第 13 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 13, No. 1
1987 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1987

只估计 AR 参数的 ARMA(p,q) 谱估计的新算法

黄俊钦 余辉里
(北京航空学院)

摘 要

本文提出一种估计自回归 AR 参数的新算法. 新算法采用递推 Householder 变换算法. 文中给出了 ARMA(4, 4) 仿真计算例子及两个正弦加白噪声的仿真计算结果，并与最小二乘法的计算结果进行了比较. 结果表明新算法在分辨率和估计质量方面均优于最小二乘法和已有的谱估计方法，也说明用提高算法稳定性的方法可解决负谱问题和提高谱估计质量.

一、前 言

最近几年，对于只估计 AR 参数的 ARMA (p, q) 谱估计方法，国内外都有人做了许多探讨和研究[2-5]. 文献 [1] 中作者修正了文 [3] 和 [4] 中存在的错误，推导出一种只估计 AR 参数的 ARMA (p, q) 谱估计公式，同时指出文献[5]中谱估计公式的局限性.

本文提出估计 AR 参数的新算法，用它估计出 AR 参数后，运用文献[1]中的公式估计 ARMA (p, q) 功率谱密度. 新算法采用稳定性较好的递推 Householder 算法，初步讨论了模型阶次 p 与 q 的选择方法和负谱问题.

为了说明算法稳定性对谱估计质量的影响，文中的三个仿真计算的例题都同时采用本算法和传统最小二乘法计算，计算结果都说明本算法的谱估计质量较好，而且没有出现负谱. 在一个双正弦加白噪声的例子中最小二乘法的计算结果中出现了负谱. 在另一个双正弦加白噪声的仿真计算题例中，采用文献 [2] 中的谱估计公式，其估计质量比本方法的估计质量差.

在双正弦加白噪声的仿真计算中例 1 的两个正弦信号的频率分别为 $f_1 = 0.25$ Hz, $f_2 = 0.30$Hz. 例 2 中 $f_1 = 0.2$Hz, $f_2 = 0.21$Hz. 本算法的计算结果都较准确地出现双峰，而用传统最小二乘法和文献 [2] 中的谱估计公式计算的结果都分辨不出双峰，说明本文提出的算法的分辨率较高.

二、只估计 AR 参数的 ARMA(p, q) 谱估计公式

ARMA(p, q) 过程可用下式表示:

本文于 1985 年 3 月 15 日收到.

$$x(n) = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x(n-i) + \sum_{i=0}^{q} \beta_i \omega(n-i). \tag{1}$$

式中 $\{\omega(n)\}$ 是白噪声过程；$\{x(n)\}$ 是随机过程的样本值(时间序列)；$\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ 是待定参数.

(1) 式两边同乘以 $x(n-k)$，并取数学期望后得

$$R(k) + \alpha_1 R(k-1) + \cdots + \alpha_p R(k-p) = 0.$$

式中 $R(k) \triangleq E[x(n)x(n-k)]$，$k > q$，$1 \leqslant q \leqslant p$.

上式又可变为

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i R(k+q-i) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

由文[1]可知只估计 AR 参数的 ARMA(p, q) 谱估计公式为

$$p(\omega) = 2\Delta t \mathrm{Re}\{S(\omega)\} - R(0)\Delta t, \tag{3}$$

$$S(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^{p} \mathrm{sgn}(q-l-1) \sum_{k=u(l-q-1)}^{l-q-u(l-g-1)} \alpha_l R(k+q-l) e^{-j\omega(k+q)\Delta t}}{\sum_{l=0}^{p} \alpha_l e^{-j\omega l\Delta t}}. \tag{4}$$

三、只估计 AR 参数的 ARMA 谱估计的新算法

由 (3) 与 (4) 式求出 ARMA(p, q) 谱估计,尚需考虑 $\{R(m)\}$ 与 $\{\alpha_i\}$ 的估计、阶次 (p,q) 的判定以及谱估计结果的非负性等问题,这样才能构成一种完整的 ARMA(p, q) 谱估计算法.

1. $\{R(m)\}$ 和 $\{\alpha_i\}$ 的估计

由时间序列 $\{x(n), n = 0, 1, \cdots, N-1\}$ 用下式估计 $R(m)$:

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), \quad |m| \leqslant N-2L. \tag{5}$$

式中 $L > p$ 为预先假设可能出现的最大阶次.

在 (2) 式中取 $k = 1, \cdots, N-2L-q$，并用 L 代替 p，$\hat{R}(m)$ 代替 $R(m)$，得到矩阵方程

$$RA = E.$$

$$R = \begin{bmatrix} \hat{R}(q+1-L) & \hat{R}(g+2-L)\cdots\hat{R}(g+1) \\ \hat{R}(q+2-L) & \hat{R}(g+3-L)\cdots\hat{R}(g+2) \\ \vdots & \vdots \\ \hat{R}(N-3L) & \hat{R}(N-3L+1)\cdots\hat{R}(N-2L) \end{bmatrix}; \ A = \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_{L-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

式中 E 为 $(L+1)$ 维误差向量，表示用 $\hat{R}(m)$ 代替 $R(m)$ 引入的误差. 本文用 Hourseholder 变换递推算法(简称H法)求 (6) 式的 AR 参数估计. 假设对 R 阵做 $(M+1)$ 次 H 变换后,判定模型阶次为 M,则 AR 参数估计可以由下式解出[10]:

$$R_M\hat{A}_M = Z_M, \tag{7}$$

$$\hat{A}_M \triangleq [\hat{a}_M, \cdots \hat{a}_1]^T. \tag{8}$$

R_M, Z_M 由下式定义:

$$H_{M+1}R = \left[\begin{array}{c|c|c} R_M & -Z_M & C_1 \\ \hline 0 & d_{M+1} & C_2 \\ \hline 0 & 0 & C_3 \end{array}\right]; \quad R_M = \begin{bmatrix} d_1 & \times \cdots \times \\ & d_2 & \vdots \\ & & \ddots \times \\ 0 & & & d_M \end{bmatrix}. \tag{9}$$

2. 阶次 p, q 的判定

为了讨论方便起见,先假设 q 已经选定,考虑 p 的阶次判定问题. (9)式中的 d_M^2 就是模型的 $(M-1)$ 阶残差平方和 $J(M-1)$[10]. 用 FPE 判阶准则[7,8]

$$\text{FPE}(m) = \frac{N+m-1}{N-m-1} d^2(m+1), \tag{10}$$

$$\text{FPE}(\hat{m}) = \min_m \text{FPE}(m), \quad m = 0, 1, \cdots, L-1$$

进行阶次的递推判定,当 $\text{FPE}(m+1) > \text{FPE}(m)$ 时,便判定阶次 $p = m$. 考虑到 FPE 判阶准则有时会得出偏高的阶次,因此还用

$$\frac{|d^2(m+1) - d^2(m)|}{d^2(m)} \leqslant \mu \tag{11}$$

的判阶方法做阶次的辅助判定. 一般选取 $\mu = 0.01$, 当 (11) 式成立时,判定 $p = m$.

由 R 阵可以看出,q 的选取将直接影响到 R 阵的元素值,因此也将影响到 AR 模型的各阶残差平方和. 其零阶残差平方和 $J(0)$ 为

$$J(0) = d^2(1) = \sum_{i=1}^{N-2L-g} \hat{R}^2(q-L+i) \triangleq d_q^2. \tag{12}$$

当 q 变化时, 求和公式的项数发生变化, 自相关样本的估计 $\hat{R}(q-L+i)$ 也发生变化. 用 FPE 准则

$$\text{FPE} = \frac{N+q-1}{N-q-1} d_q^2,$$

$$\text{FPE}(\hat{q}) = \min_q \text{FPE}(q) \tag{13}$$

做 q 的阶次判定. 虽然这样做缺乏足够的理论依据, 但是在本文所做的计算中获得了成功.

p, q 的阶次判定过程可以归纳如下: (1) 构造 R 阵第一列(令 $q = 1$). 用 (12) 式计算出 d_1^2. 再令 $q = 2$, 用 (12) 式做阶次判定, 即考察 FPE(2) 与 FPE(1) 的大小. 当 $\text{FPE}(2) > \text{FPE}(1)$ 时, 判定 $\hat{q} = 1$, 否则计算 d_3^2 和 FPE(3), 比较 FPE(3) 与 FPE(2) 的大小,余此类推,直到作出 $\hat{q}$ 为止. (2) $\hat{q}$ 选定后,构造 R 阵, 做H变换的非实时递推,同时进行 p 的阶次判定. 当得到 $\hat{p}$ 时,由上三角阵便可以得到 AR 参数的回代求解.

在作正弦加白噪过程的计算时, 由于此过程相当于 ARMA(p, p) 过程[9],而且谱估计的主要任务是估计出正弦分量的频率,因此一般情况下可以不估计 p, 而直接人为地选定其一较大的 p 值,以得到较高的分辨率.

3. 负谱问题

就本文所涉及到的三种 ARMA(p, q) 谱估计公式而言，由于在推导过程中都用到了维纳-辛钦公式．因此只要 (3) 与 (4) 式中的 $R(m)$，$\{\alpha_i\}$ 为真值，则谱估计公式不会出现负谱现象．实际上，由于用 $\hat{R}(m)$ 和 $\{\hat{\alpha}_i\}$ 代替 $R(m)$ 和$\{\alpha_i\}$进行谱估计，因此无法保证谱估计公式的非负性．

文 [2] 通过双正弦信号加白噪声过程的仿真计算指出了文 [5] 中谱估计公式的负谱现象，并提出了克服负谱现象的方法．但它采用的方法也不能完全解决负谱问题，因为文 [2]中关于谱估计公式非负性的证明忽视了 $\hat{R}(m)$ 和 $\{\hat{\alpha}_i\}$ 估计值的影响．

本文用 (7) 式做 $R(m)$ 的估计，用 (13) 式做 q 的估计，用 (6) 式和H变换的非实时递推算法做 p 的估计和 AR 参数的估计，然后用 (3) 式和 (4) 式做 ARMA(p, q) 谱估计，这就是本文提出的新的 ARMA(p, q) 谱估计算法．

四、ARMA(p,q) 过程仿真计算

以文 [9] 中给出的 ARMA(4,4) 过程

$$x(n) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x(n-i) + \sum_{i=1}^{4} \beta_i \varepsilon(n-i) + \varepsilon(n),$$

$$\alpha_i(i = 1, 2, 3, 4) = +13136,\ -14401,\ +10919,\ -0.83527,$$

$$b_i(i = 1, 2, 3, 4) = 0.13137,\ 0.023543,\ 0.10775,\ 0.03516 \qquad (14)$$

为例，用计算机生成方差为 1 的零均值的高斯白噪声过程．按零初始条件用 (14) 式生成 200 个仿真数据，用新算法做 ARMA(p, q) 谱估计． 阶次判定为 $\hat{p} = 4$，$\hat{q} = 4$．计算结果与理论功率谱比较，示于图 1．图中纵坐标为对数功率谱，取为 $10\log(p(\omega))$，横坐标为归一化频率 f，$0 \leqslant f \leqslant 1/2\Delta t$，取采样间隔 $\Delta t = 1$．从图中可以看出，新算法的估

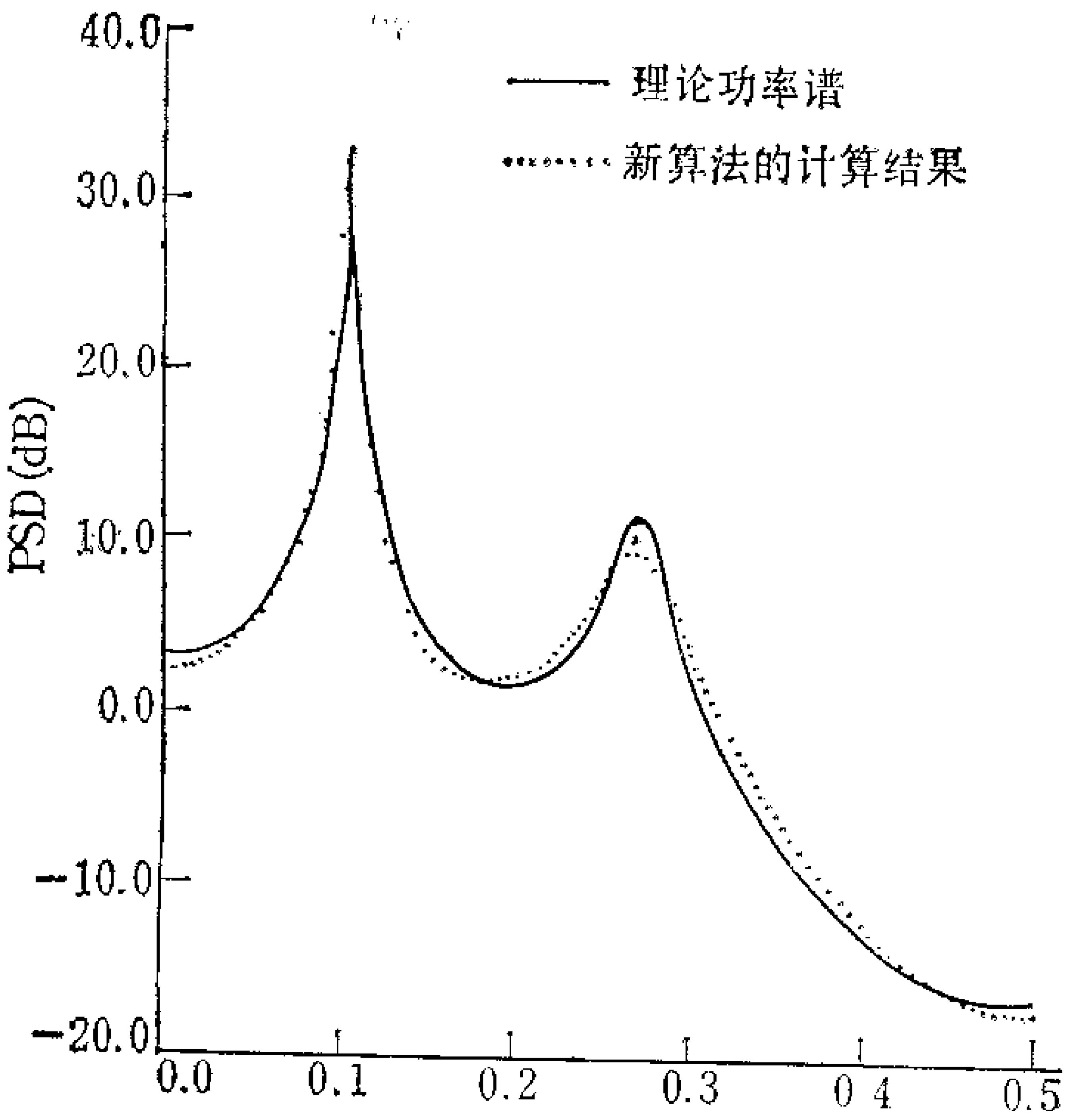


图 1 (14) 式仿真计算的结果

——理论功率谱；‥‥新算法的计算结果

计结果与理论功率谱还是比较接近的.

为了说明算法稳定性对谱估计质量的影响,对例 1 再用 Gouss 按列选主元消去法(简记为G法)求出 AR 参数估计. 表 1 中列出两种方法求出的参数估计值. 由表 1 可看出：数字病态和算法稳定性对模型参数与谱估计质量均有较大的影响.

表 1　两种算法 AR 参数估计结果的比较

估计值 \ 理论值		$\alpha_1=1.3136$	$\alpha_2=-1.4401$	$\alpha_3=1.0919$	$\alpha_4=-0.83527$
例 1	H法	1.4345	−1.4955	1.0623	−0.7635
	G法	1.8616	−2.0084	1.2125	−0.5930

五、双正弦信号加白噪声的仿真计算

双正弦信号加白噪声的例子主要是为了考察算法的分辨率和频率估计的偏差量，并进一步说明算法稳定性和数值计算的病态问题对谱估计质量和负谱现象的影响.

例 1.　双正弦加白噪声过程的表示式如下：

$$x(n)=a_1\sin(2\pi f_1 n\Delta t)+a_2\sin(2\pi f_2 n\Delta t)+e(n). \tag{15}$$

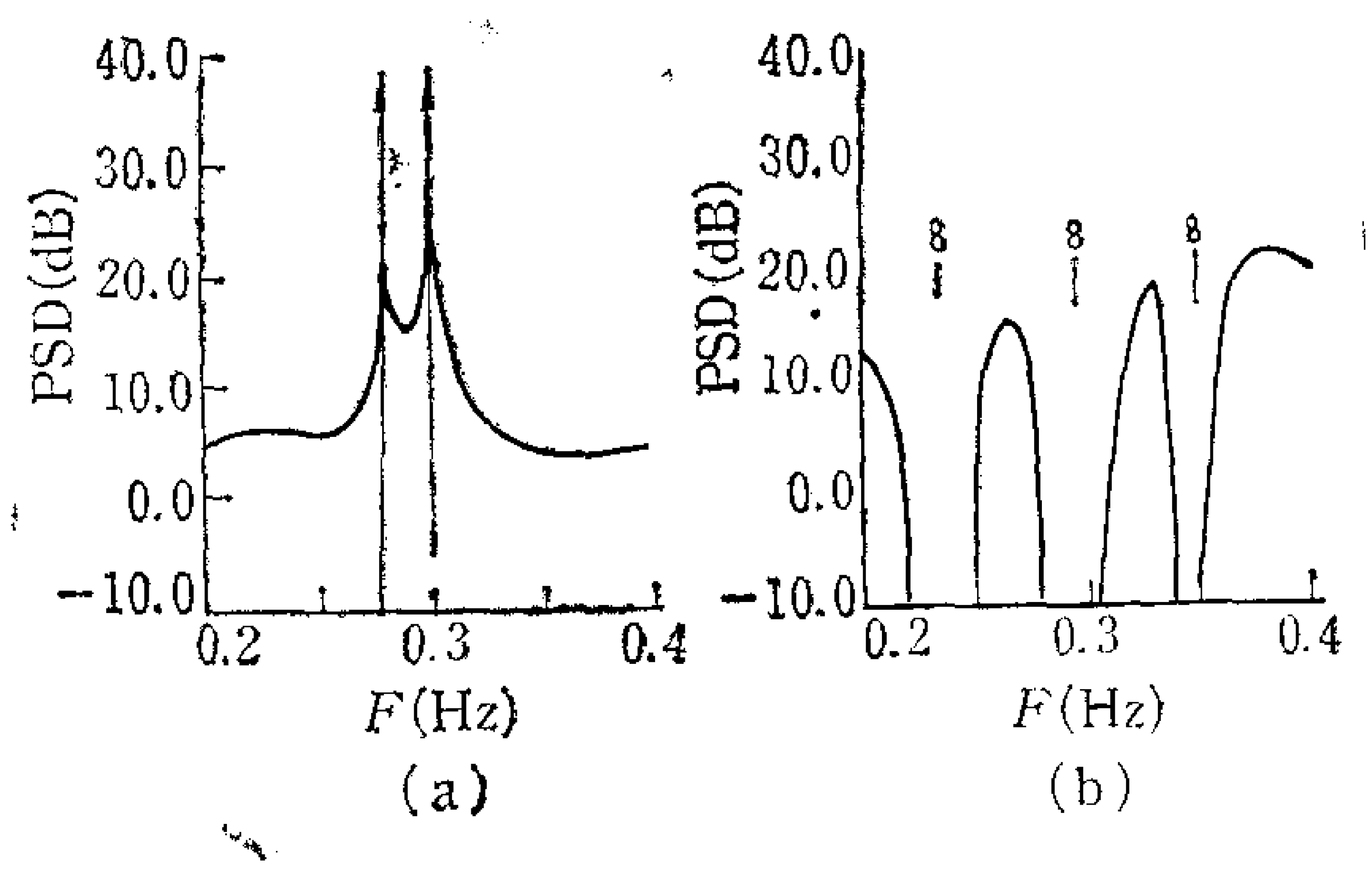
取 $\Delta t=1$，$a_1=\sqrt{20}$、$a_2=\sqrt[4]{20}$、$f_1=0.28\text{Hz}$、$f_2=0.30\text{Hz}$. 白噪方差 $\sigma^2=1$，信噪比(SNR)定义为

$$\mathrm{SNR}_i=10\log\left(\frac{a_i}{\sqrt{2\sigma^2}}\right),\quad i=1,\ 2. \tag{16}$$

因此 $\mathrm{SNR}_1=5\text{dB}$,$\mathrm{SNR}_2=2.5\text{dB}$. 取 $N=250$ 个数据,$p=q=15$，$L=25$. 分别用 Householder 变换递推算法(7)式和矩阵求逆方法（LS 法）求解 AR 参数. 表 2 列出估计结果，两种方法得到的参数估计差别很大. 图 2 给出与两种 AR 参数估计方法相对应的 ARMA(15，15）谱估计结果. 从图中可以看出,用新算法H法不但可分辨出两个正弦分量,而且可准确地估计出正弦分量的频率,而用 LS 法却出现了负谱,使估计结果失去了意义. 两种不同的 AR 参数估计方法得出了差别很大的两个谱估计结果. 这说明 ARMA 谱估计与 AR 谱估计一样,存在着数值计算的病态问题,采用稳定的算法可以提高谱估计的质量并避免负谱的产生.

表 2　两种算法 AR 参数估计结果的比较

(7)式 $\alpha_1\sim\alpha_8$	1.4170	0.7585	−0.2488	−0.1619	0.1327	−0.0439	−0.2060	0.0820
LS 法 $\alpha_1\sim\alpha_8$	0.0047	0.0062	0.4717	−0.4709	0.0338	−0.0497	0.0307	−0.2740
(7)式 $\alpha_9\sim\alpha_{15}$	−0.1410	0.0805	0.1688	−0.0469	0.0080	0.0170	−0.1715	
LS 法 $\alpha_9\sim\alpha_{15}$	0.2627	0.0219	−0.0320	0.0167	−0.0789	0.0703	0.0124	



(a) 新算法 (b) LS 法

图 2 双正弦信号加白噪声的谱估计结果

表 3 两种算法 AR 参数估计结果的比较

H法 $\alpha_1 \sim \alpha_8$	−0.2021	0.8898	0.5748	−0.0981	0.0631	0.0879	−0.2003	0.0756
G法 $\alpha_1 \sim \alpha_8$	−0.0518	0.7280	0.3738	0.0150	−0.4681	−1.455	−0.1287	−0.1380
H法 $\alpha_9 \sim \alpha_{15}$	−0.0430	−0.0427	0.0515	−0.0248	0.0192	0.0668	0.1066	
G法 $\alpha_9 \sim \alpha_{15}$	0.0033	0.0073	0.1841	−0.0457	0.0735	0.1108	0.1253	

例 2. 在(15)式中取 $\Delta t = 1$, $a_1 = \sqrt{20}$, $a_2 = \sqrt{32}$, $f_1 = 0.2\text{Hz}$, $f_2 = 0.21\text{Hz}$, $\sigma^2 = 1$, $N = 250$、$\text{SNR}_1 = 5\text{dB}$, $\text{SNR}_2 = 6\text{dB}$, 令 $p = q = 15$, $L = 25$. 与例 1 相同，分别用H法和G法求解 AR 参数估计. 表 3 列出两种方法的估计结果. 由表 3 可见两种参数估计的结果相差很大，从而谱估计结果也相差很大，而用新算法做出的谱估计是较好的.

六 结 论

(1) 新算法用 Householder 变换递推算法做 AR 参数估计，初步解决了 p,q 的阶次判定问题和负谱问题. 由于算法本身的稳定性好，新算法具有较高的分辨率和较好的估计质量.

(2) 负谱问题和谱估计质量与算法稳定性和数值计算的病态问题有密切的联系.

参 考 文 献

[1] 黄俊钦，余辉里，一种 ARMA 谱估计公式，自动化学报，第 12 卷，第 1 期，1986 年，40—47 页.

[2] S. M. Kay, A New ARMA Spectral Estimation, *IEEE Trans.*, ASSP- **28**, 1980.

[3] 张贤达，最大熵谱估计的新拓广，信号与信息处理学会论文集，1981，12.

[4] 得丸英滕等，离散时间线性モチハのあフはめスペクトル密度め推定，计测自动制御学会论文集，第 13 卷第 2 号，1977.

[5] Cadzow J. A., High Performance Spectral Estimation——A New ARMA Method, *IEEE Trans.*,ASSP-**28** (1980).

[6] Kaveh M., High Resolution Spectral Estimation for Noise Signal, *IEEE Trans.*, ASSP—**27** (1979).

[7] Kay S. M., L. Marple, Spectrum Analysis——A Moderm Perspective, *Proc. IEEE*, **69.**
[8] Haykin S. el, Nonlinear Method of Spectral Analysis, Springer-Verlag, New York, 1979.
[9] 张启人，系统测辨导论，1982.
[10] 黄俊钦，张继志，一种同时辨识模型阶次和参数的方法，仪器仪表学报，第 5 卷第 4 期，339－345页.

A NEW ALGORITHM FOR ARMA (p, q) SPECTRAL ESTIMATION USING ONLY AR PARAMETERS ESTIMATION

HUANG JUNQIN　　YU HUEILI
(Beijing Institute of Aeronautics and Asteronautics)

ABSTRACT

A new algorithm for autoregressive AR parameters estimation is presented in this paper. The recursive Householder algorithm is used in this new algorithm. Simulation results of ARMA (4, 4) and two sinusoids with white noise by using both the new method and the traditional LS are given at the same time for comparison. These results show that the resolution and the quality of estimation by this method are better than that of LS method and the existing method. They also show that negative spectrum can be eliminated and the quality of spectrum estimation can also be improved by high stability algorithm.