第12卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 12, No. 4
1986年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1986

设计 Robust 控制器的一个新准则和新算法

郑毓蕃 王 珂
(华东师范大学)

摘 要

本文讨论具有最优输出调节品质的 Robust 控制器，利用绝对能观子系统的概念研究干扰对闭环系统输出的影响．在一定条件下，从原系统中可分离出一个绝对能观子系统，这样使输出调节的最优化计算得到简化．

本文给出了完成上述任务的一个算法．

一、导 论

1976 年 Davison 等提出了 Robust 控制器设计原理与方法．几年前，本文作者之一曾经为力学持久机温度控制系统设计了一整套数学模型[1]．多年的实时运算效果表明，这个控制系统的数学模型是成功的． Davison 等[2,3]在解决伺服调节器的设计过程中，都是致力于使一个带伺服模型的闭环系统保持稳定(这是十分必要的)，而在设计过程中很难对输出调节品质作任何特殊的技术规定．但实际系统往往要求输出调节满足一定的品质指标．为此本文提出了设计 Robust 控制器的一个新准则：

NC-1：闭环系统稳定，而且具有令人满意的闭环动态响应．

NC-2：在零初始条件下，闭环系统受到干扰时，下列性能指标取极小：

$$J=\int_0^{\infty} z^{\tau}(\tau)Wz(\tau)d\tau=\min. \tag{1.1}$$

其中 $z(\tau)$ 是系统的被调输出量，$W\geqslant 0$． 一般情况下，J 的值与干扰的性质有关．一种普遍适用的品质指标泛函可规定为

$$J=E\int_0^{\infty} z^{\tau}(\tau)Wz(\tau)d\tau. \qquad (1.1)'$$

具体定义和说明详见第二节．

我们将满足 NC-1、NC-2 准则的控制器称为具有最优输出调节品质的 Robust 控制器．简记 RCOR (即 Robust Controller with Optimal Regulation)． RCOR 的设计需要考虑两方面的问题：1)解决一个带约束(保持闭环稳定且具有优良动态响应)的 J 的最优化问题；2)为了简化最优化算法(一般是非线性问题)，有必要研究干扰对输出的影响．

本文于 1983 年 7 月 12 日收到初稿，1984 年 8 月 30 日收修改稿．

二、准备知识及设计 RCOR 的数学提法

设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别是系统和干扰模型的状态量，带干扰及伺服性能的被控制对象的数学模型为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_3x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = \qquad\qquad A_2x_2(t), \\ y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \\ z(t) = D_1x_1(t) + D_2x_2(t).\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x_1(t)\in X_1(=\boldsymbol{R}^{n_1})$, $x_2(t)\in X_2(=\boldsymbol{R}^{n_2})$, $u(t)\in U(=\boldsymbol{R}^m)$, $y(t)\in Y(=\boldsymbol{R}^p)$, $z(t)\in Z(=\boldsymbol{R}^r)$, $(m\geqslant r)$. 不失一般性，可假定 $\sigma(A_2)\subset\boldsymbol{C}^+$. $y(t)$ 是可测输出，$z(t)$ 是被调输出. 为了便于突出本文的主题，仅讨论 $y(t)=z(t)$ 的情况. 在复平面上 $\boldsymbol{C}_g$ 的选择取决于对闭环系统动态品质的要求. $\boldsymbol{C}_g$ 可看作是 NC-1 的数值指标.

引理 2.1[2]. 对系统 (2.1) 存在 Robust 控制器的充要条件是:

1) (A_1, B_1) 能控(能稳定);

2) (D_1, A_1) 能观(能检测);

3) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_1-\lambda_i I & B_1\\ D_1 & 0\end{pmatrix}=n+r$, 对任给 $\lambda_i\in\sigma(A_2)$; (2.2)

4) $\operatorname{Im} D_2\subset\operatorname{Im} D_1$. (2.3)

现将式 (2.1) 记为更紧凑的系统矩阵形式

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_3 & B_1\\ 0 & A_2 & 0\\ D_1 & D_2 & 0\end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

如果 (2.3) 式成立，必存在 H，使得 $D_2=D_1H$，则可对 (2.4) 式进行列变换将 D_2 消为零，然后作相应的行变换，得

$$\begin{bmatrix}A_1 & \bar{A}_3 & B_1\\ 0 & A_2 & 0\\ D_1 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

其中 $\bar{A}_3=A_3-A_1H+HA_2$.

这样，我们将伺服功能转化为一般的抗干扰问题. 式(2.5)可以作为被控对象的基本模型. 并且以下将 $\bar{A}_3$ 记为 A_3.

在引理 2.1 的基础上，Davison 等给出了一整套设计 Robust 控制器的步骤. 设控制器方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_r(t) = A(K)x_r(t) + B(K)z(t), \\ u(t) = C(K)x_r(t) + D(K)z(t).\end{cases} \tag{2.6}$$

这儿引进参数集 K 表示控制器的结构虽是选定的，但它与未知参数集 K 有关，闭环系统矩阵记为

$$\begin{bmatrix} A_L(K) & \overline{A}_3 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 \\ D_L & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

其中

$$A_L(K) = \begin{bmatrix} A_1 + B_1D(K)D_1 & B_1C(K) \\ B(K)D_1 & A(K) \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_L = (D_1 \quad 0).$$

根据 Davison 提出的设计准则,要求选择参数集 K,使得 $\sigma(A_L(K)) \subset \boldsymbol{C}_g$. 但本文提出的 RCOR 还要考虑 $J(K) = \min$ 的问题. J 是在 $x_1(0) = 0$ 和 $x_r(0) = 0$ 的条件下取值. 显然,当 K 给定后, J 与干扰模型的初始条件 $x_2(0)$ 有关. 因而 NC-2 取为

$$J = E\int_0^\infty z^\tau(\tau) W z(\tau) d\tau, \quad \|x_2(0)\| = 1. \tag{2.8}$$

(2.8) 式表示 $x_2(0)$ 在一个 n_2 维单位球面上随机取值时 J 的数学期望. 其中

$$z(t) = \int_0^t D_L \exp\{A_L(K)(t-\tau)\}\overline{A}_3 \exp\{A_2(\tau)\} x_2(0) d\tau.$$

这样 RCOR 的设计可归结为 J 关于参数 K 的最优化问题 (RCORP):

$$J = E\int_0^\infty z^\tau(\tau) W z(\tau) d\tau = \min$$

($z(\tau)$ 意义如上),且满足约束条件 $\sigma(A_L(K)) \subset \boldsymbol{C}_g$.

三、RCOR 设 计

定理 3.1. 给定系统(2.5),如果满足引理 2.1 的所有条件,那么一定存在使式(2.8)取极小的 Robust 控制器.

用具体构造的方法证明这一定理. 按以下设计步骤讨论.

第一步: 对系统 (2.5) 构造一个与其串联的伺服补偿器

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c z(t). \tag{3.1}$$

这里 $A_c := T_1 \text{Block diag}\{\underbrace{\mathscr{C}\cdots\mathscr{C}}_{r\text{个矩阵块}}\}T_1^{-1}$, $\mathscr{C}$ 是一个循环矩阵. B_c 的选择使得 (A_c, B_c) 成为能控对.

第二步: 对系统 (D_1, A_1, B_1) 设计一个动态观察器

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = T\hat{x}_1(t) + Fz(t) + B_1u(t). \tag{3.2}$$

这里 $T = A_1 - FD_1$, F 的选择使 $\sigma(A_1 - FD_1) \subset \boldsymbol{C}_g$.

这时整个复合系统用系统矩阵表示

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & A_3 & B_1 \\ B_cD & A_c & 0 & 0 & 0 \\ F_1D_1 & 0 & T & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

第三步：由引理 2.1，存在使式 (3.3) 稳定的状态反馈调节器

$$u(t)=K_1\hat{x}_1(t)+K_2x_c(t). \tag{3.4}$$

那么具有结构稳定性的闭环系统矩阵为

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1K_2 & B_1K_1 & A_3 \\ B_cD_1 & A_c & 0 & 0 \\ F_1D_1 & B_1K_2 & T+B_1K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \\ D_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

到此为止，一般的由 Davison 等提出的 Robust 控制器已经获得。(3.5) 式中满足闭环稳定条件的参数 $K=(K_1, K_2)$ 是一个很大的集合，集合中任一 K 都保证闭环系统满足新准则 NC-1。这时尽管系统是输出调节的，但它未必在式 (2.8) 为最小的意义下是最优的。也就是说 NC-2 尚未满足。然而由上面导出的 K 却可以作为以下参数最优化过程的初始参数。

第四步：令 $x_L^\tau(t)=(x_1^\tau(t),\ x_c^\tau(t),\ \hat{x}_1^\tau(t))$，$x_c(t)$，$\hat{x}_1(t)$ 分别是伺服补偿器和状态观察器的状态量。在 $x_L(0)=0$ 和已知 $x_2(0)$ 的条件下，

$$z(t, K, x_2(0))=\int_0^t D_1e^{A_L(K)(t-\tau)}A_3e^{A_2\tau}x_2(0)d\tau,$$

这里 $A_L(K)$ 系指

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1K_2 & B_1K_1 \\ B_cD_1 & A_c & 0 \\ F_1D_1 & B_1K_2 & T+B_1K_1 \end{bmatrix}.$$

令

$$\bar{z}(t, K)=\sum_{i=1}^{n_2}\int_0^t D_1e^{A_L(K)(t-\tau)}A_3e^{A_2\tau}e_id\tau,$$

$$e_i=(0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{项}}{1},0,\cdots,0)^\tau,$$

$$J(K)=E\int_0^\infty z^\tau(\tau)Wz(\tau)d\tau=\int_0^\infty \bar{z}^\tau(t, K)W\bar{z}(t, K)dt. \tag{3.6}$$

第五步：设 K 的第 l 次估计值为 $K^{(l)}$，计算 $J(K^{(l)})$，它是参数 $K^{(l)}$ 的性能指标。

第六步：采用共轭梯度法，使 $J(K^{(l+1)})$ 为最小。

第七步：计算 $A_L(K^{(l+1)})$ 的谱点，检验 $\sigma(A_L)$ 是否都在 $\boldsymbol{C}_g$，若在，转向第八步。否则在共轭梯度方向上修改，再重复第七步，直到 $\sigma(A_L(K^{(l+1)}))\subset\boldsymbol{C}_g$。

第八步：返回第五步，直到 $|J(K^{(l+1)})-J(K^{(l)})|<\varepsilon$ 为止。

由于目标函数是二次型的，约束集是一个凸开集，式 (2.8) 的(局部)极值是存在的。

四、简化参数估计的方法

由于 RCORP 涉及多个参数的非线性最优化问题，未知参数过多时计算量很大。本节着重研究干扰对闭环输出的影响，然后给出一个仅需估计较少参数的 RCOR 的设计方案。基本模型仍采用式 (2.5)。

对状态空间 X_1 选择适当的基，(D_1, A_1, B_1) 可化为

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} \\ D_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

定义 4.1. 如果对于任何状态反馈 F,$(D_{11}, A_{11}-B_{11}F)$ 是能观的,那么称(D_{11}, A_{11}, B_{11}) 为绝对能观子系统(简记 a.o.s.)。

定义 4.2. 在 (D_1, A_1, B_1) 所有绝对能观子系统中,维数最大的子系统称为极大绝对能观子系统(简记为 m.a.o.s.)。

命题 4.3. 设系统 (4.1) 具有状态空间分解式 $X_1 = W \oplus V^*$，其中 V^* 是 $\ker D_1$ 中最大 (A_1, B_1)-不变子空间，W 是 V^* 的任一补空间,按照这样的空间分解,将系统 (D_1, A_1, B_1) 变换成形如 (4.2) 式，那么 (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 是极大绝对能观子系统.

证明略,读者可参阅文献[5]. 在下面的讨论中假定 (D_1, A_1, B_1) 已具有 (4.1) 式形式.

定义 4.4. 如果式 (4.2) 中 (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 是绝对能观的,而且存在一个 K_2，使得 $A_{12}-B_1K_2=0$,那么 (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 称为系统 (D_1, A_1, B_1) 的典范极大绝对能观子系统(简记为 c.m.a.o.s)。

经过有限步初等变换，(D_1, A_1, B_1) 中一个 c.m.a.o.s. (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 将被分离出来,这一详细过程可参阅文献[5].

引理 4.5. 如果 (D_1, A_1, B_1) 是完全的,那么它的 c.m.a.o.s. (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 在任何状态反馈下依然是完全的.

引理 4.6. 对任一状态反馈 K,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1-\lambda_i I & B_1 \\ D_1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 - B_1K - \lambda_i I & B_1 \\ D_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上两引理的证明是简单的,这里从略.

设系统 (D_1, A_1, B_1) 已变换为 (4.1) 式,那么 (2.5) 式可表为

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ D_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

引理 4.7. 在系统阵 (4.2) 中,如果 (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 是 c.m.a.o.s.，那么一定存在状态反馈 K_2，使得

1) $A_{12}-B_{11}K_2=0$;

2) 对任何 K_1,用 $K=(K_1, K_2)$ 作为式(4.2)的反馈阵,那么在 $x_1(0)=0$ 条件下,闭环系统的输出 $z(t)$ 仅仅与子闭环系统 (4.3) 有关

$$\begin{bmatrix} A_{11}-B_{11}K_1 & A_{13} & B_{11} \\ 0 & A_2 & 0 \\ D_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

证明. 由定义 4.4，1) 是显然的,下面证明 2):

如果 K_2 给定，对任何 K_1，在状态反馈 $K=(K_1, K_2)$ 下，式 (4.2) 的闭环阵为

$$\begin{bmatrix} A_{11}-B_{11}K_1 & 0 & A_{13} & B_{11} \\ A_{21}-B_{21}K_1 & A_{22}-B_{21}K_2 & A_{23} & B_{21} \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ D_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\bar{A}_{11}=A_{11}-B_{11}K_1$, $\bar{A}_{21}=A_{21}-B_{21}K_1$, $\bar{A}_{22}=A_{22}-B_{21}K_2$, 在 $x_1(0)=0$ 的条件下

$$z(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{(D_{11}, 0)\begin{pmatrix} sI-\bar{A}_{11} & 0 \\ -\bar{A}_{21} & sI-\bar{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix}(sI-A_2)^{-1}x_2(0)\right.$$

$$\left.+(D_{11}, 0)\begin{pmatrix} sI-\bar{A}_{11} & 0 \\ -\bar{A}_{21} & sI-\bar{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}\bar{u}(s)\right\}$$

$$=D_{11}\int_0^t e^{\bar{A}_{11}(t-\tau)}(A_{13}e^{A_2\tau}x_2(0)+B_{11}\bar{u}(\tau))d\tau.$$

因为所要求的控制器必须同时满足 NC-1, NC-2, 所以如果存在 K_2, 使得 $A_{12}-B_{11}K_2=0$, 且 $\sigma(A_{22}-B_{21}K_2)\subset\mathbf{C}^-$, 那么由引理 4.7 可知：最优化设计过程仅需要从子系统 (4.3) 开始. 显然这使计算量大大地减少了. 一般情况下，这样的 K_2 并不一定能获得. 在此略提一下所需命题和结论.

命题 4.8. 系统 (D_1, A_1, B_1) 存在非平凡 (A_1, B_1)-能控性子空间的充要条件是

$$\operatorname{rank} B_{11}<m(=\operatorname{rank} B_1).$$

推论 4.9. 如果 $\operatorname{Im} G=\ker B_{11}$，而且存在 K_2 使得 $A_{12}-B_{11}K_2=0$, 那么

$$\bar{R}=\langle A_1-B_1K/\operatorname{Im} B_1G\rangle=\langle\bar{A}_{22}/\operatorname{Im} B_{21}G\rangle\oplus 0$$

是 V^* 中最大 (A_1, B_1)-能控性子空间.

有了上述准备工作后，我们给出较少参数的 RCOR 的设计方法，步骤如下：

第一步：经有限步初等变换，将(2.5)式化为 (4.2) 式，其中 (D_{11}, A_{11}, B_{11}) 是 c.m.a.o.s..

第二步：找出矩阵 K_2, 使 $A_{12}-B_{11}K_2=0$. 并记 $\bar{A}_{22}=A_{22}-B_{21}K_2$.

第三步：检验 $\ker B_{11}$, 若 $\ker B_{11}=0$, 转第六步；否则找出矩阵 G，使得

$$\operatorname{rank} B_{11}=\dim(\operatorname{Im} G).$$

第四步：对 $(\bar{A}_{22}, B_{21}G)$ 进行能控典范分解，即找出 T_1, 使

$$T_1\bar{A}_{22}T_1^{-1}=\begin{pmatrix} \bar{A}_{22}^{(1)} & 0 \\ \bar{A}_{22}^{(2)} & \bar{A}_{22}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad T_1B_{21}=\begin{pmatrix} \bar{B}_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}.$$

这里 $\bar{B}_{21}G=0$, $(\bar{A}_{22}^{(3)}, B_{31}G)$ 是能控对，因而存在 F，使得 $\sigma(\bar{A}_{22}^{(3)}-B_{31}GF)\subset\mathbf{C}^-$.

第五步：作代数等价变换 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$，将系统 (D_1, A_1, B_1) 变换为 $(\tilde{D}_1, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$.

$$\tilde{A}_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}A_1\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}(oK_2)\right\}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}^{(1)} & 0 \\ A_{31} & \bar{A}_{22}^{(2)} & \bar{A}_{22}^{(3)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} \\ \bar{B}_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}(0, K_2^{(1)}, K_2^{(2)}).$$

其中
$$T_1A_2=\begin{pmatrix}\bar{A}_{21}\\ A_{31}\end{pmatrix},\ K_2T_1^{-1}=(K_2^{(1)},K_2^{(2)}),$$
$$\tilde{B}_1=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & T_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}\\ \bar{B}_{21}\\ B_{31}\end{pmatrix},$$
$$\tilde{D}_1=(D_{11},0)\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & T_1^{-1}\end{pmatrix}=(D_{11},0,0).$$
则系统 $(\tilde{D}_1,\tilde{A}_1,\tilde{B}_1)$ 也满足引理 2.1 的所有条件.

第六步：找出矩阵 T,使得
$$T\bar{A}_{22}^{(1)}T^{-1}=\begin{pmatrix}\bar{A}_{22}^{+} & 0\\ 0 & \bar{A}_{22}^{-}\end{pmatrix},\quad T\bar{B}_{21}=\begin{pmatrix}\bar{B}_{21}^{(1)}\\ \bar{B}_{21}^{(2)}\end{pmatrix}.$$
其中 $\sigma(\bar{A}_{22}^{+})\subset\boldsymbol{C}^{+}$, $\sigma(\bar{A}_{22}^{-})\subset\boldsymbol{C}^{-}$.

如果直接从第二步转来，则 $\bar{A}_{22}^{(1)}=A_{22}$, $\bar{B}_{21}=B_{21}$. 于是代数等价变换 $\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & T & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}$,
将系统 $(\tilde{D}_1,\tilde{A}_1,\tilde{B}_1)$ 变换为 $(\tilde{\tilde{D}}_1,\tilde{\tilde{A}}_1,\tilde{\tilde{B}}_1)$.
$$\tilde{\tilde{A}}_1=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & 0 & 0\\ A_{21}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{+} & 0 & 0\\ A_{21}^{(2)} & 0 & \bar{A}_{22}^{-} & 0\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \bar{A}_{22}^{(3)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}\\ \bar{B}_{21}^{(1)}\\ \bar{B}_{21}^{(2)}\\ B_{31}\end{pmatrix}(0,K_{22}^{(1)},K_{22}^{(2)},K_2^{(2)})$$
$$=\begin{bmatrix}A_{11} & B_{11}K_{22}^{(1)} & B_{11}K_{22}^{(2)} & B_{11}K_2^{(2)}\\ A_{21}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{+}+\bar{B}_{21}^{(1)}K_{22}^{(1)} & \bar{B}_{21}^{(1)}K_{22}^{(2)} & \bar{B}_{21}^{(1)}K_2^{(2)}\\ A_{21}^{(2)} & \bar{B}_{21}^{(2)}K_{22}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{-}+\bar{B}_{21}^{(2)}K_{22}^{(2)} & \bar{B}_{21}^{(2)}K_2^{(2)}\\ A_{31} & A_{32}+B_{31}K_{22}^{(1)} & A_{33}+B_{31}K_{22}^{(2)} & \bar{A}_{22}^{(3)}+B_{31}K_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$
其中 $T\bar{A}_{21}=\begin{pmatrix}A_{21}^{(1)}\\ A_{21}^{(2)}\end{pmatrix}$, $\bar{A}_{22}=(A_{32},A_{33})$, $K_2^{(1)}T^{-1}=(K_{22}^{(1)},K_{22}^{(2)})$;
$$\tilde{\tilde{B}}_1=\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & T & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},\quad \tilde{\tilde{B}}_1=\begin{pmatrix}B_{11}\\ T\bar{B}_{21}\\ B_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}\\ \bar{B}_{21}^{(1)}\\ \bar{B}_{21}^{(2)}\\ B_{31}\end{pmatrix},\quad \tilde{\tilde{D}}_1=(D_{11},0,0,0);$$
$(\tilde{\tilde{D}}_1,\tilde{\tilde{A}}_1,\tilde{\tilde{B}}_1)$ 仍然满足引理 2.1 的所有条件.

第七步：对系统 $(\tilde{\tilde{A}}_1,\tilde{\tilde{B}}_1)$ 取反馈阵 $\bar{K}=(0,K_{22}^{(1)},K_{22}^{(2)},K_2^{(2)}+GF)$，则所得的闭环系统矩阵为
$$\tilde{\tilde{A}}_1-\tilde{\tilde{B}}_1\bar{K}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0 & 0\\ A_{21}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{+} & 0 & 0\\ A_{21}^{(2)} & 0 & \bar{A}_{22}^{-} & 0\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \bar{A}_{22}^{(3)}-B_{31}GF\end{bmatrix}. \tag{4.4}$$
由引理 4.7,对式 (4.4),它的输出仅依赖于子系统

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} & B_{11} \\ 0 & A_2 & 0 \\ D_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而且这时闭环系统的谱为

$$\sigma\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{+} \end{pmatrix}\right\} \dot{\cup} \sigma\left\{\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{22}} & 0 \\ A_{33} & \bar{A}_{22}^{(3)} - B_{31}GF \end{pmatrix}\right\}.$$

其中 $\sigma\left\{\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{22}} & 0 \\ A_{33} & \bar{A}_{22}^{(3)} - B_{31}GF \end{pmatrix}\right\} \subset \boldsymbol{C}^{-}$.

这样,满足 NC-1, NC-2 的 Robust 控制器(RCOR)只需在子系统

$$\left\{(D_{11}, 0), \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21}^{(1)} & \bar{A}_{22}^{+} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} \\ \bar{B}_{21}^{(1)} \end{pmatrix}\right\} \tag{4.5}$$

上进行设计.

第八步: 对系统 $(\tilde{\tilde{D}}_1, \tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{B}}_1)$ 设计一个状态观测器，并用第三节中给出的最优化算法,对子系统(4.5)设计 RCOR,记 RCOR 的最优反馈阵 K^*,取 $K = K^* + \bar{K}$ 作为满足 NC-1, NC-2 的 Robust 控制器的反馈阵,这样就得到了一个满足 NC-1,NC-2 的 Robust 控制器.

上述设计步骤尚未将被估计的参数个数简化到最低限度. 通过其它途径，如果用最小阶动态补偿器，可使被估计参数个数进一步减少. 这是另一个值得深入探讨的问题.

参 考 文 献

[1] 王家声、郑毓蕃,计算机控制力学持久机炉温的数学模型，自动化学报 **5**(1979), 6—14.
[2] Davison, E. J., The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, *IEEE Trans. Automat. Control*, *AC*-**21** (1976), 14—24.
[3] Wonham, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, New York, (1979).
[4] 韩京清、许可康,用状态反馈实现稳定的抗干扰性,中国科学A辑,第10期，1982年.
[5] 陈树中、郑毓蕃,极大绝对能观子空间及它的规范形式,华东师范大学学报,自然科学版，1984年第四期.

A NEW CRITERION AND APPROACH TO THE DESIGN OF A ROBUST CONTROLLER

Zheng Yufan Wang Ke
(East-China Normal University)

Abstract

The robust controller with optimal output regulation is discussed. The concept of absolutely observable subsystem is used to study the effects of disturbance upon a closedloop system output. After splitting properly an absolutely observable subsystem from the basic system, the optimization of output regulation can be simplified if some extraconditions are satisfied.

An algorithm for the whole procedure introduced above is advanced.