

脉冲调宽系统的状态转移分析

李友善

(哈尔滨工业大学)

摘要

本文基于状态转移理论,分析了脉冲调宽系统的精确方法,给出了递推算式及计算程序框图,并以脉冲调宽式数字随动系统为例,应用状态转移方法计算了单位阶跃响应。文中介绍的方法具有准确反映脉冲调宽系统真实工作状态的优点。

一、脉冲调宽系统

控制系统采用脉冲调宽式放大器 (Pulse-Width-Modulated Amplifier, 简称 PWM 放大器) 时,称脉冲调宽系统。PWM 放大器的特性如图 1 所示。图中, m_2 为 PWM 放大器的输出; T_0 为 PWM 放大器的工作周期; λT_0 为 PWM 放大器的正向输出时间; $(1-\lambda)T_0$ 为 PWM 放大器的反向输出时间。基于 PWM 放大器特性,更确切地说,脉冲调宽系统为一非线性系统。因此,分析该类系统不应简单地采取分析线性系统的方法。

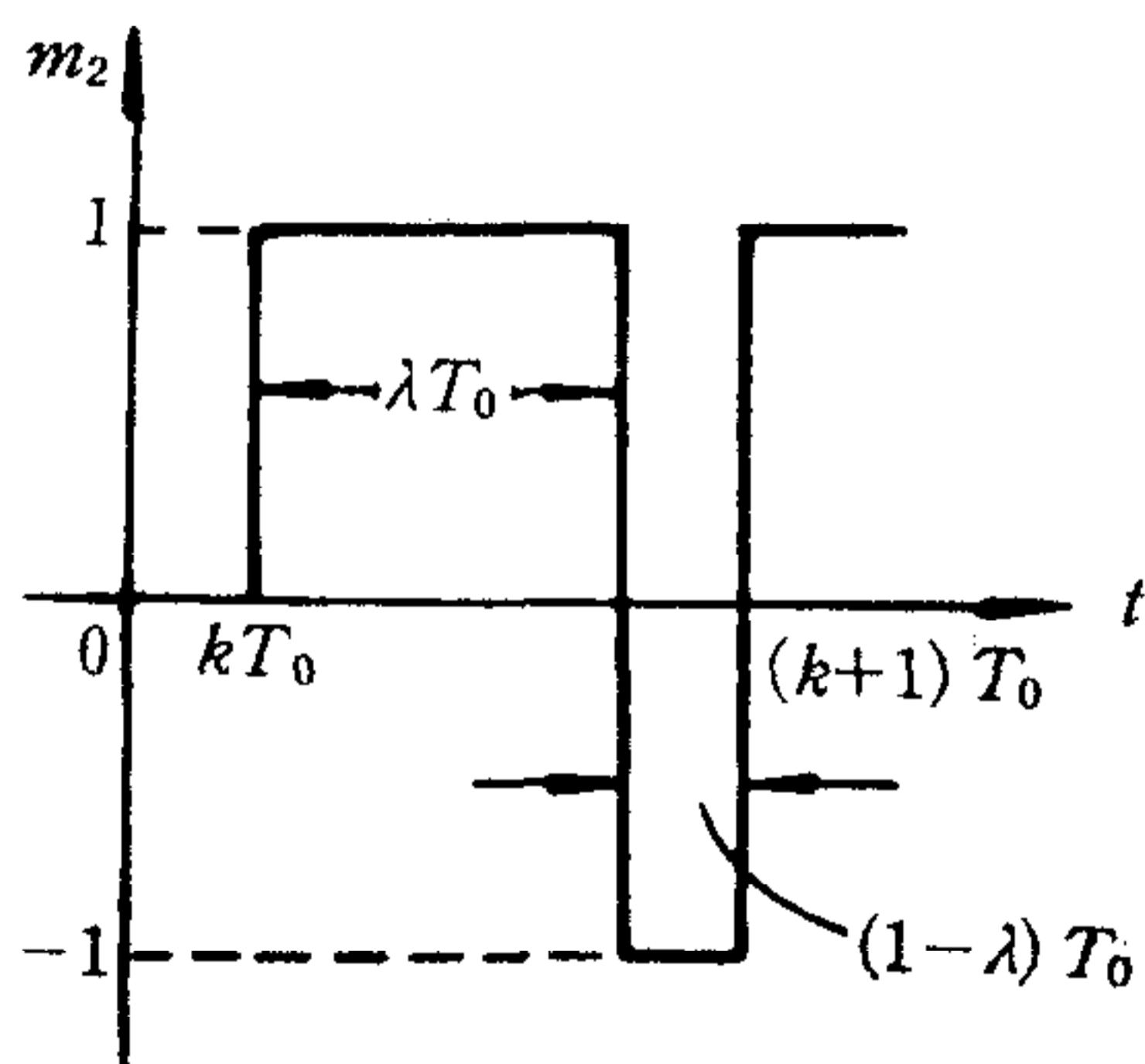


图1 PWM 放大器特性

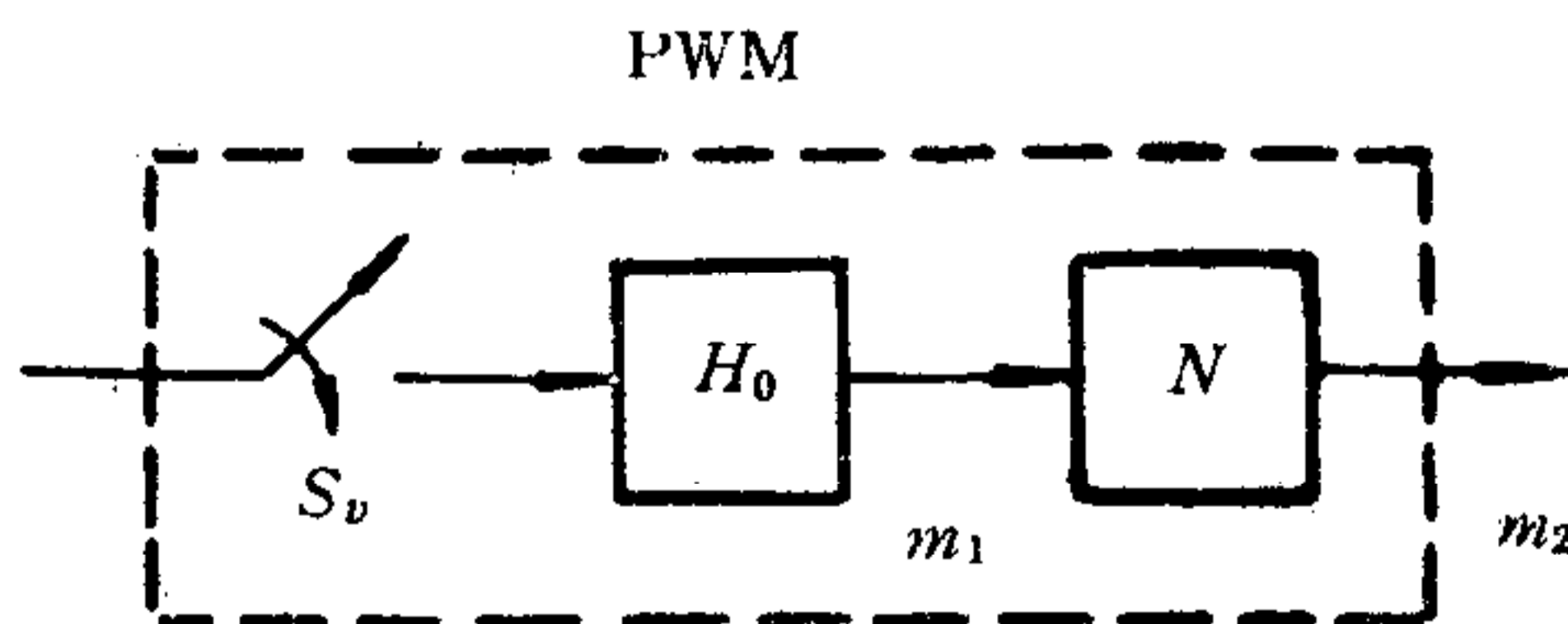


图2 PWM 放大器的等效方框图

二、应用状态转移法分析脉冲调宽系统的递推算式

应用基于状态空间概念建立的状态转移法^[1],分析脉冲调宽系统的步骤及递推算式。阐述如下:应用状态转移法分析脉冲调宽系统时,需将 PWM 放大器视为由变速采样开

关 S_v 、零阶保持器 H_0 及非线性特性 N 组成的等效环节, 其方框图示于图 2. 变速采样开关 S_v 在 PWM 放大器的一个工作周期 T_0 中一般采样两次, 其采样时刻分别为 kT_0^+ 及 $(kT_0 + \lambda T_0)^+$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots; 0 < \lambda < 1$. m_1 及 m_2 分别为 PWM 放大器的输入与输出变量.

基于分析非线性数字控制系统的变增益概念^[1], PWM 放大器在时间区间 $[kT_0^+, kT_0 + \lambda T_0]$ 及 $[(kT_0 + \lambda T_0)^+, (k+1)T_0]$ 中的增益分别取为 K_{k1} 及 K_{k2} , 其定义是

$$K_{k1} \triangleq \begin{cases} \frac{1}{m_1(kT_0^+)}, & 0 < \lambda \leq 1, \\ 0, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$K_{k2} \triangleq \begin{cases} \frac{-1}{m_1[(kT_0 + \lambda T_0)^+]}, & 0 \leq \lambda < 1, \\ 0, & \lambda = 1. \end{cases} \quad (2)$$

式中 m_1 为 PWM 放大器的输入, 也同时是零阶保持器 H_0 的输出.

设 v 表示脉冲调宽系统的综合状态向量, 其中包括状态变量 m_1 . Φ, B 分别表示该

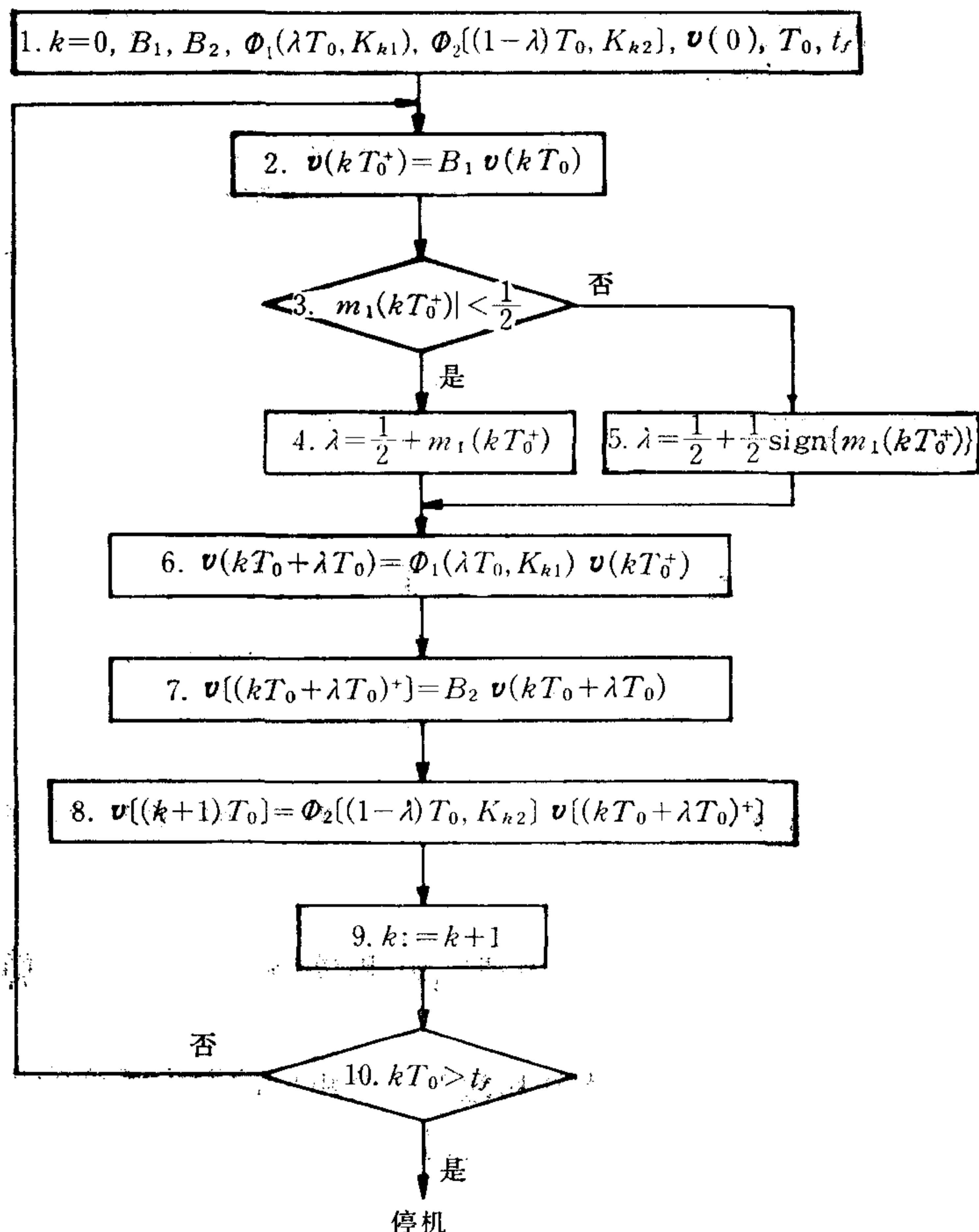


图 3 脉冲调宽系统的计算程序框图

系统的连续状态转移矩阵与离散状态转移矩阵，则应用状态转移法分析脉冲调宽系统的递推算式为

$$\boldsymbol{v}(kT_0^+) = B_1 \boldsymbol{v}(kT_0), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{v}(kT_0 + \lambda T_0) = \Phi_1(\lambda T_0, K_{k1}) \boldsymbol{v}(kT_0^+), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{v}[(kT_0 + \lambda T_0)^+] = B_2 \boldsymbol{v}(kT_0 + \lambda T_0), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{v}[(k+1)T_0] = \Phi_2[(1-\lambda)T_0, K_{k2}] \boldsymbol{v}[(kT_0 + \lambda T_0)^+], \quad (6)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

上式中，可取

$$\lambda = \frac{1}{2} + \Delta. \quad (7)$$

其中

$$\Delta = \begin{cases} m_1(kT_0^+), & |m_1(kT_0^+)| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \text{sign}\{m_1(kT_0^+)\}, & |m_1(kT_0^+)| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

基于递推算式(3)–(6)，分析脉冲调宽系统的计算程序框图示于图3，其中 $\boldsymbol{v}(0)$ 为给定的初始综合状态向量， t_f 为要求的计算时间。

三、脉冲调宽系统分析举例

下面以采用 PWM 放大器的数字随动系统^[2]为例，说明基于状态转移理论分析脉冲调宽系统的方法。

设有采用 PWM 放大器的数字随动系统，其方框图示于图4。图中，PWM 放大器的特性如图1所示。反馈系数 $\alpha = 3$ ，增益 $K = 2 \times 10^3 \text{sec}^{-2}$ 。数字随动系统具有零初始条件。应用状态转移法分析该脉冲调宽系统的单位阶跃响应。

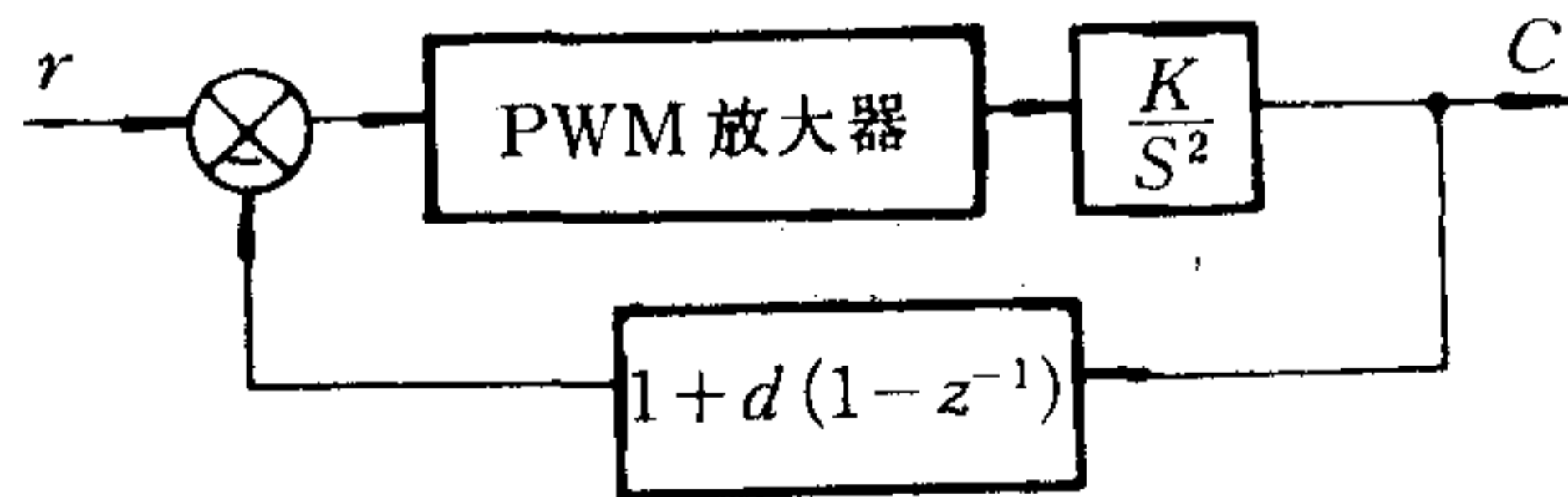


图4 脉冲调宽系统方框图

基于图4绘制的脉冲调宽系统状态变量图示于图5。根据图4所示反馈通道传递函数为 $(1 + \alpha) - \alpha z^{-1}$ ，图5示出连续与离散两条反馈通道。选取离散反馈通道的采样周期与 PWM 放大器的工作周期相同。从图5看到

$$m_1(kT_0^+) = \varepsilon^*(kT_0^+). \quad (9)$$

选取系统的综合状态向量 \boldsymbol{v} 为

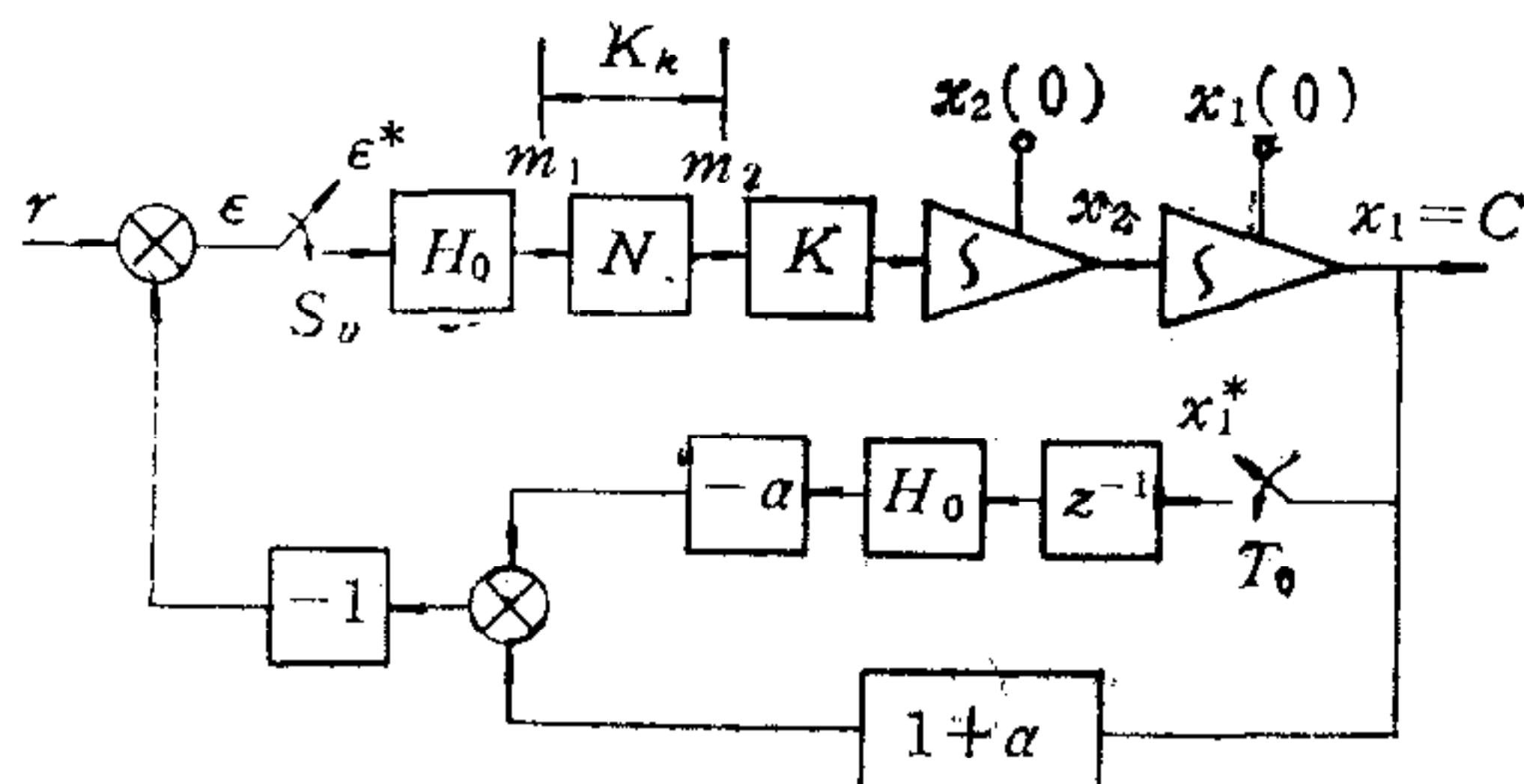


图 5 脉冲调宽系统状态变量图

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ \epsilon^* \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

并基于图 5 列写脉冲调宽系统的状态转移方程及状态微分方程。状态转移方程为

$$\mathbf{v}(kT_0^+) = B_{11}\mathbf{v}(kT_0) + B_{12}\mathbf{v}[(k-1)T_0] \quad (11)$$

及

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[(kT_0 + \lambda T_0)^+] &= B_{21}\mathbf{v}(kT_0 + \lambda T_0) + B_{22}\mathbf{v}[(k-1)T_0] \\ (k &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

式中离散状态转移矩阵 B_1, B_2 分别为

$$B_{11} = B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_{12} = B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

状态微分方程为

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = A\mathbf{v}(\tau). \quad (15)$$

式中系数矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_k K & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$$\tau = t - kT_0^+.$$

$$kT_0^+ \leq t \leq (k+1)T_0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

根据系数矩阵 A ，通过式 $\Phi(\tau) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ ，可求得连续状态转移矩阵 $\Phi(\tau, K_k)$ 为

$$\Phi(\tau, K_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_k K}{2} \tau^2 & 1 & \tau \\ 0 & K_k K \tau & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将变量 τ 分别代以 λT_0 及 $(1 - \lambda)T_0$, 并将变增益 K_k 分别代以相应的 K_{k1} 及 K_{k2} , 由式 (17) 求得连续状态转移矩阵 $\Phi_1(\lambda T_0, K_{k1})$ 及 $\Phi_2[(1 - \lambda)T_0, K_{k2}]$ 为

$$\Phi_1(\lambda T_0, K_{k1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{k1} K}{2} (\lambda T_0)^2 & 1 & \lambda T_0 \\ 0 & K_{k1} K (\lambda T_0) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\Phi_2[(1 - \lambda)T_0, K_{k2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{k2} K}{2} [(1 - \lambda)T_0]^2 & 1 & (1 - \lambda)T_0 \\ 0 & K_{k2} K [(1 - \lambda)T_0] & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

其中 K_{k1} , K_{k2} 及 λ 分别由式 (1), (2) 及式 (7) 确定.

取 PWM 放大器的工作周期 $T_0 = 5 \times 10^{-3} \text{sec}$, 将已知参数 $\alpha = 3$ 及 $K = 2 \times 10^3 \text{sec}^{-2}$ 分别代入式 (13), (14) 及式 (18), (19), 并应用图 3 所示计算程序框图, 考虑给定的初始条件 $x_1(0) = x_2(0) = 0$, 求得脉冲调宽式数字随动系统的单位阶跃响应, 如图 6 曲线 1 所示. 该单位阶跃响应的超调量为 19.3%, 峰值时间为 0.055sec, 对应 5% 允许误差的调整时间为 0.08sec.

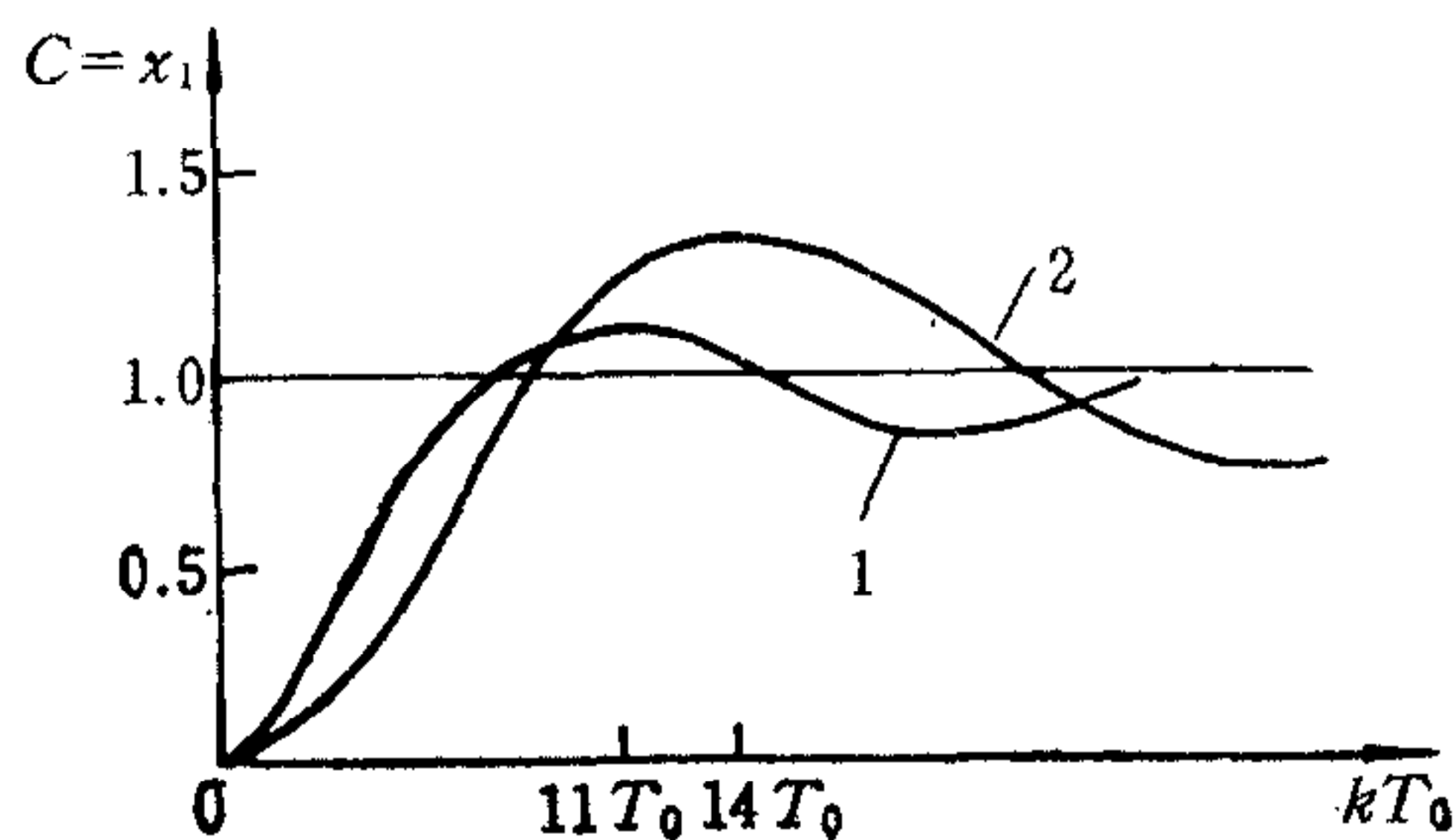


图 6 单位阶跃响应

四、结 语

基于状态转移理论, 分析脉冲调宽系统概念清晰、方法简明, 所用递推算式也便于数字计算机实现. 因此, 应用状态转移法分析脉冲调宽系统是可行的.

应用状态转移法进行时域响应分析,可以方便地、准确地分析出脉冲调宽系统的品质特性。为便于比较,图6给出了将PWM放大器作为一般线性放大器近似处理时,上述数字随动系统的单位阶跃响应(曲线2)。曲线2代表的近似线性系统的品质特性是:超调量为38%,峰值时间为0.07sec,对应5%允许误差的调整时间为0.22sec。显见,应用状态转移法分析该系统在阻尼程度、响应速度及调整时间等品质特性上均较近似线性系统所得品质特性好。

参 考 文 献

- [1] Tou, J. T., *Modern Control Theory*, New York, McGraw Hill, 1964.
[2] 李友善主编,自动控制原理(下册),国防工业出版社,1981.

ANALYSIS OF CONTROL SYSTEMS WITH PWM AMPLIFIER USING THE STATE-TRANSITION METHOD

LI YOUSHAN

(*Harbin Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this paper, the method of analysing control systems with PWM amplifier based on the state-transition concept is discussed. The recurrence formulas and the flow diagram for computing program are given. As an example, the unit-step response of a digital servo-system with PWM amplifier is calculated, using the state-transition method. The advantage of the state-transition method is that it can describe the exact state of control systems with PWM amplifier.