第12卷 第3期 自动化学报 Vol. 12, No. 3
1986年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1986

模糊相容图

刘汉龙
(长沙交通学院)

摘要

本文提出了模糊开关函数极小化的新方法，建立了一种模糊相容图，用它求函数的极小覆盖，既不用模糊本原蕴含总集，也不要分解短语，可有效地用于多变量函数的模糊逻辑开关系统或连续逻辑开关系统的设计.

模糊开关函数建立以后，需要极小化. 极小化的方法有图解法[1,2]和覆盖表法[1].图解法不能解决多于五元的问题，覆盖表法需要求所有模糊本原蕴含(FPI: fuzzy prime implicant)，并把短语分解为基本短语，极为繁琐. 本文在文[4]的基础上建立了一种模糊相容图，用模糊相容运算 ψ(fuzzy consensus)[1] 可简便地解决极小化问题.

本文未曾说明的记号、定义均见文献[1,3,4].

一、几个定义与定理

定义 1. n 元模糊开关函数的短语覆盖，是指短语集合 $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$，其中所有短语的析取范式是函数的一个表达式.

定义 2. 当 n 元模糊开关函数的短语覆盖 C 对应一个 p 阶标定图 $G(V,X)$，C 中每一短语对应于图中的点，两短语之间的模糊相容结果对应于图中的线时，则称图 G 为与 C 对应的模糊相容图. 它一般是一个多重图，其线是一组多重线. 线亦对应于短语集合，中间的每一短语都是模糊相容结果.

定义 3. 对于 p 阶模糊相容图 $G(V, X)$，若线对应的短语集合中某短语等于点 $v_k(v_k\in V)$之相应短语，则称序号 k 为图 G 的图内权值.

定义 4. 对于 p 阶模糊相容图 $G(V, X)$，若线对应的短语集合中某短语不等于 V 中的点所对应的短语，而是另外的短语 c_q(q 是另行设定的正整数，$q>p$)，则称序号 q 为图 G 的图外权值.

定义 5. 对于模糊相容图 G 的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$，将其中的元素 1 用相应的图内权值、图外权值代替，而零元素不变，由此构成另一个矩阵 $D(G)=(d_{ij})$，称 $D(G)$ 为图 G 的邻接权矩阵，简称权矩阵.

需要注意的是 $D(G)$ 里的 d_{ij} 是由集合组成的.

本文于1984年10月7日收到，曾在中国系统工程学会模糊系统模糊数学学会成立会上宣读.

定义 6. 对于 n 元模糊开关函数所有的短语覆盖，有的覆盖的短语数目最少，且在此条件下各短语的所有字符数总和最小，则称它为此函数的极小覆盖.

以往求极小覆盖的方法需求出所有模糊本原蕴含 (FPI)[1]. 这里提出下面的命题：不用求出某些 FPI 也可得到极小覆盖，并提出下面的定理：

定理 1. 对于 n 元模糊开关函数的一个短语覆盖，若其中各短语关于某变量均不含互余对 $(x_i\bar{x}_i)$，则短语间求模糊相容所得结果中含此互补对的短语均不在极小覆盖中.

由以上定理可知，当求极小覆盖时，若原始覆盖中不含带 $x_i\bar{x}_i$ 的短语，则不需要求出带 $x_i\bar{x}_i$ 的短语来；在求模糊相容结果时，也不用求出这类短语.

定理 2. 设 $R_1, R_2, \cdots, R_t$ 和 W 各表示模糊开关函数的短语，如果 $W \in \{(\ )R_1\phi R_2\phi\cdots\phi R_t\}$，其中$(\ )\cdots$表示任意种形式结合的模糊相容，则 $W \subseteq R_1 + R_2 + \cdots + R_t$.

连续使用文[1]中定理 3.2.5，此定理即可得证.

应用上述定义与定理可得到求取极小覆盖的方便的新方法.

二、求模糊开关函数的极小覆盖

文[4]中提出了用序号数组法求布尔函数的极小覆盖. 这一方法可推广至模糊开关函数，但需把立方体序号改用短语序号. 为简明起见，仅考虑完全指定的 n 元单输出模糊开关函数. 具体算法如下：

第一步，对所给初始短语覆盖 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$，把它对应到模糊相容图 $G(V, X)$. 第二步，计算图 G 的权矩阵 $D(G)$ 的元素 $d_{ij}(i < j)$：(1) $d_{ij} = \{q_t\}_{t=1}^{b}$，$b$ 为集合内元素的个数，$c_{q_t} \in \{c_i\phi c_j\}$，把这样的 q_t 填写在 $D(G)$ 中：1) q_t 为图 G 的图内权值；2) q_t 为图 G 的图外权值，且 $q_t > p$，c_{q_t} 不含 C 中短语里没有的互余对. 这里设对于某个 d_{ij} 共有 m 个图外权值. (2) 把填入 $D(G)$ 的与图外权值 q_t 对应的 c_{q_t} 再对应为新的点 $v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_{p+m}$，将它们填入图 G，得到 $p+m$ 阶新图 $G_1(V, X)$. 第三步，计算图 G_1 的权矩阵 $D(G_1)$ 的元素 $d_{ij}(i < j)$，已计算过的不再计算：(1) $d_{ij} = \{q_t\}_{t=1}^{b}$，$c_{q_t} \in \{c_i\phi c_j\}$，填写这样的 q_t 在 $D(G)$ 中：1) q_t 为 G_1 的图内权值；2) q_t 为 G_1 的图外权值，且 $q_t > p + m$，c_{q_t} 不含 C 中短语里没有的互余对. (2)把填入 $D(G_1)$ 的与图外权值 q_t 对应的 c_{q_t} 再对应为新的点并添入图 G_1 中，得到新的图 G_2. 第四步，用上述同样的办法得到新图 $G_3, G_4, \cdots, G_\lambda$，直至对于某一图 G_λ 不再出现应该填写的图外权值为止. 第五步，在图 G_λ 中的点所对应所有短语之间求蕴含，得到元素全部为 FPI 的集合 Z，且在 $D(G_\lambda)$ 标记栏中对应的行(列)记上 Z. 第六步，在 $D(G_\lambda)$ 标记栏填写"序号数组"：1) 对于 $D(G_\lambda)$，若 $d_{xy} = \{q_t\}_{t=1}^{b}$，$x, y, q_t$ 均为行(列)序号，在 $D(G_\lambda)$ 行(列)标记栏内首先依序标记(1),(2),…直至最后一行(列)，且在 q_t 行(列)标记栏再记上相应的 2 序号数组 $(x \cdot y)$，2) 对于 $D(G_\lambda)$，在标有 Z 的行(列)里填写 3 序号数组，它们由原来的 2 序号数组生成. 若 z 为 Z 中短语所对应行(列)的序号，z 行(列)标记有$(x \cdot y)$，且其 x 行(列)标记栏有 Z，而 y 行(列)却没有，则分别使用"代入定理"[4]将 y 行(列)标记栏中的所有 2 序号数组代替 y，与 x 组成 3 序号数组，即若 $(x \cdot y) = (z)$，$(y) = (a \cdot s)$，则 $(x \cdot a \cdot s) = (z)$. 3) 在 Z 中短语对应点序号所在的行(列)标记栏中填写 4 序号数

组．它们可由 2 序号数组生成，且两个序号均不是 Z 中短语对应点的序号．它们也可由 3 序号数组生成．3个序号中仅有一个不是 Z 中短语对应点的序号．使用代入定理时，一个也不能遗漏．4)用类似办法生成 5 序号数组、6 序号数组等，直至无法再生成数量更多的序号数组为止．第七步，对 $D(G_i)$ 的 Z 中的短语序号所在行(列)标记栏内的序号数组，其序号如全为 Z 中的短语序号，就把它们写成逻辑和．第八步，将第七步得到的各个逻辑和全部改为逻辑乘，经吸收得出总序号数组 Q．第九步，Q 等于数个序号数组的逻辑和，每个序号数组对应一个模糊相容图，它们对应的覆盖中满足定义 6 的即为所求的极小覆盖．

例． 求 $F = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2 + x_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3$ 的极小覆盖．

第一步，F 中各短语依序等于 $c_1, c_2, \cdots, c_5$ (如 $c_1 = x_1\bar{x}_2$)，则 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_5\}$ 对应于 $G(V, X)$．

第二步到第六步见图 1

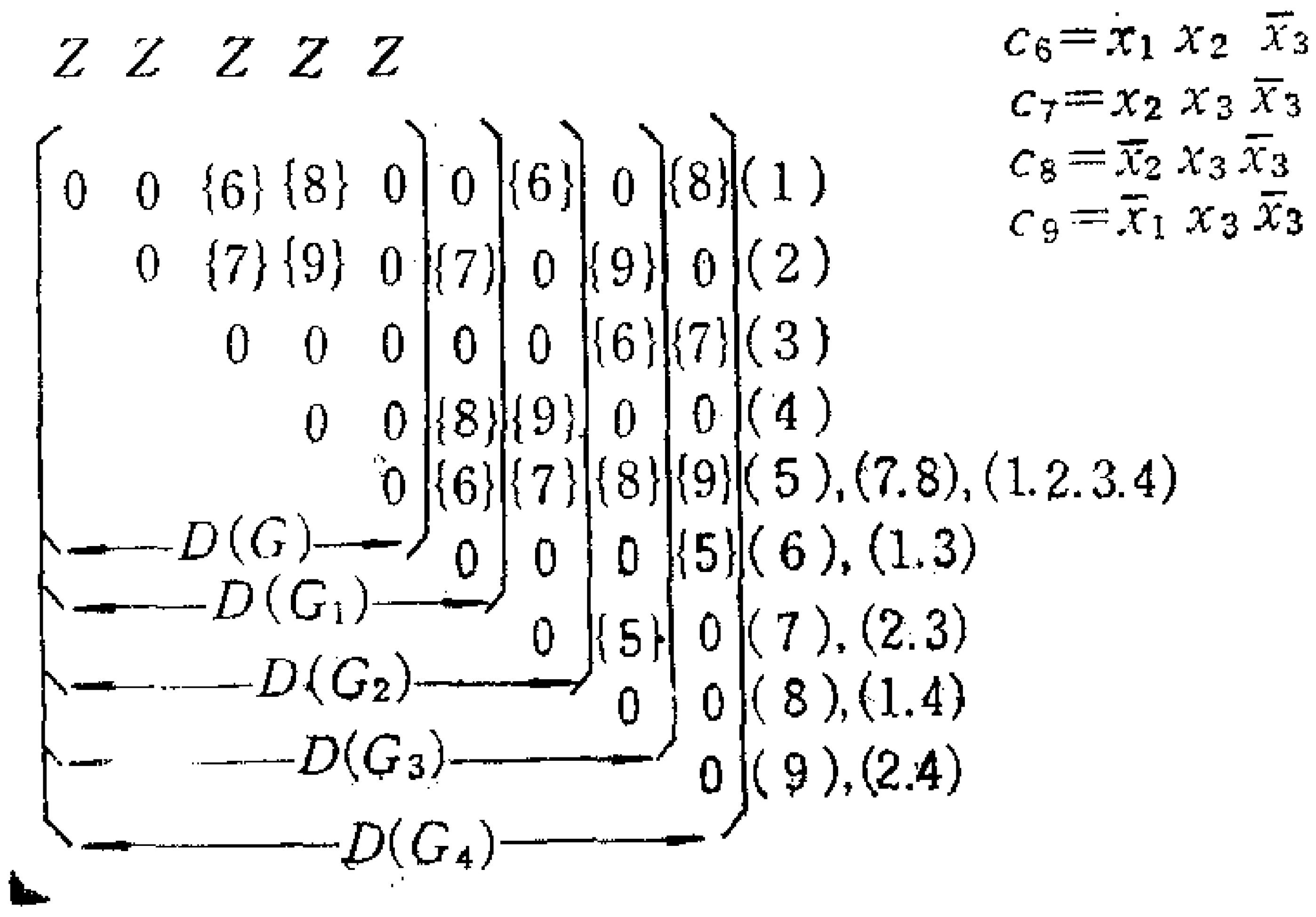

图　1

由第七到第九步得到　$Q = (1)\cdot(2)\cdot(3)\cdot(4)\cdot[(5) + (1\cdot2\cdot3)] = (1\cdot2\cdot3\cdot4)$，$r = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 为极小覆盖．

参　考　文　献

[1] Kandel, A., Lee, S. C., Fuzzy Switching and Automata: theory and Application, (1978), 93.
[2] Schwede, G. W., Kandel, A., Fuzzy Maps, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, SMC-**17**, (1977), 669.
[3] 汪浩、沙钰译，模糊集在系统分析中的应用，湖南科技出版社，1978，85.
[4] 刘汉龙，立方体图及开关函数极小化，自动化学报，9卷 3 期(1983)，169.

FUZZY CONSENSUS GRAPH

Liu Hanlong
(Changsha Communications Institute)

Abstract

In this paper, a new method for minimizing the fuzzy functions is presented, and a fuzzy consensus graph is given. When it is used to obtain the minimal cover of the fuzzy switching functions, it requires neither fuzzy prime implicant, nor decomposition of phrases into fundamental ones. This method can be effectively used to design multivariate fuzzy logic switching systems and successional logic systems.