第12卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 12, No. 4
1986年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1986

使用输出数据对 MIMO 系统的参数辨识

南 王 绪
(西安西电公司计算所)

摘 要

本文给出了使用输出数据辨识线性时不变 MIMO 系统的一种新算法，该算法可用于辨识典范型系统的动力学和统计学参数矩阵 (F,G,H,R,Q). 算法的推导和结果比 Tse 方法简单。对循环系统和分块系统给出了更理想的形式.

一、概 述

考虑下述离散系统的辨识问题

$$x(i+1) = Fx(i) + \zeta(i), \tag{1a}$$

$$z(i) = Hx(i) + \xi(i). \tag{1b}$$

式中

$x \in R^n, z \in R^p$ 分别为状态与输出变量，R 表示实空间. F, H 是具有适当维数的常矩阵. 假定系统是完全能观的，因此 (F,H) 是能观典范对. $\zeta(i), \xi(i)$ 分别为系统输入和输出噪音，假定是零均值互不相关的，其方差阵分别为 Q, R.

对于这类系统，一种公认的辨识算法是 Tse 算法[1,2]，本文将给出该算法的另一种推导方法，且对循环和分块伴随系统，得到了更实用和简单的结果.

定义输出相关矩阵 $C(k) = \boldsymbol{E}[z(i)z^T(i-k)]$，状态协方差矩阵

$$P = \boldsymbol{E}[x(i)x^T(i)],$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 表示数学期望，则从式(1a)和(1b)可得

$$P = FPF^T + Q, \tag{2}$$

$$C(k) = \begin{cases} HPH^T + R, & k = 0, \quad (3a) \\ HF^kPH^T, & k > 0. \quad (3b) \end{cases}$$

当 (F,H) 为各类能观典范型时，由(2)式和(3)式经适当处理就可得到良好的参数辨识算法.

本文于1984年5月2日收到.

二、广义伴随系统的辨识

设 (F,H) 具有如下的广义伴随形式

$$F=\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix} H_1^T \\ \vdots \\ H_p^T \end{bmatrix}. \tag{4}$$

式中

$$F_i=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & I_{\sigma_{i-1}} & 0 \\ \hdashline a_i^T & & 0^T \end{array}\right],\quad H_i^T=e_{1+\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}}^T,$$

$$a_i^T=[a_{i_{11}}\cdots a_{i_1\sigma_1}\ a_{i_{21}}\cdots a_{i_i}\sigma_i],$$

$$e_i^T=[0\cdots 1\cdots 0],$$

$$\sigma_1+\sigma_{2+}\cdots+\sigma_p=n,\ \forall\ \sigma_i\geqslant 1.$$

这类系统的典范能观性矩阵是单位阵，即

$$R_0=\mathrm{row}[H_i^TF^k]_{k=0,\cdots\sigma_{i-1};i=1,\cdots p}=I_n. \tag{5}$$

式中 $\mathrm{row}[H_i^TF^k]_{k=0,\cdots\sigma_{i-1};i=1,\cdots p}$ 表示以 $H_1^T,\cdots H_1^TF^{\sigma 1-1},H_2^T,\cdots H_p^TF^{\sigma p-1}$ 为行向量并顺序排列的矩阵，后面的标记类同.

1. a_i^T,σ_i 的辨识

用 $C_{ij}(k)$ 表示 $C(k)$ 的元素，(3)式可写为

$$C_{ij}(k)=\begin{cases} H_i^TPH_j+R_{ij}, & (6a)\\ H_i^TF^kPH_j. & (6b)\end{cases}$$

使用(5)式可得 $\mathrm{row}[C_{ij}(k)]_{k=1,\cdots\sigma_i;i=1,\cdots p}=FPH_j$，因为 F 是可逆的，因此

$$PH_j=F^{-1}\mathrm{row}[C_{ij}(k)]_{k=1,\cdots\sigma_i;i=1,\cdots p}. \tag{7}$$

考虑到 $H_i^TF^{\sigma_i}=[a_i^T\ \vdots\ 0^T]$，由式(6b)还可得

$$\begin{aligned} C_{ij}(\sigma_i+1)&=H_i^TF^{\sigma_i}FPH_j\\ &=[a_i^T\ \vdots\ 0^T]\mathrm{row}[C_{ij}(k)]_{k=1,\cdots\sigma_i;i=1,\cdots p}. \end{aligned} \tag{8}$$

将(8)式中小括弧内的1换成流动坐标 k，并使 k 分别从 $1\sim\sigma_1$，$1\sim\sigma_1+\sigma_2$，$\cdots 1\sim\sigma_1+\cdots+\sigma_p$ 变化，则可得

$$a_i^T\phi_j(\sigma_i)=d_{ij}^T,i=1,\cdots,p. \tag{9}$$

式中

$$d_{ij}^T=[C_{ij}(\sigma_i+1)C_{ij}(\sigma_i+2)\cdots C_{ij}(\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}+2\sigma_{i+1})],$$

$$\phi_j(\sigma_i)=\begin{bmatrix} C_{1j}(1) & C_{1j}(2) & \cdots\cdots & C_{1j}(\sigma_1+\cdots+\sigma_i)\\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1j}(\sigma_1) & C_{1j}(\sigma_1+1) & \cdots\cdots & C_{1j}(2\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_i)\\ C_{2j}(1) & C_{2j}(2) & \cdots\cdots & C_{2j}(\sigma_1+\cdots+\sigma_i)\\ \vdots & & & \vdots \\ C_{ij}(\sigma_i) & C_{ij}(\sigma_i+1) & \cdots\cdots & C_{ij}(\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}+2\sigma_i) \end{bmatrix}.$$

为了从(9)式解出 a_i^T，充要条件是 $|\phi_j(\sigma_i)|$ 大于零，由此也就给出了辨识 σ_i 的方法.

关系式(9)对于所有 $j\in P$ 都是满足的.

2. R,Q 的辨识

矩阵 R 的元素可直接从(6a)和(7)式得.

$$R_{ij}=C_{ij}(0)-H_i^T F^{-1}\mathrm{row}[C_{ij}(k)]_{k=1,\cdots\sigma_j;i=1,\cdots,p}. \tag{10}$$

为求出 Q,将(2)式迭代 k 次,并给两边前乘以 H,后乘以 $[F^{-k}]^T H^T$,则有

$$H_i^T F^{k-1}Q(F^T)^{-1}H_i=H_i^T P(F^{-k})^T H_i-H_i^T F^k P H_i$$
$$-\sum_{j=0}^{k-2}H_i^T F^j Q(F^T)^{j-k}H_i. \tag{11}$$

设 Q 可以用等值对角矩阵表示,即

$$Q=\mathrm{diag}[q_{11}\cdots q_{1\sigma1}q_{21}\cdots q_{p}\sigma_p]. \tag{12}$$

详细分析(11)式各项,化简后得到

$$q_{ik}=\frac{1}{b_{iik}}\left[S_{ik}-C_{ii}(k)-\sum_{j=0}^{k-2}q_{i(j+1)}(F^{-k})^T_{e\,i+j,e_{i+j}}\right], \tag{13}$$

式中

$$e_i=\sigma_1+\cdots+\sigma_{i-1}+1,$$
$$S_{ik}=(PH_i)^T(H_i^T F^{-k})^T.$$

b_{iik} 是按下式定义的 F^{-1} 的第 i 个参数行.

$$b_i^T=[b_{i11}\cdots b_{i1\sigma1}b_{i21}\cdots b_{ii\sigma i}0\cdots 0]$$

中的元素,PH_i 由(7)式决定.

三、简化典范系统的辨识

1. 分块伴随系统

如果(1)式满足条件: 1) $n=rP$, r 是任意正整数;2) $\mathrm{rank}[H^T F^T H^T\cdots(F^T)^{r-1}H^T]^T=n$,则 (F,H) 具有下述分块伴随型:

$$F=\left[\begin{array}{ccc}0 & \vdots & I_{(r-1)p}\\ \hline -A_r & \cdots\cdots & -A_1\end{array}\right];\quad A_i\in R^{p\times p};\ H=[I_p\cdots O_p]. \tag{14}$$

这种系统的辨识算法如下:

$$[-A_r\cdots-A_1]=[C_{r+1}\cdots C_{2r}]\begin{bmatrix}C_1\cdots C_r\\ \vdots\\ C_r\cdots C_{2r-1}\end{bmatrix}^{-1}, \tag{15}$$

$$R=A_r^{-1}\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}C_j+C_0, \tag{16}$$

$$Q=\mathrm{diag}[Q_1\cdots Q_r], \tag{17}$$

$$Q_k=-[S_k-C(k)-\sum_{j=0}^{k-2}Q_{j+1}(F^{-k})^T_{(j+1)(j+1)}]A_{r-k}^{-1}A_r,$$

$$S_k=HP(HF^{-k})^T,\ k\in r,$$

$$HP = \left[-\sum_{i=1}^{r} C_i A_{r-i}^T A_r^{-T}, C_1 \cdots C_{r-1}\right].$$

2. 循环伴随系统

当 F 的特征多项式与其最小多项式相等(充要条件),或者 F 的所有特征值不同(充分条件)时,$(F, \boldsymbol{a}^T H)$ 构成循环伴随型

$$F = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \vdots & I_{n-1} \\ \hline -a_n & \cdots & -a_1 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{a}^T H = [1\ 0 \cdots 0]. \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是任意 p 维常矢量. 定义 $\bar{C}_k = \boldsymbol{a}^T C_k \boldsymbol{a}$,则

$$[-a_n \cdots -a_1] = [\bar{C}_{n+1} \cdots \bar{C}_{2n}] \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \cdots \bar{C}_n \\ \vdots \\ \bar{C}_n \cdots \bar{C}_{2n} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{19}$$

$$R = C_0 + \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} C_i, \tag{20}$$

$$Q = \mathrm{diag}[q_1 \cdots q_n], \tag{21}$$

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{a_n}{a_{n-k}}\left[S_k - \bar{C}_k - \sum_{j=0}^{k-2} q_{j+1}(F^{-k})^T_{(j+1)(j+1)}\right], \\ S_k &= \boldsymbol{a}^T HP(\boldsymbol{a}^T HF^{-k})^T, \quad k \in n, \\ HP &= \left[-\sum_{i=1}^{n} a_n^{-1} a_{n-i} \boldsymbol{a}^T C_i \quad \boldsymbol{a}^T C_1 \cdots \boldsymbol{a}^T C_{n-1}\right], \\ H &= [(C_0 - R) C_1 \cdots C_{n-1}][W^T (WW^T)^{-1}], \\ W &= [PH^T F PH^T \cdots F^{n-1} PH^T]. \end{aligned} \tag{22}$$

在以上所有辨识算法中,所使用的原始数据是输出相关矩阵的数学期望,在实际辨识系统时,可以认为系统是各态历经的,因此期望值可以用下述平均值代替:

$$C(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^{N} z(i) z^T(i-k). \tag{23}$$

以上仅讨论了自由系统的辨识,对于带有控制项的强迫系统(控制矩阵为 G),只要设计有用输入信号为高斯白噪音序列,例如伪随机二进位序列,则使用状态扩展方法[2] 不难转换为具有(1)式形式的自由系统.

参 考 文 献

[1] Tse, E., and Weinert, H. L., Structure Determination and Parameter Identification for Multivarable Stochastic Linear Systems, Proc. of Jiont. Auto. Cont. Conf., 1973, 604—609.

[2] 韩光文,辨识与参数估计,国防工业出版社,1980.

PARAMETER IDENTIFICATION OF MIMO SYSTEMS BY OUTPUT DATA

NAN WANGXU
(*Computer Technique Application Center of Xd Company*)

ABSTRACT

A new algorithm for the identification of time invariant MIMO systems by output data is obtained in this paper. The algorithm can be used to identify dynamical and statistical parameter matrices (F, G, H, R, Q) of canonical systems. The presented deriving process and results are simplier than that of Tse, and more perfect forms for cyclic and blocked systems have been provided.

1988 年 IFAC 辨识和系统参数估计会议 (IDENTIFICATION '88) 征文通知

兹定于 1988 年 8 月 27 至 31 日在北京召开 IDENTIFICATION '88 会议，欢迎国内外科技工作者积极投稿．征文范围为：建模、辨识、参数估计的理论与方法和在工程、社会、经济、环境、生态、水利、生物医学等方面的应用；自适应和自校正控制系统．应征论文请用英文写成约 200 字的摘要一式五份，在 1987 年 4 月15日前寄到 IDENTIFICATION' 88 会议秘书处，地址为：北京中关村中国科学院系统科学研究所陈翰馥．摘要录取后再请作者寄送全文．

IDENTIFICATION '88 会议秘书处