第12卷 第3期 自动化学报 Vol. 12, No. 3
1986年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1986

单输入单输出线性定常离散系统的最速跟踪控制

姚子文
(武汉水电学院)

摘　　要

本文提出了线性定常离散系统的最速跟踪控制问题，证明了单输入单输出线性定常离散系统的最速跟踪控制定理，最后，简要地介绍了最速跟踪控制律的形成.

一、引　　言

跟踪控制问题早为人们所注意，文献[1]解决了目标为 Markov 过程的跟踪控制问题；文献[2]提出了一些随机微分对策问题. 跟踪控制问题与随机微分对策问题有相似之处，两者都是研究如何选择适当的控制律使系统状态接近目标的状态. 但两者也有根本的区别，前者所考虑的是要使系统的状态直接与已知随机运动的目标接近，而不将目标作为一个系统来考虑；后者则是把目标作为系统来考虑，并要求知道目标的系统结构、参数以及输入的噪声统计特性和测量噪声的统计特性.

本文所要解决的问题是目标统计特性不明的跟踪控制问题，而且是针对线性定常离散系统来讨论的.

二、问题的基本提法

这里所考虑的跟踪控制问题是指选择一个有限的控制序列$\{u(k)\}$，即$|u(k)|<+\infty$，使给定的n阶系统的输出$\{Y(k)\}$与运动目标$\{Z(k)\}$间的距离$\|Y(k)-Z(k)\|$不大于并保持不大于某一预定常数σ^2，即$\|Y(k)-Z(k)\|\leqslant\sigma^2$，$k\geqslant 2n$. 其中$\{Z(k)\}$的分量可以全部是随机序列，也可以部分分量为随机序列而另一部分为确定性序列. 对于前者，距离$\|Y(k)-Z(k)\|$是指序列$\{Y(k)-Z(k)\}$第k时刻的二阶原点矩，显然，对于后者也适用. 本文不讨论$\{Z(k)\}$的所有分量都是确定性序列的问题，因为这是已被解决的问题. 另外，要求$\{Z(k)\}$的随机分量都是二阶矩过程，但其统计特性不明.

这种跟踪控制的最速性是指：控制序列$\{u(k)\}$使$\|Y(k)-Z(k)\|$在最短时间内(或以最少步数)小于或等于并保持小于或等于给定常数σ^2. 因为目标中随机序列分量的

本文于1984年6月16日收到.

统计特性不明，所以把 σ^2 总定为 $\max\limits_{k\geqslant n}\|Z(k+n)-Z(k)\|$.

三、最速跟踪控制原理

下面所要解决的只是单输入单输出的线性定常离散系统的最速跟踪控制问题，而且只要求系统的输出序列 $\{Y(k)\}$ 与目标序列 $\{Z(k)\}$ 在范围

$$\max_{k\geqslant n}\|\Delta_n Z(k)\| = \max_{k\geqslant n}\|Z(k+n)-Z(k)\|$$

内的跟踪控制.

定理.

对于一个给定的可控、可观测的单输入单输出线性定常离散系统 $\Sigma(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{C})$,

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{\Gamma}\cdot u(k),\quad \boldsymbol{X}(k)\in R^n,\quad u(k)\in R,$$
$$Y(k)=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}(k),\qquad\qquad Y(k)\in R,$$

若代数方程

$$\boldsymbol{C}\cdot\begin{bmatrix}\gamma\\ \hline \gamma\cdot\boldsymbol{\phi}\\ \hline \gamma\cdot\boldsymbol{\phi}^2\\ \vdots\\ \gamma\cdot\boldsymbol{\phi}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \hline s\\ \hline s^2\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}=0,$$

关于 s 的根都在单位圆内，则存在线性反馈控制规律，使系统实现对一维随机运动目标 $\{Z(k)\}$ 在范围 $\max\limits_{k\geqslant n}\|Z(k+n)-Z(k)\|$ 内的最速跟踪控制. 其中,

$$\gamma=e_n^T\cdot[\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\cdots\vdots\,\boldsymbol{\phi}^{n-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]^{-1},$$
$$e_n^T=[0,0,\cdots,\cdots,0,1]_{1\times n}.$$

证明. *a.* 存在性.

由于系统是可观测的，因此可以进行全状态反馈控制，而且，系统是可控的，所以,

$$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{\Pi})=\mathrm{Rank}\,[\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\,\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\cdots,\cdots,\vdots\,\boldsymbol{\phi}^{n-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]=n.$$

令

$$\gamma=e_n^T\cdot[\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\,\vdots\cdots,\cdots,\vdots\,\boldsymbol{\phi}^{n-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]^{-1},$$
$$e_n^T=[0,0,\cdots,\cdots,0,1]_{1\times n},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_u=\begin{bmatrix}\gamma\\ \hline \gamma\boldsymbol{\phi}\\ \hline \vdots\\ \hline \gamma\boldsymbol{\phi}^{n-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{\Pi}_u^{-1}\cdot\boldsymbol{w}_u(k),$$

则系统 $\Sigma(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{C})$ 经过满秩线性变换 $\boldsymbol{\Pi}_u$ 而成为可控标准形 $\Sigma_c(\boldsymbol{\phi}_u,\boldsymbol{\Gamma}_u,\boldsymbol{C}_u)$, 其中,

$$\boldsymbol{\phi}_u=\boldsymbol{\Pi}_u\cdot\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\Pi}_u^{-1},\ \boldsymbol{\Gamma}_u=\boldsymbol{\Pi}_u\cdot\boldsymbol{\Gamma},\ \boldsymbol{C}_u=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Pi}_u^{-1}.$$

显然，$\boldsymbol{\phi}_u$、$\boldsymbol{\Gamma}_u$ 和 $\boldsymbol{C}_u$ 具有如下的形式：

$$\boldsymbol{\Gamma}_u = [0, 0, \cdots, \cdots, 0, 1]^T_{1\times n},$$

$$\boldsymbol{C}_u = [c_1, c_2, \cdots, \cdots, c_{n-1}, c_n],$$

$$\boldsymbol{\phi}_u = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, \cdots, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0, & \cdots, & \cdots\cdots, & 0, & 1 \\ a_n, & a_{n-1}, & \cdots, & a_2, & a_1 \end{bmatrix}.$$

令，

$$\begin{aligned} u(k) &= -[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1] \cdot \boldsymbol{w}_u(k) + M(k) \\ &= -\boldsymbol{F}_u \cdot \boldsymbol{w}_u(k) + M(k). \end{aligned}$$

其中，$M(k)$ 是与目标状态有关的希望输入控制量，这样，

$$\boldsymbol{w}_u(N) = (\boldsymbol{\phi}_u - \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot \boldsymbol{F}_u)^N \cdot \boldsymbol{w}_u(0) + \sum_{i=0}^{N-1} (\boldsymbol{\phi}_u - \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot \boldsymbol{F}_u)^{N-1-i} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot M(i),$$

因为，

$$\boldsymbol{\phi}_u - \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot \boldsymbol{F}_u = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & \cdots, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0, & 0, & \cdots, & \cdots, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \cdots, & \cdots, & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

所以，

$$(\boldsymbol{\phi}_u - \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot \boldsymbol{F}_u)^N \equiv 0, \quad 当 N \geqslant n 时.$$

从而，当 $N \geqslant n$ 时，下式成立：

$$\boldsymbol{w}_u(N) = \sum_{i=N-n}^{N-1} (\boldsymbol{\phi}_u - \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot \boldsymbol{F}_u)^{N-1-i} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_u \cdot M(i). \tag{1}$$

由于这是一个单输入单输出系统，因此，当 $N \geqslant n$ 时，$\boldsymbol{w}_u(N)$ 第 n 个分量 $w_u^n(N)$ 便与 $M(N-1)$ 相等，即，$w_u^n(N) = M(N-1)$。又因，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_u^i(N) &= w_u^{i+1}(N-1), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ &= w_u^n(N-n+i), \end{aligned}$$

所以，$\{Y(k)\}$ 就是关于 $\{w_u^n(k)\}$ 的滑动平均值过程[3]，

$$\begin{aligned} Y(k) &= [c_1, c_2, \cdots, c_n] \cdot \boldsymbol{w}_u(k) \\ &= c_1 \cdot w_u^n(k-n+1) + \cdots + c_n \cdot w_u^n(k), \quad k \geqslant n. \end{aligned} \tag{2}$$

因为，$\boldsymbol{C}_u \neq 0$，故存在 $c_i = 0$，$n \geqslant i \geqslant 1$，$i = \max\limits_{c_j \neq 0} \{j\}$，令，

$$Y_c(k) = \frac{1}{c_j} \cdot Y(k),$$

则

$$Y_c(k)=w_u^n(k-n+i)+d_{i-1}\cdot w_u^n(k-n+i-1)+\cdots \\ +d_1\cdot w_u^n(k-n+1),\quad k\geqslant n. \tag{3}$$

其中

$$d_j=c_j/c_i,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

由于方程

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\Pi}_u^{-1}\cdot[1,s,s^2,\cdots,s^{n-1}]^T=0 \tag{4}$$

关于 s 的根都在单位圆内，所以滑动平均值过程 $\{Y(k)\}$ 可逆，即存在线性函数 f_c[3]，使

$$\begin{aligned} w_u^n(k)&=f_c[Y_c(k+n-i),Y_c(k+n-i-1),\cdots] \\ &=f[Y(k+n-i),Y(k+n-i-1),\cdots] \\ &=f[\{Y(k+n-i)\}]. \end{aligned}$$

而且，

$$Y(k)=f^{-1}[\{w_u^n(k-n+i)\}]=\sum_{j=1}^{n}c_jw_u^n(k-n+j),\ j>i;\ c_j=0;$$

使希望控制量 $M(k)=f[\{Z(k)\}]$，则

$$\begin{aligned} Y(k)&=\sum_{j=0}^{i-1}c_{i-j}w_u^n(k-n+i-j) \\ &=\sum_{j=0}^{i-1}c_{i-j}M(k-n+i-j-1) \\ &=f^{-1}[\{M(k-n+i-1)\}] \\ &=f^{-1}[f(\{Z(k-n+i-1)\})] \\ &=Z(k-n+i-1),\quad n\geqslant i\geqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

可见，系统实现了在范围 $\|Z(k)-Z(k-n+i-1)\|$ 内的跟踪控制，即

$$\begin{aligned} \|Y(k)-Z(k)\|&=\|Z(k-n+i-1)-Z(k)\| \\ &\leqslant\max_{k>2n}\|Z(k-n)-Z(k)\|. \end{aligned}$$

必须说明的是，式(5)并不是在随机的意义下成立，而是在确定的意义下成立．因为在 k 时刻，对于控制器，目标在 k 时刻及 k 时刻以前的状态已经发生，所以都是完全确定的，因此，$M(k)=f(\{Z(k)\})$ 是确定的，从而式(5)也是确定的．

b. 最速性．

由式(1)知，经过 n 步，系统状态与其初态无关，而只与希望输入控制量 $\{M(k)\}$ 有关，从而实现了在范围 $\max\limits_{k\geqslant n}\|Z(k+n)-Z(k)\|$ 内的跟踪控制．

设某一控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(n_1-1)\}$ 在 $n_1<n$ 内使系统状态实现了跟踪控制，即，

$$\boldsymbol{X}(n_1)=\boldsymbol{\Phi}^{n_1}\boldsymbol{X}(0)+\sum_{i=0}^{n_1-1}\boldsymbol{\Phi}^{n_1-1-i}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot u(i),$$

或

$$\boldsymbol{X}(n_1)-\boldsymbol{\Phi}^{n_1}\cdot\boldsymbol{X}(0)=[\boldsymbol{\Gamma}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{\Phi}^{n_1-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]\cdot[u(0),\cdots,u(n_1-1)]^T,$$

显然，

$$\mathrm{Rank}\,[\boldsymbol{\Gamma}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{\phi}^{n_1-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]\leqslant n_1<n.$$

这样，使得 $\boldsymbol{X}(n_1)-\boldsymbol{\phi}^{n_1}\boldsymbol{X}(0)$ 只充满 n_1 维子空间，而不能存在于 n 维空间的任意处，从而与 $\boldsymbol{X}(n_1)$ 和 $\boldsymbol{X}(0)$ 的任意性相矛盾. 可见，$[u(0),\cdots,u(n_1-1)]$ 在 $n_1<n$ 时不能实现跟踪控制.

这就证明了 n 是系统实现跟踪控制的最小步数，即所构造的控制律是最速的.

四、最速跟踪控制律的构成

最速跟踪控制律由两部分组成，其一是线性反馈控制量；其二是与目标运动状态有关的希望输入控制量.

1. 线性反馈控制量的形成

因为

$$\begin{aligned}u_f(k)&=-\boldsymbol{F}_u\cdot\boldsymbol{w}_u(k)=-[a_n,\cdots,a_1]\cdot\boldsymbol{w}_u(k)\\&=-\boldsymbol{F}_u\cdot\boldsymbol{\Pi}_u\cdot\boldsymbol{X}(k)=-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}(k),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_u\cdot\boldsymbol{\Pi}_u.$$

其中

$$\boldsymbol{\Pi}_u=\begin{bmatrix}\gamma\\\hdashline\gamma\boldsymbol{\phi}\\\hdashline\vdots\\\hdashline\gamma\boldsymbol{\phi}^{n-1}\end{bmatrix},\quad\gamma=e_n^T\cdot[\boldsymbol{\Gamma}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{\phi}^{n-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}]^{-1},$$

$$e_n^T=[0,0,\cdots,\cdots,0,1]_{1\times n}.$$

2. 希望输入控制量的构成

由式(3)，由于 $\{Y_c(k)\}$ 与 $\{w_u^n(k)\}$ 可逆，因此存在有限的 g_l 和 $\beta_p(k)$，使

$$\begin{aligned}w_u^n(k)&=\sum_{l=0}^{\infty}g_l\cdot Y_c(k+n-i-l)+\sum_{p=1}^{q}\beta_p(k)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{g_l}{c_i}Y(k+n-i-l)+\sum_{p=1}^{q}\beta_p(k).\end{aligned}\tag{6}$$

其中，q 是方程(4)关于 s 的相异根的个数.

为求取 g_l 和 $\beta_p(k)$[4,5]，下面对式(3)两边取 $\mathscr{Z}$ 变换：

$$\begin{aligned}Y_c(Z)&=w_u^n(Z)\cdot[Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1\cdot Z^{-(n-1)}]\\&\quad+\sum_{k=1}^{i}d_k\cdot\sum_{j=1}^{n-k}w_u^n(-j)\cdot Z^{-(n-k-j+1)}\\&=w_u^n(Z)\cdot[Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1\cdot Z^{-(n-1)}]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l=2}^{i+1}\left[\sum_{k=1}^{l-1} w_u^n(-l+k)\cdot d_k\right]\cdot Z^{-(n-l+1)} \\
&+\sum_{l=i+2}^{n}\left[\sum_{k=1}^{i} w_u^n(-l+k)\cdot d_k\right]\cdot Z^{-(n-l+1)},\quad d_i=1 \\
=&\,[Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1\cdot Z^{-(n-1)}]\cdot w_u^n(Z) \\
&+[\alpha_1\cdot Z^{-(n-1)}+\alpha_2\cdot Z^{-(n-2)}+\cdots+\alpha_{n-1}\cdot Z^{-1}].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中

$$
\alpha_j=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{j} w_u^n(-j+k-1)\cdot d_k, & 1\leqslant j\leqslant i,\\ \sum\limits_{k=1}^{i} w_u^n(-j+k-1)\cdot d_k, & i+1\leqslant j\leqslant n-1.\end{cases}
$$

由式(7)可求出式(6)中的 g_l 和 $\beta_p(k)$,

$$
w_u^n(Z)=\frac{Y_c(Z)}{Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1\cdot Z^{-(n-1)}}-\frac{\alpha_1\cdot Z^{-(n-1)}+\cdots+\alpha_{n-1}\cdot Z^{-1}}{Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1\cdot Z^{-(n-1)}}.
$$

假设特征方程

$$
Z^{-(n-i)}+\cdots+d_1Z^{-(n-1)}=0
$$

有 q 个关于 Z 的相异根，分别为 $s_1,s_2,\cdots,s_q$，其中，$1\leqslant q\leqslant n-1$；每个根是 m_j 重，$1\leqslant j\leqslant q$，$\sum_{j=1}^{q} m_j=i-1\leqslant n-1$，则

$$
\begin{aligned}
w_u^n(Z)=&\,Y_c\cdot Z^{(n-i)}\cdot\left[\frac{h_{11}}{1-s_1\cdot Z^{-1}}+\frac{h_{12}}{(1-s_1\cdot Z^{-1})^2}+\cdots\right.\\
&+\frac{h_{1m_1}}{(1-s_1Z^{-1})^{m_1}}+\frac{h_{21}}{(1-s_2\cdot Z^{-1})}+\frac{h_{22}}{(1-s_2\cdot Z^{-1})^2}+\cdots\\
&+\frac{h_{2m_2}}{(1-s_2\cdot Z^{-1})^{m_2}}+\cdots+\frac{h_{q1}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})}\\
&\left.+\frac{h_{q2}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})^2}+\cdots+\frac{h_{qm_q}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})^{m_q}}\right]\\
&+\theta_{n-i-1}\cdot Z^{n-i-1}+\theta_{n-i-2}\cdot Z^{n-i-2}+\cdots+\theta_1 Z+\theta_0\\
&+\frac{b_{11}}{(1-s_1\cdot Z^{-1})}+\frac{b_{12}}{(1-s_1\cdot Z^{-1})^2}+\cdots\\
&+\frac{b_{1m_1}}{(1-s_1\cdot Z^{-1})^{m_1}}+\cdots+\frac{b_{q1}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})}\\
&+\frac{b_{q2}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})^2}+\cdots+\frac{b_{qm_q}}{(1-s_q\cdot Z^{-1})^{m_q}}.
\end{aligned}
$$

令

$$
H_{pj}(k)=\mathscr{Z}^{-1}\left[h_{pj}\cdot\frac{1}{(1-s_p\cdot Z^{-1})^j}\right],
$$

$$
B_{pj}(K)=\mathscr{Z}^{-1}\left[b_{pj}\cdot\frac{1}{(1-s_p\cdot Z^{-1})^j}\right],
$$

则

$$w_u^n(k)=\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}Y_c(k+n-i)*H_{pi}(k)$$
$$+\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}B_{pi}(k)+D(k),\quad \text{“}*\text{”为卷积.}$$

其中

$$Y_c(k)*H_{pi}(k)=Y_c(k)*\{h_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k\}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}Y_c(k-l)\cdot h_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}h_{pi}\cdot Y_c(k-l)\cdot c_k^i\cdot s_p^k,\quad c_k^i \text{ 为组合符号.}$$
$$B_{pi}(k)=b_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k,$$
$$D(k)=\begin{cases}\theta_k, & k=0,-1,\cdots,-(n-i-1),\\ 0, & k\neq 0,-1,-2,\cdots,-(n-i-1).\end{cases}$$

所以，

$$w_u^n(k)=\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}Y_c(k+n-i)*H_{pi}(k)$$
$$+\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}B_{pi}(k)+D(k)$$
$$=\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}\sum_{l=0}^{\infty}h_{pi}\cdot Y_c(k+n+i-l)\cdot c_l^i\cdot s_p^l$$
$$+\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}b_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k+D(k)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}h_{pi}\cdot c_l^i\cdot s_p^l\right)\cdot Y_c(k+n-i-l)$$
$$+\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}b_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k+D(k).\tag{8}$$

从而得出

$$g_l=\sum_{p=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_p}h_{pi}\cdot c_l^i\cdot s_p^l,\tag{9}$$
$$\beta_p(k)=\sum_{i=1}^{m_p}b_{pi}\cdot c_k^i\cdot s_p^k+D(k)/q.$$

令 $Y(k)=Z(k-n+i-1)$ 和 $M(k)=w_u^n(k+1)$，与式 (5) 同理，这两式均在确定的意义下成立．由式(8)和(9)得到希望输入量

$$M(k)=w_u^n(k+1)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{g_l}{c_i}\cdot Y(k+n-i-l+1)+\sum_{p=1}^{q}\beta_p(k+1)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_l}{c_i} \cdot Z(k-l) + \sum_{p=1}^{q} \beta_p(k+1).$$

这样,整个控制量就可以写成

$$u(k) = u_f(k) + M(k) = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{X}(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \cdot \frac{g_l}{c_i} \cdot Z(k-l) + \sum_{p=1}^{q} \beta_p(k+1).$$

参 考 文 献

[1] 庞特里雅金著,陈祖浩等译,最佳过程的数学理论,上海科技出版社,1961 年,297—319.
[2] Tsokos, C. P. Nichols, W. G., 张石生译,关于某些微分对策,计算机应用与应用数学,1977, 5—6 期.
[3] 安鸿国等,时间序列分析与应用,科学出版社,1983 年,43—44.
[4] 福田武雄,穆鸿基译,差分方程,上海科技出版社,1962 年,13—23.
[5] 关肇直,王恩平,$\mathscr{Z}$ 变换与拉普拉斯变换,1983 年,32—43.

TIME-OPTIMAL TRACKING CONTROL OF SINGLE INPUT-OUTPUT LINEAR DISCRETE SYSTEMS

YAO ZIWEN
(Wuhan Institute of Hydraulic and Electric Engineering)

ABSTRACT

The problem of time-optimal tracking control of single input-output linear discrete systems is presented in this paper. And a theorem is proved for it. An approach for constructing the rule of time-optimal tracking control is introduced.