

# 典型无静差系统的多重最优控制

夏 义 诗

(上海科学技术大学)

## 摘 要

本文讨论典型无静差系统的三项常规性能指标(稳态精度、响应速度和相角稳定裕量)综合最优和一项常规性能指标(相角稳定裕量)最优的条件,在此基础上,用状态空间法推导出系统的单位阶跃响应的解析公式,举例用最优化控制理论设计系统,以实现系统在常规性能指标综合最优的条件下,线性二次型性能指标最优的多重最优控制。

开环系统传递函数等于  $G(s) = \frac{K(kTs + 1)}{s^2(Ts + 1)}$  的典型无静差系统,早已广泛地应用于工业大功率调速、温控和随动系统。对本系统实现多重最优控制,无论是对于提高本系统的性能,还是对提高设计工作的效率,都将具有颇大的作用。

## 一、系统的闭环传递函数、框图和方程

系统的闭环传递函数要分两种情况:比例微分环节  $(kTs + 1)$  在反馈通道和在前馈通道。对应的闭环传递函数分别为

$$\begin{cases} \Phi_1(s) = \frac{K/T}{s^3 + s^2/T + KkS + K/T}, \\ \Phi_2(s) = \frac{K(kTs + 1)/T}{s^3 + s^2/T + KkS + K/T}. \end{cases} \quad (1)$$

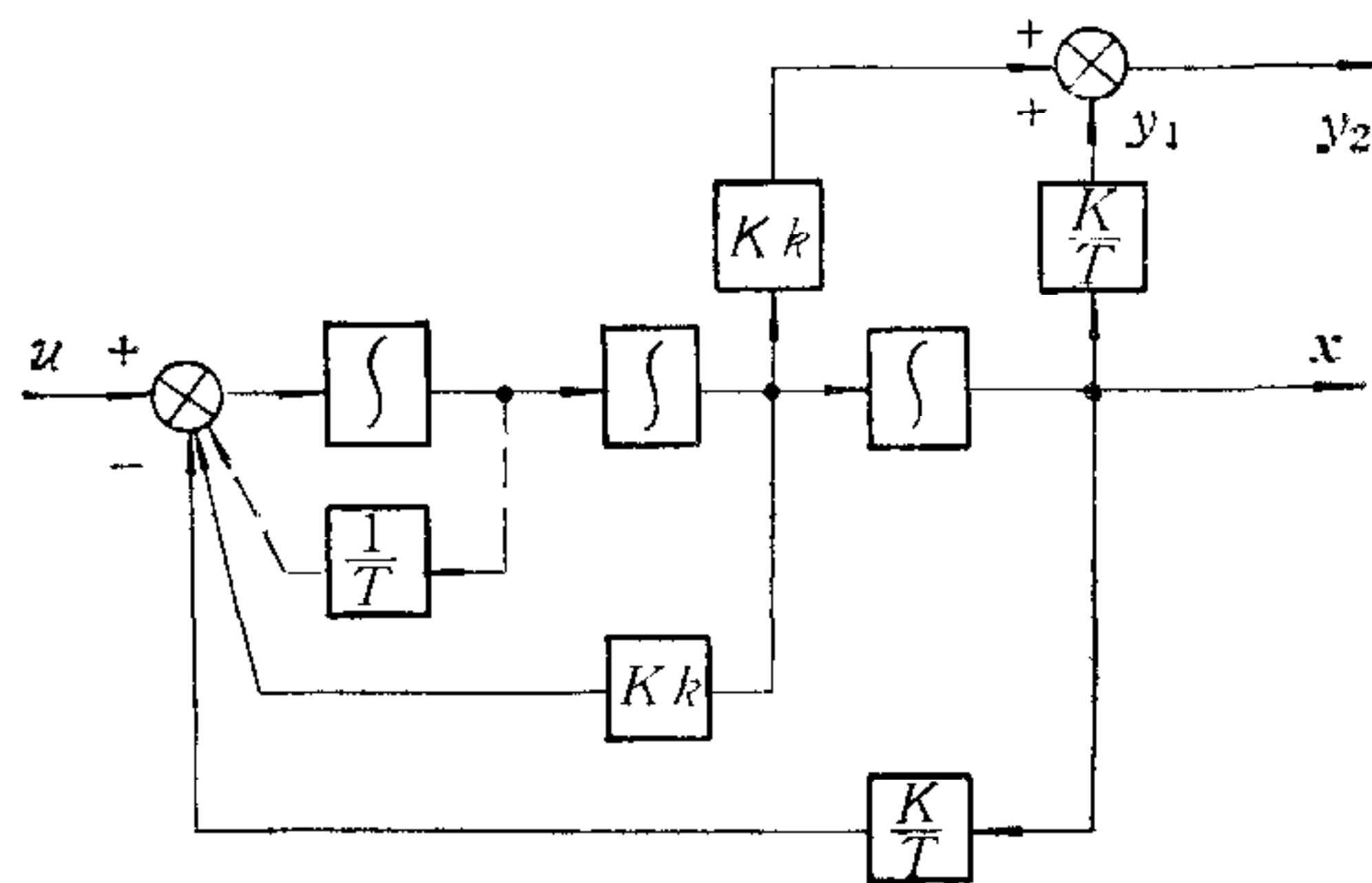


图 1

由以上两式, 不难画出系统的状态结构框图, 如图 1 所示. 在此图中,  $1/T$  是开环传递函数中固有惯性环节构成的状态反馈系数. 要选取状态反馈的另外两个系数, 使系统的常规性能指标最优.

由图 1 可以很容易地列写出系统的状态方程和输出方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B u, \\ \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}, \\ \mathbf{y}_2 = C_2 \mathbf{x} \end{cases} \quad (2-a)$$

式中状态矩阵  $A$ 、控制矩阵  $B$  和输出矩阵  $C_1$ 、 $C_2$  分别为:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K/T & -Kk & -1/T \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_1 = (K/T, 0, 0), C_2 = (K/T, Kk, 0). \end{cases} \quad (2-b)$$

## 二、常规性能指标最优分析

设闭环的实极点为  $-1/xT$ , 一对共轭复极点为  $-\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_0$ , 则可以引用文献[1]的结果, 列写出开环和闭环传递函数的参数关系如下:

$$\begin{cases} K = \frac{x-1}{x^2(k-x)T^2}, \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{x-1}{x(k-x)}} \frac{1}{T}, \\ \xi = \sqrt{\frac{(k-x)(x-1)}{4x}}. \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\omega_0$  为闭环系统的非衰减自然振荡频率;  $\xi$  为闭环系统的阻尼比;  $K$  代表系统的稳态精度和响应速度;  $\xi$  代表系统的相角稳定裕量, 从而  $K\xi^2$  就综合地代表系统的上述三项性能指标. 分析  $K\xi^2$  就可以求得三项常规性能指标综合最优的条件.

由 (3) 式得

$$K\xi^2 = \frac{(x-1)^2}{4x^3T^2},$$

再解

$$\frac{\partial(K\xi^2)}{\partial x} = 0,$$

得

$$x = 3.$$

将它代入 (3) 式, 得三项常规性能指标综合最优的条件或基本公式如下:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{27 \cdot \xi^2} \cdot \frac{1}{T^2}, \\ k = 6\xi^2 + 3, \\ \xi\omega_0 = 1/x = 1/3. \end{cases} \quad (4)$$

笔者已经论证过, 本类系统相角稳定裕量  $r^0$  最优, 与阻尼比  $\xi$  值最优是等价的<sup>1)</sup>. 因此, 阻尼比最优就表示相角稳定裕量最优.

由 (3) 式, 解

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

可以求得

$$x = \sqrt{k}$$

和阻尼比  $\xi$  的极大值

$$\xi_m = \frac{1}{2} (\sqrt{k} - 1).$$

将它们代入 (3) 式, 得相角稳定裕量最优的条件或基本公式如下:

$$\begin{cases} k = (2\xi_m + 1)^2, \\ K = \frac{1}{(2\xi_m + 1)^3 T^2}, \\ \omega_0 = \frac{1}{(2\xi_m + 1)T}. \end{cases} \quad (5)$$

### 三、单位阶跃响应公式

由 (2) 式可解出系统的单位阶跃响应

$$y_1(t) = (K/T, 0, 0) \int_0^t e^{A(t-\zeta)} \cdot B \cdot 1(t) d\zeta,$$

$$y_2(t) = (K/T, Kk, 0) \int_0^t e^{A(t-\zeta)} \cdot B \cdot 1(t) d\zeta.$$

为了方便起见, 对  $\mathbf{x}(t)$  作满秩线性变换

$$\bar{\mathbf{x}} = P^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3$  是矩阵  $A$  的三个特征值, 在三项常规性能指标最优条件下, 它们分别等于

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3T},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3T} + j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{3\xi T},$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{3T} - j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{3\xi T}.$$

在相角稳定裕量最优条件下, 它们分别等于

1) 参见上海市自动化学会 1983 年年会论文“典型反馈系统的动态指标曲线和频域、时域参数”。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{(2\xi_m + 1)T}, \\ \lambda_2 &= -\frac{\xi_m}{(2\xi_m + 1)T} + j\frac{\sqrt{1 - \xi_m^2}}{(2\xi_m + 1)T}, \\ \lambda_3 &= -\frac{\xi_m}{(2\xi_m + 1)T} - j\frac{\sqrt{1 - \xi_m^2}}{(2\xi_m + 1)T}.\end{aligned}$$

在上述满秩线性变换下,状态方程和输出方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{A}\mathbf{x} + \bar{B}u,$$

$$\mathbf{y}_1 = \bar{C}_1\mathbf{x},$$

$$\mathbf{y}_2 = \bar{C}_2\mathbf{x}.$$

式中

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = P^{-1}B = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_1 = C_1P = (K/T, K/T, K/T),$$

$$\bar{C}_2 = C_2P = (K/T + Kk\lambda_1, K/T + Kk\lambda_2, K/T + Kk\lambda_3).$$

而对应的状态转移矩阵为

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

从而可以列写出

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \bar{C}_1\bar{X} = \left(\frac{K}{T}, \frac{K}{T}, \frac{K}{T}\right) \int_0^t e^{\bar{A}(t-\zeta)} \cdot \bar{B} \cdot 1(t)d\zeta \\ &= \frac{\left(\frac{K}{T}, \frac{K}{T}, \frac{K}{T}\right)}{|P|} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1} (1 - e^{\lambda_1 t}) \\ \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{\lambda_2 t}) \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3} (1 - e^{\lambda_3 t}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

将三项常规性能指标综合最优条件下矩阵  $A$  的三个特征值代入上式,可以求得系统  $\Phi_1(S)$  综合最优时的单位阶跃响应的解析公式如下:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 - \xi^2} e^{-\frac{t}{3T}} [1 - \xi \cos(\omega t + \varphi)]. \quad (6)$$

式中

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{3\xi T}; \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}.$$

将相角稳定裕量最优条件下矩阵  $A$  的三个特征值代入  $y_1(t)$  的表达式, 可以求得系统  $\Phi_1(S)$  在相角稳定裕量最优条件下单位阶跃响应的解析公式如下:

$$y_1(t) = 1 - \frac{e^{\frac{-t}{(2\xi_m+1)T}}}{2(1-\xi_m)} + e^{\frac{-\xi_m t}{(2\xi_m+1)T}} \left[ \frac{2\xi_m - 1}{2(1-\xi_m)} \cos \omega t + \frac{2\xi_m^2 - \xi_m - 1}{2(1-\xi_m)\sqrt{1-\xi_m^2}} \sin \omega t \right]. \quad (7)$$

式中  $\omega = \sqrt{1-\xi_m^2}/(2\xi_m+1)T$ .

在以上的基础上, 利用  $y_2(t)$  与  $y_1(t)$  的关系,

$$y_2(t) = y_1(t) + kTy_1(t)$$

不难列写出系统  $\Phi_2(S)$  (即二阶无静差系统) 分别在三项常规性能指标综合最优和相角稳定裕量最优条件下, 单位阶跃控制信号的时间响应的解析公式如下:

$$y_2(t) = 1 - \frac{e^{\frac{-t}{3T}}}{(1-\xi^2)} [(2\xi^2+1) \cos \omega t - \xi \cos(\omega t + \varphi) - 2\xi^2] \quad (8)$$

和

$$y_2(t) = 1 + \frac{\xi_m}{1-\xi_m} e^{\frac{-t}{(2\xi_m+1)T}} - \frac{1}{1-\xi_m} e^{\frac{-\xi_m t}{(2\xi_m+1)T}} \cos \omega t. \quad (9)$$

在  $\xi_m = 0.5$  的特例下,  $k = 4$ ,  $K = 1/8T^2$ . 这时的

$$y_1(t) = 1 - e^{\frac{-t}{2T}} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{-t}{4T}} \sin \frac{\sqrt{3}}{4T} t,$$

$$y_2(t) = 1 + e^{\frac{-t}{2T}} - 2e^{\frac{-t}{4T}} \cos \frac{\sqrt{3}}{4T} t.$$

与文献 [2] 的结论完全相同.

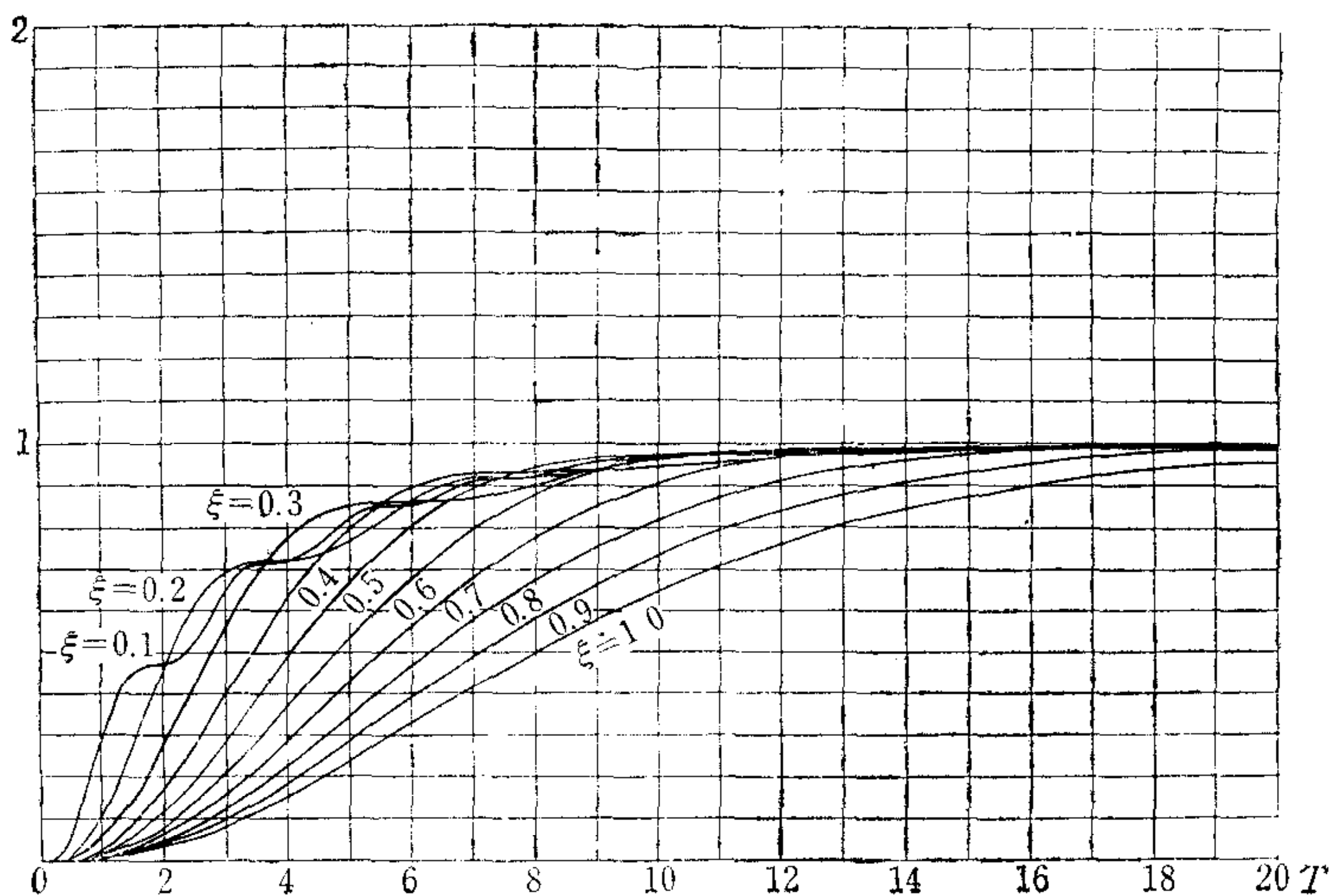


图 2

图 2 和图 3 分别是系统  $\Phi_1(S)$  和  $\Phi_2(S)$  (前者为一阶无静差系统) 在三项常规性能指标综合最优条件下, 典型单位阶跃响应的示意图. 由图可见系统  $\Phi_1(S)$  的响应是无超调的. 显然, 这种无超调的性能, 对于任何被控对象是相当可贵的.

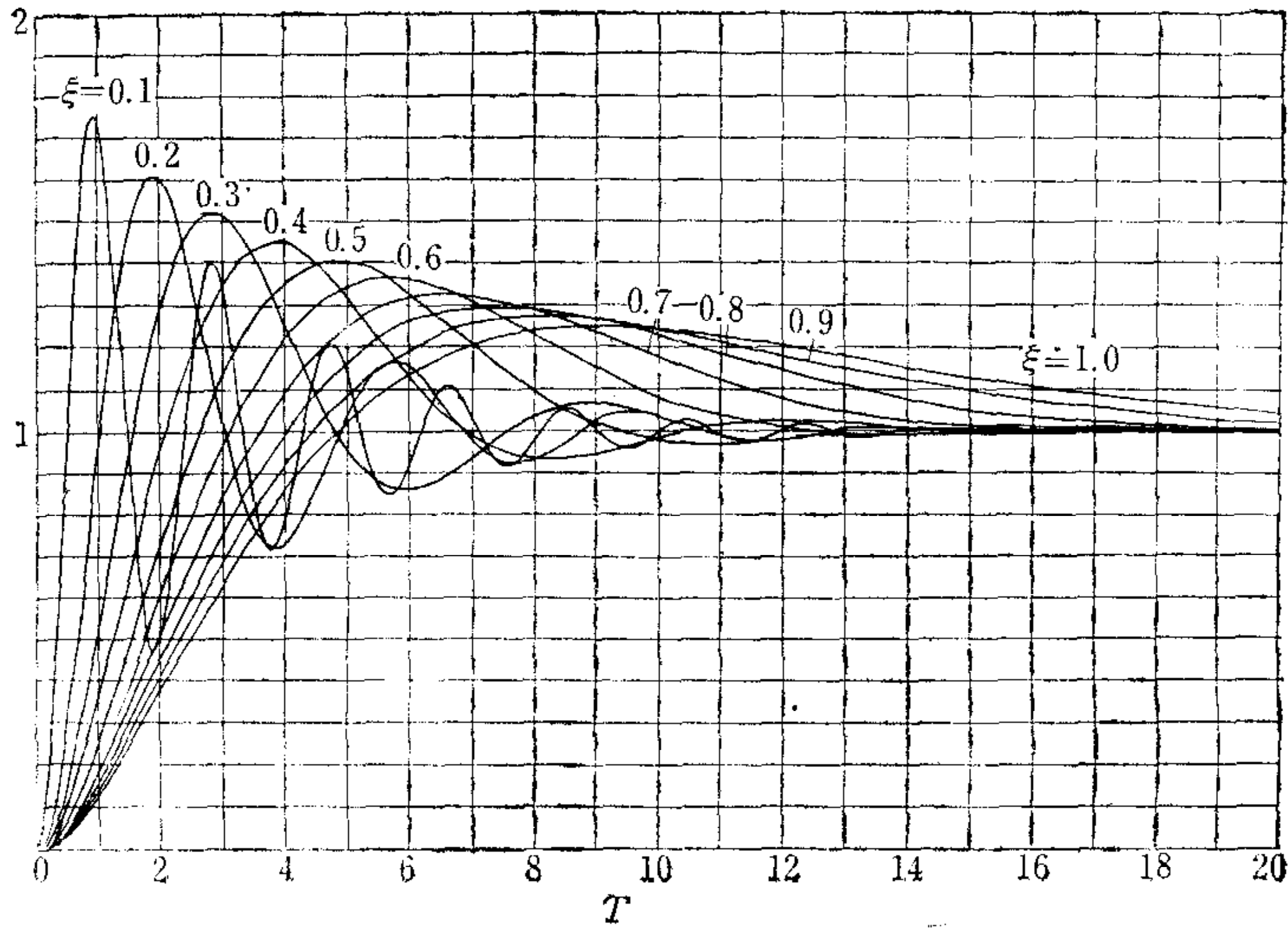


图 3

表 1 所示是系统  $\Phi_1(s)$  和  $\Phi_2(s)$  的部分性能指标数据

表 1

系 统	$\Phi_1(s)$			$\Phi_2(s)$			
	$t_r/T$	$\sigma\%$	$t_s/T$	$t_r/T$	$t_p/T$	$\sigma\%$	$t_s/T$
0.1	6.3	0	12.0	0.4	1.0	75	11.5
0.2	5.6	0	12.3	0.8	2.0	61.5	11.8
0.3	6.7	0	11.0	1.2	3.0	52.2	10.2
0.4	4.6	0	11.5	1.6	3.9	45.6	13.2
0.5	5.3	0	13.7	1.9	4.9	40.6	11.8
0.6	6.3	0	10.8	2.3	5.8	36.5	11.5
0.7	7.5	0	12.7	2.6	6.7	33.0	14.3
0.8	9.0	0	15.3	2.9	7.5	30.0	17.3
0.9	10.7	0	18.6	3.2	8.3	27.3	20.4
0.9999	12.5	0	22.1	3.34	8.9	25.1	23.3

### 四、工程实例

例 1. 已知某随动系统的固有开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(0.9s + 1)(0.007s + 1)}$$

试选择串联校正环节及其参数,使系统满足下述性能指标: (1) 开环放大系数  $K_0 \geq 250$  毫秒<sup>-2</sup>, (2) 无超调量, (3) 调节时间  $t_s \leq 250$  毫秒.

解: 按无超调量系统  $\Phi_1(s)$  来设计串联校正环节,以保证设计要求 (2) 得到满足. 在前馈通道中选用串联校正环节  $G_c(s) = (0.9s + 1)(0.007s + 1)/s(0.02s + 1)$ , 在反馈通道中选用串联反馈环节  $H(s) = (k \times 0.02s + 1)$ , 使校正后系统的闭环传递函数等于

$$\Phi_1(s) = \frac{K_0}{s^2(0.02s + 1) + K_0(k \times 0.02s + 1)}$$

查图 2 所示系统  $\Phi_1(s)$  的单位阶跃响应曲线,可知阻尼比  $\xi = 0.6$  时的响应既快又平稳,从而选取  $\xi = 0.6$ . 将它代入公式  $k = 6\xi^2 + 3$ , 得  $k = 5.16$ . 再查表 1, 得  $t_s \doteq 11 \times T = 11 \times 20$  毫秒 = 220 毫秒,能满足设计要求(3). 将  $x = 3$ 、 $k = 5.16$  和  $T = 0.02$  秒代入基本公式

$$K_0 = \frac{x - 1}{x^2(k - x)T^2},$$

可求得  $K_0 \doteq 257$  秒<sup>-2</sup>. 显然它能满足设计要求(1).

**例 2.** 在上例的基础上,试选取系统的参数,使系统除满足上例所提设计要求外,还要对单位阶跃控制信号最优跟踪,即使线性二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt = \int_0^{\infty} [1(t) - y_1(t)]^2 dt = \text{最小}.$$

解: 本系统以  $e(t) = 1(t) - y_1(t)$  为输出信号时的传递函数为

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi_1(s) = \frac{s^3 + \frac{1}{T}s^2 + Kks}{s^3 + \frac{1}{T}s^2 + Kks + \frac{K}{T}}.$$

在控制信号  $u(t) = 1(t)$  的条件下,误差响应  $e(t)$  等价于状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K/T & -Kk & -1/T \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

在初始条件  $\mathbf{x}^T(0) = (1, 0, 0)$  下的解. 由于系统是可控的和渐近稳定的,可以套用最优控制理论的李雅普诺夫方法. 因此,有

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} dt = \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0).$$

为简单起见,  $Q$  阵可设定为么阵,  $P$  设定为

$$P = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.$$

将它们代入矩阵方程

$$PA + A^T P = Q,$$

可解出

$$J = a = \frac{k_1^2 + k_1 + 1}{2(k_1)(k - 1)} + \frac{k}{2}.$$

式中

$$k_1 = \frac{1}{27\xi^2}; \quad k = 6\xi^2 + 3.$$

最后解

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0,$$

可求得

$$\xi \doteq 0.185$$

将它代入基本参数公式,可以求得  $k \doteq 3.02$ ,  $K_0 \doteq 2700/\text{秒}^2$ .

## 参 考 文 献

- [1] 夏义诗, 典型反馈系统的分析与综合, 《上海科技大学报》, 1980.2.  
 [2] 陈广洲, 电子最佳调节理论, 《电气传动》, 1973.4.

## MULTI-OPTIMAL CONTROL OF TYPICAL NON-STATIC ERROR SYSTEMS

YIA YISHI

(Shanghai University of Science and Technology)

### ABSTRACT

In this paper, multi-optimal control of typical nonstatic error systems are discussed, in which the three conventional performance indexes are complex optimal. Time responses are deduced by the state-space method of modern control theory. In the examples, these systems are designed to realize multi-optimal control, using the optimal control theory.

## 《自动化学报》征稿简则

一、本刊是自动化科学和技术的综合性学术刊物, 读者对象主要是从事自动化科学技术工作的科研、教学和工程技术人员, 本刊为双月刊, 国内外公开发行。

二、本刊刊载下列内容稿件: 1. 控制理论、系统科学、信息科学; 2. 自动化科学技术在工程、社会经济、生物医学等方面的应用; 3. 计算机技术在自动化科学技术中的应用, 办公室自动化、计算机辅助设计、计算机辅助制造、计算机图形学等及系统仿真; 4. 自动检测仪表、调节装置、控制设备; 5. 系统工程、大系统理论与综合自动化; 6. 模式识别、人工智能及机器人生物控制论; 7. 遥测、遥控、遥感技术在自动化系统中的应用。

本刊主要刊载代表我国自动化科学技术水平的学术论文、短文、研究简报及综述性文章, 也刊登学术动态、评论、书刊评介、问题讨论、通讯等。

### 三、来稿要求及注意事项:

1. 来稿要求论点明确、文字精炼、数据可靠。一般定稿时论文不得超过 6000 字; 短文不得超过 3000 字; 综述不得超过 10000 字(字数包括中、英文摘要、参考文献和图表), 插图一般不超过 5 幅。研究简报、问题讨论、动态报道等均要求尽量简单明了。文中有关计量单位、名词术语要前后统一。

2. 文献按文中出现先后为序排列。文献如为期刊, 按〔编号〕, 作者(外文姓在前), 文章题目, 期刊名(外文可缩写), 卷号(年份)期号, 页码顺序排列。文献若为图书, 则按〔编号〕, 作者, 书名, 版次(初版不写), 出版单位, 地点, 年份, 页码顺序排列, 外文摘要及外文参考文献请用打字机间行打出, 或用印刷体书写。

3. 文章要附中、英文摘要(300字以内)、英文标题及作者工作单位(地名用汉语拼音), 汉语拼音的作者姓名。

4. 来稿如有泄漏国家机密、数据不可靠、抄袭、剽窃等不良作风, 由作者本人负责。

四、来稿刊登与否由编委会最后审定, 并有权对来稿做适当文字删改, 或退请作者删改, 来稿一经发表, 按篇酌致稿酬, 并赠送单行本 30 份, 稿件不得一稿双投, 不拟刊登的文稿, 一般情况在半年内退还。

五、来稿必须符合本简则要求, 并一式两份用 16 开稿纸书写, 字迹要清晰。油印稿一律不收。稿件请寄北京中关村中国科学院自动化研究所《自动化学报》编辑部。