第12卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 4
1986年10月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1986

试论国民经济控制系统的对偶问题

顾新华　连成平
(南 京 大 学)

摘　　要

本文根据能控性和能观性的对偶原理，提出了国民经济控制系统及其对偶问题，阐明了此二对偶模型的经济内容及各系统变量的经济涵义. 最后基于对偶系统的性能指标，揭示了探讨最优计划价格的新途径.

一、引　　言

在现代控制理论的科学方法应用于经济活动和管理过程的分析研究中，产生了经济控制论. 它作为合理地调节与控制社会经济系统、有效地计划与管理国民经济及其各部门的重要工具，已经跻身于当代应用科学之林. 在经济控制论的研究中，现代控制理论和宏观经济学的有机结合，首先在于两学科中许多基本概念的对应关系[1]. 本文拟用现代控制论及其能控性和能观性的对偶原理，对国民经济投入产出的动态系统进行研究，力求阐明所述控制论模型及其对偶问题的经济内容和各系统变量的经济涵义.

二、国民经济控制系统及其对偶问题

在建立国民经济控制系统之前，先设定如下实物型向量和矩阵:

$\boldsymbol{x}_k=[x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}]^T$ 为控制期或计划期内第 k 年的总产品向量，取为控制系统的状态向量. 其中 n 表示所谓的国民经济纯部门数目.

$\boldsymbol{y}_k=[y_1^{(k)},\cdots,y_1^{(k)}]^T$ 为第 k 年最终产品向量，作为控制系统的输出向量.

$\boldsymbol{u}_k=[u_1^{(k)},\cdots,u_n^{(k)}]^T$ 为第 k 年的投资品向量，作为系统的控制向量. 这里的投资品系指各种生产性积累品，来源于最终产品.

$B_k=[b_{ij}^{(k)}]_1^n$ 为时变投资系数矩阵，$b_{ij}^{(k)}$ 表示第 $k+1$ 年第 j 部门每增加单位总产品产出，需要上一年第 i 部门提供的投资品数量. 限于篇幅，本文不再考虑多年投资产出滞后问题，也不讨论 B_k 为奇异阵的情况. 事实上若按波兰经济学家奥斯卡·兰格的计算方法，B_k^{-1} 存在，且就是毛投资效果矩阵[2].

$A_k=[a_{ij}^{(k)}]_1^n$ 为时变直接消耗系数矩阵，$a_{ij}^{(k)}$ 表示第 k 年第 j 部门生产单位产品需要

本文于1984年6月20日收到.
本文曾于1984年10月在中国数量经济学会第二届年会上宣读.

直接消耗第 i 部门产品的数量.

根据积累是扩大再生产的源泉的经济原理,必有如下关系式成立:

$$B_k(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{u}_k. \tag{1}$$

则得国民经济控制系统的状态方程

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+B_k^{-1}\boldsymbol{u}_k. \tag{2}$$

根据第 k 年的国民经济综合平衡模型,即横向的静态投入产出方程

$$A_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{x}_k, \tag{3}$$

可得国民经济控制系统的输出方程

$$\boldsymbol{y}_k=(I-A_k)\boldsymbol{x}_k. \tag{4}$$

合写(2),(4)两式并添入初值条件 $\boldsymbol{x}_k|_{k=0}=\boldsymbol{x}_0$, 可得国民经济"原系统"

$$\begin{aligned}\Sigma(I,\ B_k^{-1},\ (I-A_k)):\ &\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+B_k^{-1}\boldsymbol{u}_k,\\ &\boldsymbol{y}_k=(I-A_k)\boldsymbol{x}_k,\\ &\boldsymbol{x}_k|_{k=0}=\boldsymbol{x}_0,\ k=0,1,\cdots,N-1.\end{aligned} \tag{5}$$

又设 $\boldsymbol{p}_k=[p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}]^T$ 为第 k 年现行价格向量. 并记 $\hat{P}_k=\operatorname{diag}[p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}]$, 则有 $\hat{P}_k^T=\hat{P}_k$.

$\boldsymbol{x}_N^d$ 为计划期末年总产品向量的某种既定值;N 为计划期长度.

$\boldsymbol{y}_k^d$ 为第 k 年最终产品的某种理想值或目标值, 可根据其它经济模型或由经济专家和政策制定者确定[3].

那么,原系统 Σ 的二次型性能指标可设计为

$$\min J_\Sigma=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}_N^d\|_{S_N}^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(\|\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{y}_k^d\|_{Q_k}^2+\|\boldsymbol{u}_k\|_{R_k}^2). \tag{6}$$

这里, $S_N=\hat{P}_NS'_N\hat{P}_N$, $Q_k=\hat{P}_kQ'_k\hat{P}_k$, $R_k=\hat{P}_kR'_k\hat{P}_k$. 而

$$\|\boldsymbol{u}_k\|_{R_k}^2=\boldsymbol{u}_k^TR_ku_k=\boldsymbol{u}_k^T\hat{P}_kR'_k\hat{P}_k\boldsymbol{u}_k=(\hat{P}_k\boldsymbol{u}_k)^TR'_k(\hat{P}_k\boldsymbol{u}_k),$$

余同此定义. S'_N 和 Q'_k 为半正定阵, R'_k 为正定阵,三者都为时变权数矩阵.

原系统性能指标(6)式的经济意义是: 政策制定者必须控制投资品,使国民经济系统实际输出的最终产品尽可能地跟踪外生的理想值或目标值, 同时又要使所用投资总额不致于太大. 性能指标的各权数矩阵由经济专家和决策者确定, 反映了当他们认为所作出的选择为最优时, 各个指标在其心目中的相对重要性及其随时间的变化性. 在把 Q'_k 和 R'_k 联系起来考虑时,则须视决策者在最终产品缺口 $(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{y}_k^d)$ 要小与投资额要省之间作什么样的权衡或折衷.

因为经济上列昂节夫矩阵 $(I-A_k)$ 和兰格法定义的投资系数矩阵 B_k 都可逆, 所以国民经济控制系统 $\Sigma(I,\ B_k^{-1},\ (I-A_k))$ 的能控阵和能观阵的秩分别为

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}[B_{N-1}^{-1}\,|\,IB_{N-2}^{-1}\,|\cdots\cdots|\,IB_0^{-1}]=n,\\ &\operatorname{rank}[(I-A_0)^T\,|\,I^T(I-A_1)^T\,|\cdots\cdots|\,I^T(I-A_N)^T]=n.\end{aligned} \tag{7}$$

于是可知,国民经济原系统 Σ 是完全能控和完全能观的. 再由现代控制论中能控性和能观性的对偶原理即知,与 Σ 相应的国民经济"对偶系统"为

$$\begin{aligned}\Sigma^*(I,(I-A_k)^T,\ (B_k^{-1})^T):\ &\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{z}_{k-1}+(I-A_k)^T\boldsymbol{v}_k,\\ &\boldsymbol{w}_k=(B_k^{-1})^T\boldsymbol{z}_k\end{aligned} \tag{8}$$

亦具有完全能观性和完全能控性[4].

三、国民经济对偶系统的经济解释

为了剖析国民经济对偶系统 Σ^* 的经济内涵，需回顾一下第 k 年纵向的静态投入产出方程——价格测算模型[5]:

$$\boldsymbol{m}_k = (I - A_k^T)\boldsymbol{p}_k = (I - A_k)^T\boldsymbol{p}_k. \tag{9}$$

这里，$m_i^{(k)} = f_i^{(k)}/x_i^{(k)}$ 为第 k 年第 i 部门的国民收入生产系数或最初投入支付率. 其中，$f_i^{(k)}$ 为第 k 年第 i 部门实物总产品 $x_i^{(k)}$ 中包含的活劳动消耗量，是一个以货币形式表现的量，常被称为净产品，可区分为劳动报酬(即工资)和纯收入(即税利). 在社会主义政治经济学中 $f_i^{(k)}$ 就是第 i 部门在第 k 年所创造的国民收入量，在西方国民经济核算体系中它又被称为最初投入量.

将国民经济对偶系统 Σ^* 之状态方程与 (9) 式相对照，若令 $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{p}_k$ 为单位价格向量，则有

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}_{k-1} + \boldsymbol{m}_k. \tag{10}$$

$k = 0$ 时令 $\boldsymbol{z}_0 = 0$，有

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{m}_1,$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{z}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i. \tag{11}$$

可见，$\boldsymbol{z}_k$ 为计划期内期初(第 1 年)直到现期 (第 k 年) 的最初投入总和系数，或为 k 年来单位产品产出中国民收入累积系数. 由此亦可知，对偶系统 Σ^* 的状态方程描述了国民收入生产的累积过程.

现再讨论对偶系统 Σ^* 的输出方程，为经济分析明确起见，可考察其转化形式

$$\boldsymbol{z}_k = B_k^T\boldsymbol{w}_k. \tag{12}$$

从而有

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}_{k-1} &= \Delta B_k^T\boldsymbol{w}_k + B_{k-1}^T\Delta\boldsymbol{w}_k \\ &= B_{k-1}^T(\Delta\boldsymbol{w}_k + (B_{k-1}^T)^{-1}\Delta B_k^T\boldsymbol{w}_k).\end{aligned} \tag{13}$$

若令

$$\boldsymbol{t}_k = \Delta\boldsymbol{w}_k + (B_{k-1}^T)^{-1}\Delta B_k^T\boldsymbol{w}_k = (B_kB_{k-1}^{-1})^T\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_{k-1}, \tag{14}$$

并计及(10)式，则(13)式呈现为

$$\boldsymbol{m}_k = B_{k-1}^T\boldsymbol{t}_k. \tag{15}$$

写出其中第 i 式

$$m_i^{(k)} = [b_{1i}^{(k-1)}, \cdots, b_{ni}^{(k-1)}][t_1^{(k)}, \cdots, t_n^{(k)}]^T. \tag{16}$$

上式中投资系数定义为

$$b_{ji}^{(k-1)} = u_{ji}^{(k-1)}/(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}). \tag{17}$$

其中 $u_{ji}^{(k-1)}$ 为第 i 部门第 $k-1$ 年到第 k 年，增加总产品产出 $(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})$ 需要第 j 部

门第 $k-1$ 年提供的投资品. 将(17)式代入(16)式并加以整理,得

$$m_i^{(k)}(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})=[u_{1i}^{(k-1)},\cdots,u_{ni}^{(k-1)}][t_1^{(k)},\cdots,t_n^{(k)}]^T, \tag{18}$$

或简记为

$$m_i^{(k)}(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})=\boldsymbol{u}_{\cdot i,k-1}\boldsymbol{t}_k. \tag{19}$$

回忆一下 $m_i^{(k)}$ 的定义,即知上式左边乘积 $m_i^{(k)}(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})$ 的经济意义是: 第 k 年第 i 部门若增加实物产品产出 $(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})$ 个单位时其中所包含的国民收入. 由于产出增量 $(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})$ 是由国民经济各部门向第 i 部门提供的投资 $\boldsymbol{u}_{\cdot i,k-1}$ 所引起的, 所以国民收入增量 $m_i^{(k)}(x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)})$ 也应归于这些投资. 由此可推知, (19) 式右边的 $\boldsymbol{t}_k$ 就是第 k 年国民收入生产中一种价值型的投资效果向量, 又可叫净投资效果. 其中的元素 $t_j^{(k)}$ 是第 j 部门提供的投资品产生的国民收入生产效果,这是一种综合性系数, 因为它已平滑了同一部门提供的投资品在各不同部门使用时所出现的经济效果的差别. 反映在(19) 式中, i 可从国民经济第 1 部门变到第 n 部门,而 $\boldsymbol{t}_k$ 并不随之改变.

下面回到对偶系统 Σ^* 的输出方程,为简洁起见,令

$$\Lambda_k=(B_{k-1}B_k^{-1})^T, \tag{20}$$

代入(14)式,并作整理,有

$$\boldsymbol{w}_k=\Lambda_k(\boldsymbol{w}_{k-1}+\boldsymbol{t}_k). \tag{21}$$

可令 $\boldsymbol{w}_0=0$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1&=\Lambda_1\boldsymbol{t}_1,\\&\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_k&=\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i}^{k}\Lambda_j\right)\boldsymbol{t}_i.\end{aligned} \tag{22}$$

可见, $\boldsymbol{w}_k$ 是计划期内 k 年来国民收入生产中一种价值型的加权总和(或累积)投资效果, 各权数由投资系数变化的影响所形成. 至此亦可知, 对偶系统 Σ^* 的输出方程刻划了 k 年来单位产品产出中, 国民收入累积系数与同期国民收入生产中价值型加权累积投资效果之间的关系.

四、对偶系统的性能指标与相应的最优计划价格

在选择国民经济对偶系统 Σ^* 的二次型性能指标时, 第一种选择可使国民收入生产中至各期的加权累积投资效果最大化,若不计终端指标,即有

$$\max J_{\Sigma^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\|\boldsymbol{w}_k\|_{G_k}^2. \tag{23}$$

其中的权数矩阵 G_k 为半负定. 若记 $\boldsymbol{p}_k^d$ 为计划管理或经济决策部门制订的某种计划价格,则上述性能指标可以改写为

$$\max J_{\Sigma^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(\|\boldsymbol{w}_k\|_{G_k}^2-\|\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_k^d\|_{H_k}^2). \tag{24}$$

其中的 H_k 为正定权数矩阵.

第二种性能指标的选择是基于马克思劳动价值论的有关经典结论：随着劳动生产率的提高，单位实物产品所包含的活劳动投入量是下降的．这表现在性能指标选择上，应使最初投入支付率最小化，以反映劳动生产率必须不断提高这一经济和技术发展的客观要求．即有

$$\min J_{\Sigma^*} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \|\boldsymbol{m}_k\|^2_{G_k}. \tag{25}$$

其中 G_k 为半正定权数矩阵．计及(9)式，上式呈

$$\min J_{\Sigma^*} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \|\boldsymbol{p}_k\|^2_{G_{1k}}. \tag{26}$$

在这里权数矩阵变为 $G_{1k} = (I - A_k)G_k(I - A_k)^T$．

在一个完整的经济计划中，不仅要考虑在原系统 Σ 之状态方程中所反映的扩大再生产过程中各部门之间的技术经济联系，输出方程所刻划的国民经济综合平衡关系，而且还要牵涉到诸如自然资源、能源和交通运输、劳动力和技术力量、资金和生产能力、消费品最低生产量以及环境保护等条件的限制．这些条件往往可以抽象为如下形式的一组不等式约束：

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\min} \leqslant \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{y}_k) \leqslant \boldsymbol{\Gamma}_{\max}. \tag{27}$$

上式与作为等式约束的系统方程 (5) 一起，构成了原系统 Σ 的一个新约束组．类似地可以在对偶系统中考虑变量之间的制约关系和受制程度，并设计一定形式的性能指标，由此算出的最优控制解 $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{p}_k$，就得到考虑了社会和环境方面许多客观条件限制的可行价格．另外，由 Σ^* 与(23)或 (24) 式，以及 Σ^* 与 (25) 或(26)式，可以分别求出使得加权累积净投资效果最大化和促使劳动生产率最大限度提高的价格．可见，现代控制理论应用于宏观经济学时，能控性和能观性的对偶研究开辟了一条探讨最优计划价格的新途径．最后需补充说明的是，对于互为对偶的国民经济控制系统，应当先解 Σ^*，因为其最优控制解将要作为外生参数提供给 Σ．

五、结　语

本文讨论的是所谓的“控观型”对偶问题，国民经济控制系统还有一种重要的“拉氏型”对偶问题，与之相联系的是动态影子价格[6]，它在国内目前还是一个鲜为人知的经济范畴，现在国内外广泛流行的(静态)影子价格是线性规划对偶问题的最优解[7]，同时它又是线性规划原问题的拉格朗日乘子．在经济控制论中相平行的研究可以发现，经济控制系统 Σ 假如满足某些凸性条件，原系统哈密尔顿函数中的伴随向量就可以在经济上解释为动态影子价格，而且它也等于 Σ 之拉氏对偶控制系统 Σ^{**} 的最优控制解．动态影子价格在经济管理中有着十分广阔的应用前景，所以建议迅速进行国民经济控制系统“拉氏型”对偶问题的开发研究．

“对偶”问题的研究，一直得到中科院学部委员、上海交大张钟俊教授，南京大学经济系吴可杰教授和数学系钟瑚绵副教授的热情指导，在此谨向他们致以深切的谢忱．

参 考 文 献

[1] 张钟俊、张启人,线性计量经济系统的状态空间实现,信息与控制, 4(1981), 12—13.
[2] [波兰]奥斯卡·兰格著,袁镇岳等译,经济计量学导论,中国社会科学出版社, 1980, 228—231.
[3] 吴可杰、顾新华等,地区宏观经济模型体系,经济模型及其应用,经济科学出版社待版.
[4] 王照林等编,现代控制理论基础,国防工业出版社, 1981, 94—139.
[5] 联合国统计局编,萧嘉魁、周逸江译,投入产出表和分析,中国社会科学出版社,1981,111—116.
[6] Gregory, C. Chow, Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, Jhon Wiley and Sons, Inc., 1975, 161—163.
[7] Michael, D., Intriligator: Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, 220—238.

ON THE DUALITY OF NATIONAL ECONOMY CONTROL SYSTEM

GU XINHUA LIAN CHENGPING

(Nanjing University)

ABSTRACT

The control system of the national economy and its duality problem are dealt with in this paper in accordance with the duality of controllability and observability. The economic content of the dual control model and the economic implications of various system variates are also discussed. Based on the corresponding performance indices of the dual system, a new approach to the optimal planned prices is stated at the end of the paper.