 $W_3(S) = \lim_{d \rightarrow 0} W'_3(S)$. 这样, $W'_3(S)$ 就具有与 $W_1(S)$ 和 $W_2(S)$ 相同的形式, 其 Z 变换式可表示成

$$Z[W'_3(S)] = g'_3 \frac{z^{-1}}{1 - e^{-dT}z^{-1}}.$$

其中 $g'_3 = \frac{KC}{d} e^{-d(T-\tau)}(e^{drT} - 1)$.

由此可以看出, $g_3 = \lim_{d \rightarrow 0} g'_3$ 以及 $Z[W_3(S)] = \lim_{d \rightarrow 0} Z[W'_3(S)]$.

将以上各 Z 变换式迭加, 可得到系统的脉冲传递函数. 于是, 在 $\varepsilon = 0$ 的条件下, 离散系统可用图 3 所示的方块图来表示.

由图 3 可写出如下的状态方程:

$$z\bar{X}(z) - z\bar{x}(0) = F\bar{X}(z) + G\bar{E}(z). \quad (4)$$

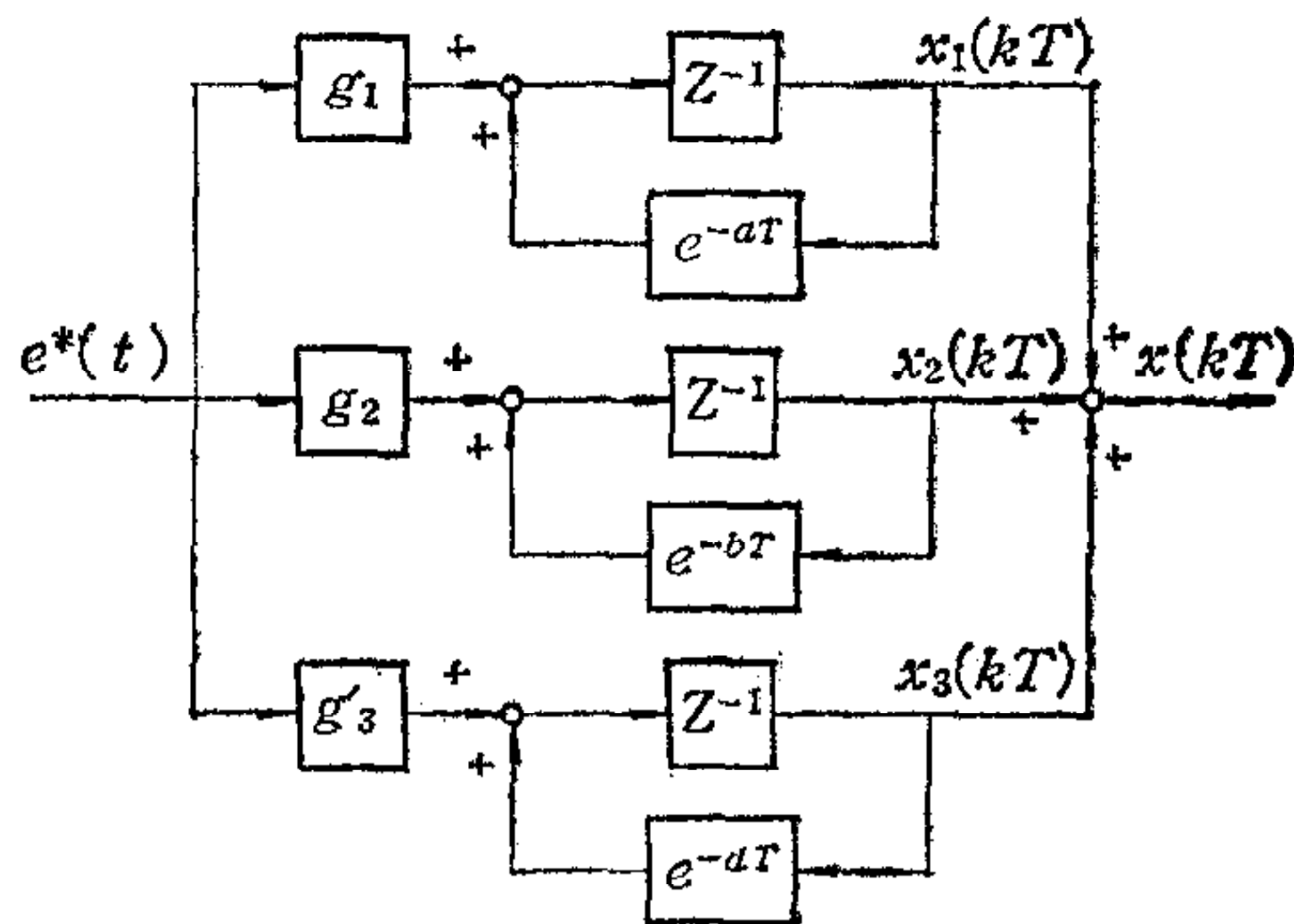


图 3

其中 $\bar{X}(z)$ 是下述状态矢量的 Z 变换式:

$$\bar{x}(kT) = [x_1(kT) \quad x_2(kT) \quad x_3(kT)]^T.$$

将方程(4)简化后两边用 $(zI - F)^{-1}$ 左乘, 则有

$$\bar{X}(z) = (zI - F)^{-1}G\bar{E}(z) + (zI - F)^{-1}z\bar{x}(0).$$

其中 I 是单位矩阵, 且各系数矩阵分别为:

$$F = \begin{bmatrix} e^{-aT} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-bT} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-dT} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KA}{a} e^{-a(T-\tau)}(e^{a\tau T} - 1) \\ \frac{KB}{b} e^{-b(T-\tau)}(e^{b\tau T} - 1) \\ \frac{KC}{d} e^{-d(T-\tau)}(e^{d\tau T} - 1) \end{bmatrix}.$$

由于 F 是对角矩阵, 因而有

$$(zI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - e^{-aT}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - e^{-bT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z - e^{-dT}} \end{bmatrix}.$$

设方程(4)具有初始条件 $\bar{x}(0) = [0 \quad 0 \quad -g_3/2]^T$, 将各系数矩阵和初始条件代入方程(4), 得到

$$\bar{X}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - e^{-aT}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - e^{-bT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z - e^{-dT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g_1 z}{1 + z} \\ \frac{g_2 z}{1 + z} \\ \frac{g'_3 z}{1 + z} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{z - e^{-aT}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - e^{-bT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z - e^{-aT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g_3 z}{2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对方程(5)的两边进行Z反变换,求得离散系统的解为

$$\bar{x}(kT) = Z^{-1}[\bar{X}(z)],$$

$$\bar{x}(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{1 + e^{-aT}} [e^{-akT} - (-1)^k] \\ \frac{g_2}{1 + e^{-bT}} [e^{-bkT} - (-1)^k] \\ \frac{g_3'}{1 + e^{-aT}} [e^{-akT} - (-1)^k] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3/2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由于 $d \rightarrow 0$, 因而有 $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{g_3'}{1 + e^{-aT}} [e^{-akT} - (-1)^k] = \frac{g_3}{2} [1 - (-1)^k]$. 于是方程(6)可以写成

$$\bar{x}(kT) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{1 + e^{-aT}} [e^{-akT} - (-1)^k] \\ \frac{g_2}{1 + e^{-bT}} [e^{-bkT} - (-1)^k] \\ -\frac{g_3}{2} (-1)^k \end{bmatrix}.$$

取一单位矢量 $\bar{R} = [1 \ 1 \ 1]^T$, 根据矢量运算的性质, 则有 $x(kT) = x^{-T}(kT) \cdot \bar{R}$. 因此, 在 $\varepsilon = 0$ 时, 图2所示的离散系统, 在单位脉冲序列作用下的时间响应可表示成

$$x(kT) = \frac{g_1}{1 + e^{-aT}} [e^{-akT} - (-1)^k] + \frac{g_2}{1 + e^{-bT}} [e^{-bkT} - (-1)^k] - \frac{g_3}{2} (-1)^k. \quad (7)$$

(2) 当 $\varepsilon = \tau$ 时离散系统的传递函数为

$$W(S\varepsilon) = \left(\frac{A}{S+a} + \frac{B}{S+b} + \frac{C}{S} \right) \frac{K(e^{\tau T S} - 1)e^{-\tau S}}{S}. \quad (8)$$

首先求第一项 $W_1(S\varepsilon) = \frac{KA[e^{(\tau T - \tau)S} - e^{-\tau S}]}{S(S+a)}$ 的Z变换式,

$$Z[W_1(S\varepsilon)] = \frac{KA}{a} \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} [1 - e^{-a(\tau T - \tau)}] - \frac{KA}{a} \frac{z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}} [e^{-aT} - e^{-a(T-\tau)}].$$

令

$$h_1 = \frac{KA}{a} [1 - e^{-a(\tau T - \tau)}], \quad p_1 = \frac{KA}{a} [e^{-aT} - e^{-a(T-\tau)}],$$

则有

$$Z[W_1(S\varepsilon)] = \frac{h_1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} - \frac{p_1z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

第二项 $W_2(S\varepsilon) = \frac{KB[e^{(\gamma T - \tau)s} - e^{-\tau s}]}{S(S + b)}$ 的 Z 变换式为

$$Z[W_2(S\varepsilon)] = \frac{h_2}{1 - e^{-bT}z^{-1}} - \frac{p_2z^{-1}}{1 - e^{-bT}z^{-1}}$$

其中 $h_2 = \frac{KB}{b} [1 - e^{-b(\gamma T - \tau)}]$; $p_2 = \frac{KB}{b} [e^{-bT} - e^{-b(T - \tau)}]$.

类似 $\varepsilon = 0$ 时的分析, 取 $W_3'(S\varepsilon) = \frac{KC[e^{(\gamma T - \tau)s} - e^{-\tau s}]}{S(S + d)}$, 其中 $d \rightarrow 0$. 其 Z 变换式为

$$Z[W_3'(S\varepsilon)] = \frac{h_3'}{1 - e^{-dT}z^{-1}} - \frac{p_3'z^{-1}}{1 - e^{-dT}z^{-1}}$$

其中 $h_3' = \frac{KC}{d} [1 - e^{-d(\gamma T - \tau)}]$; $p_3' = \frac{KC}{d} [e^{-dT} - e^{-d(T - \tau)}]$.

当 $d \rightarrow 0$ 时则有

$$Z[W_3(S\varepsilon)] = \lim_{d \rightarrow 0} Z[W_3'(S, \varepsilon)] = \frac{h_3}{1 - z^{-1}} + \frac{p_3z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

其中 $h_3 = KC(\gamma T - \tau)$; $p_3 = KC\tau$.

由此, 对 $\varepsilon = \gamma$ 的情况, 离散系统可用图 4 所示的方块图来描述.

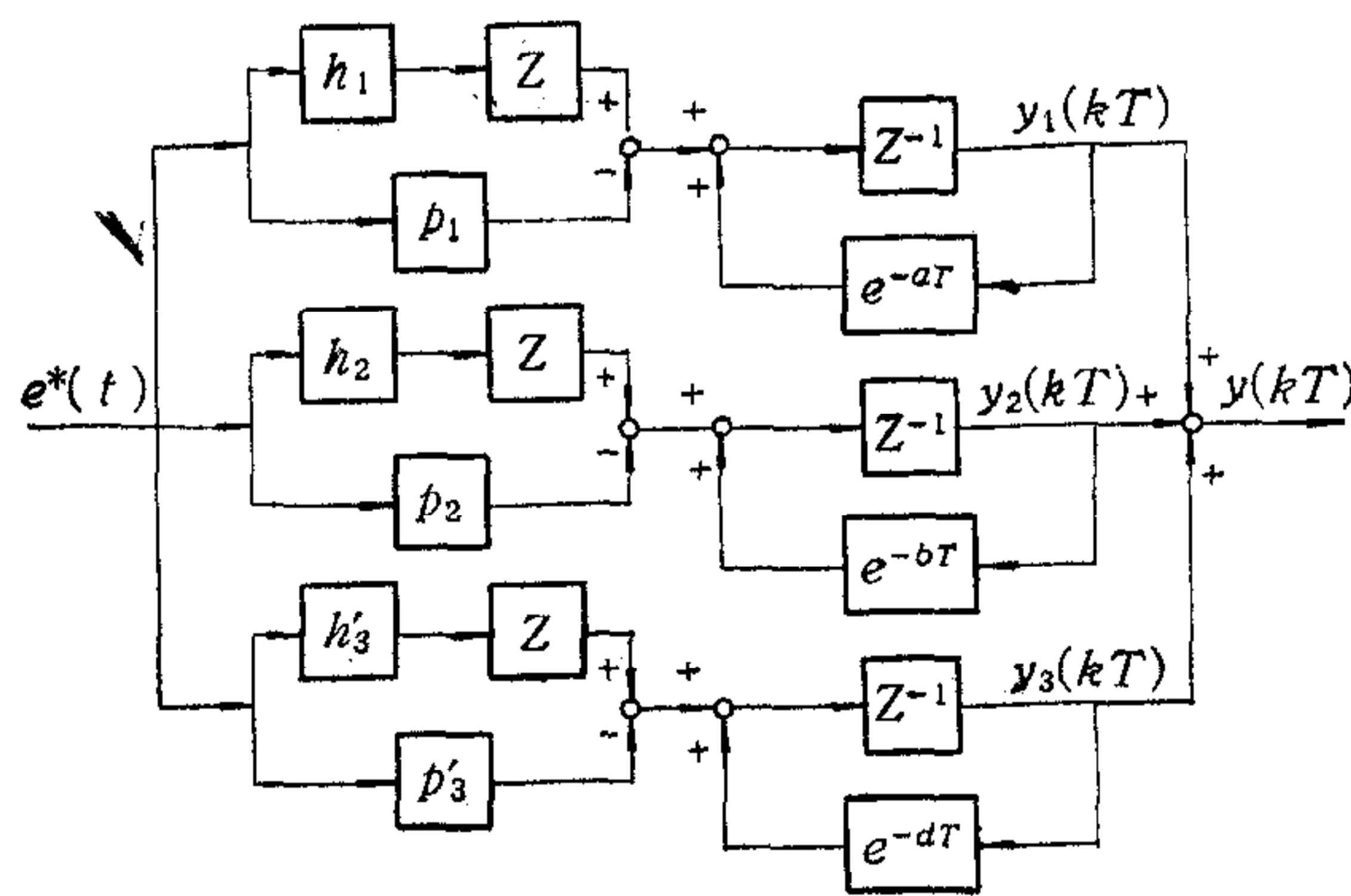


图 4

与 $\varepsilon = 0$ 相类似, 方块图可用如下的状态方程表示:

$$z\bar{Y}(z) - z\bar{y}(0) = F\bar{Y}(z) + H\bar{E}(z), \quad (9)$$

其中 $\bar{Y}(z) = \bar{X}(z\varepsilon)$ 是 $\varepsilon = \gamma$ 时系统输出的 Z 变换式, 且状态矢量

$$\bar{y}(kT) = [y_1(kT) \quad y_2(kT) \quad y_3(kT)]^T.$$

方程 (9) 中的矩阵 H 为

$$H = \begin{bmatrix} h_1 z - p_1 \\ h_2 z - p_2 \\ h'_3 z - p'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KA}{a} [1 - e^{-a(\gamma T - \tau)}] z - \frac{KA}{a} [e^{-aT} - e^{-a(T-\tau)}] \\ \frac{KB}{b} [1 - e^{-b(\gamma T - \tau)}] z - \frac{KB}{b} [e^{-bT} - e^{-b(T-\tau)}] \\ \frac{KC}{d} [1 - e^{-a(\gamma T - \tau)}] z - \frac{KC}{d} [e^{-aT} - e^{-a(T-\tau)}] \end{bmatrix}.$$

设方程(9)的初始条件为 $\bar{y}(0) = [0 \ 0 \ -g_3/2]^T$, 将矩阵 F, H 以及初始条件 $\bar{y}(0)$ 代入方程(9), 移项合并后用 $(zI - F)^{-1}$ 左乘方程式的两边, 从而得到

$$\bar{Y}(z) = (zI - F)^{-1} H \bar{E}(z) + (zI - F)^{-1} z \bar{y}(0).$$

$$\bar{Y}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - e^{-aT}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - e^{-bT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z - e^{-aT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(h_1 z - p_1) z}{1 + z} \\ \frac{(h_2 z - p_2) z}{1 + z} \\ \frac{(h'_3 z - p'_3) z}{1 + z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{z - e^{-aT}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - e^{-bT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z - e^{-aT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g_3 z}{2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由于 $d \rightarrow 0$ 时 $h'_3 = h_3 = KC(\gamma T - \tau)$, $p'_3 = -p_3 = -KC\tau$. 且 $g_3 = KC\gamma T$, 因而有 $g_3 = h_3 + p_3$.

将关系式 $g_3 = h_3 + p_3$ 代入方程(10), 同时令 $d \rightarrow 0$, 然后对方程两边进行 Z 反变换, 得到离散系统的解为

$$\bar{y}(kT) = \begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ y_3(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + e^{-aT}} [h_1 e^{-a(k+1)T} - h_1 (-1)^{k+1} - p_1 e^{-akT} + p_1 (-1)^k] \\ \frac{1}{1 + e^{-bT}} [h_2 e^{-b(k+1)T} - h_2 (-1)^{k+1} - p_2 e^{-bkT} + p_2 (-1)^k] \\ \frac{h_3}{2} (-1)^k - \frac{p_3}{2} (-1)^k \end{bmatrix}. \quad (11)$$

根据矢量运算的性质, 有 $y(kT) = \bar{y}^T(kT) \cdot \bar{R}$. 因此, 在 $\varepsilon = \gamma$ 的条件下, 系统输出的时间响应为

$$y(kT) = \frac{1}{1 + e^{-aT}} [h_1 e^{-a(k+1)T} - h_1 (-1)^{k+1} - p_1 e^{-akT} + p_1 (-1)^k] + \frac{1}{1 + e^{-bT}} [h_2 e^{-b(k+1)T} - h_2 (-1)^{k+1} - p_2 e^{-bkT} + p_2 (-1)^k]$$

$$+ \frac{1}{2} h_3(-1)^k - \frac{1}{2} p_3(-1)^k. \quad (12)$$

二、回路自振的条件

对图 1 所示的非线性控制系统,当回路存在自持振荡时,继电元件的输入和输出之间的关系如图 5 所示.

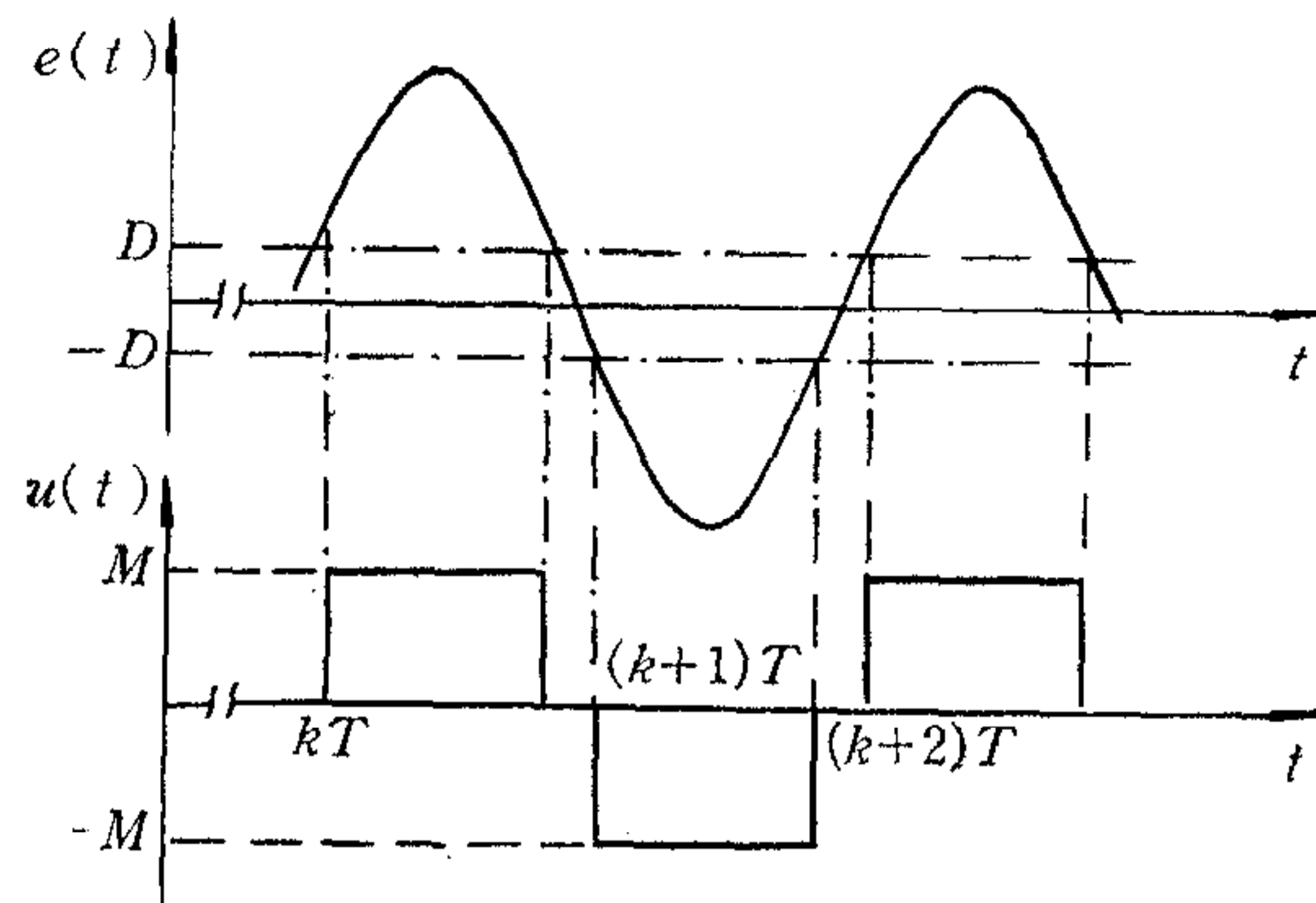


图 5

由于回路自振时系统应当符合条件 $e(t) = -x(t)$,因此继电元件的输入信号必须满足以下的方程组:

$$\begin{cases} x(2kT) = -D, \\ x[(2k+1)T] = D, \\ x[(2k+\gamma)T] = x(2kT), \\ x[(2k+1+\gamma)T] = x[(2k+1)T]. \end{cases} \quad (13)$$

对于图 5 所示的自振状态,系统还应满足条件

$$\begin{cases} x(t) < -D, & 2kT < t < (2k+\gamma)T, \\ x(t) > D, & (2k+1)T < t < (2k+1+\gamma)T, \end{cases} \quad (14)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{x}(t) > 0, & (2k+\gamma)T < t < (2k+1)T, \\ \dot{x}(t) < 0, & (2k+1+\gamma)T < t < (2k+2)T. \end{cases} \quad (15)$$

根据广义 Z 变换的性质,函数 $Z^{-1}[X(z\varepsilon)]$ 在 kT 时刻的值应与函数 $Z^{-1}[X(z)]$ 在 $(kT + \varepsilon T)$ 时刻的值相等.因此,当 $\varepsilon = \gamma$ 时,系统输出的 Z 反变换式 $Z^{-1}[X(z\varepsilon)]$ 与离散系统在 $(kT + \gamma T)$ 时的输出相等,即

$$x(kT + \gamma T) = Z^{-1}[X(z\varepsilon)] = Z^{-1}[y(z)].$$

如果系统的线性部分具有低通滤波特性,继电元件输出信号中的高次谐波分量被线性部分所衰减,则系统的输出接近于正弦波形.这样,继电元件的输入信号就能满足不等式(14)和(15)的要求.于是系统自振的条件可以表示成

$$\begin{cases} \bar{x}^T(2kT) \cdot \bar{R} = -D, \\ \bar{x}^T(2kT + T) \cdot \bar{R} = D, \\ \bar{y}^T(2kT) \cdot \bar{R} = \bar{x}^T(2kT) \cdot \bar{R}, \\ \bar{y}^T(2kT + T) \cdot \bar{R} = \bar{x}^T(2kT + T) \cdot \bar{R}. \end{cases} \quad (16)$$

系统的自持振荡是回路的稳态响应。在分析自振的参数时,可以不考虑暂态分量。将方程(7)和(12)代入方程组(16),可以得到自振的条件方程。从条件方程可以看出, e^{-akT} 和 e^{-bkT} 都是随时间的增长而衰减的分量。当 k 足够大时, e^{-akT} 和 e^{-bkT} 都趋近于零。于是,系统自振应满足的条件为

$$\begin{cases} \frac{g_1}{1 + e^{-aT}} + \frac{g_2}{1 + e^{-bT}} + \frac{g_3}{2} = D, \\ \frac{1}{1 + e^{-aT}} (h_1 + p_1) + \frac{1}{1 + e^{-bT}} (h_2 + p_2) + \frac{1}{2} (h_3 - p_3) = D. \end{cases} \quad (17)$$

解方程组(17)就能求得系统自振的参数,且自振的频率为 $f = 1/2T$, 脉冲的持续时间为 γT 。

三、应用举例

用它激直流电机作为伺服机构的继电控制系统,其结构如图 1(a) 所示。参数为 $M = 1, D = 1, a = 125 \text{ 1/sec}, b = 5 \text{ 1/sec}, c = 16 \text{ 1/sec}, K_0 = 58593, \tau = 0.004\text{sec}$ 。系统在初始扰动作用下,继电元件的稳态输出如图 6 所示。

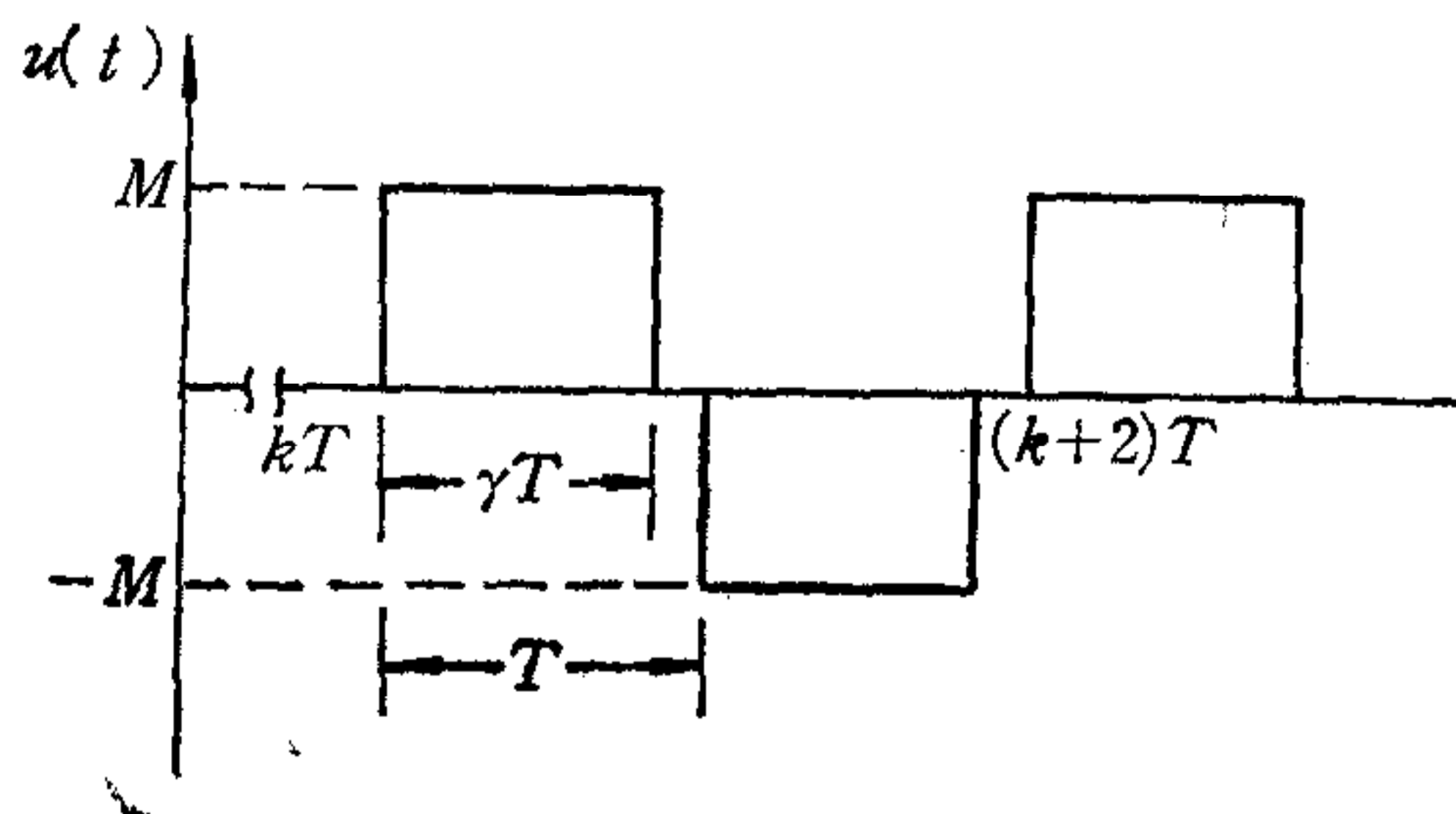


图 6

继电元件的输出经电机平滑和控制对象滤波后,形成接近于正弦的波形,然后反馈到继电元件的输入端,因而系统存在着稳定的自持振荡。继电元件输出波形的参数为:自振频率 $f = 25\text{Hz}$, 周期 $2T = 0.04\text{sec}$, 脉冲持续时间 $\gamma T = 0.017\text{sec}$ 。

将系统的参数 M, D 等代入方程(17),解方程得到自振参数为 $T = 0.022\text{sec}, \gamma = 0.9$ 。由此求得自振频率 $f = 22.7\text{Hz}$ 脉冲持续时间 $\gamma T = 0.02\text{sec}$ 。可见,由方程解出的参数与系统实际的工作状态是接近的。

从本文的分析可以看出,采用等效的离散系统的分析方法,通过 Z 变换运算,可以直接在时间域内求得继电控制系统的自振参数。与谐波平衡法相比,它能够得到自振参数的解析式,而不需进行图解。

参 考 文 献

- [1] MIN, B. J., SLIVINSKY, C., and HOFT, R. G., Absolute Stability Analysis of PWM System, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22 (1977), 3.
- [2] 绪方胜彦, 现代控制工程, 科学出版社, 1976 年.
- [3] 余祖铸, 沈福钧, 非线性系统滑动状态的分析, 全国控制理论及其应用学术交流会论文集, 1981 年.

ANALYSIS OF OSCILLATIONS IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS WITH RELAY CHARACTERISTICS

YU ZUZHU

(Shanghai Precision Instrument Research Institute)

ABSTRACT

A method for analysing the oscillations in nonlinear control systems with relay characteristics by means of Z-transform is presented in this paper. Using this method, quantitative solutions for the parameters can be obtained directly in the time domain.