第12卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 12, No. 4
1986 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1986

“冻结系数法”的改进

廖晓昕　王晓君
(华中师范大学)

摘　　要

本文改进、推广了时变线性系统稳定性的“冻结系数法”，使该法应用范围得以扩大.

一、引　　言

科学家钱学森、宋健[1]指出了时变系统稳定性研究的重要性及艰难性，且对工程技术上乐于采用的“冻结系数法”寄予了理论上深入研究的期望.

本文用文献[2]的思想方法，从三个方面改进和推广原冻结系数法：1)放弃了系数矩阵 $A(t)$ 一致稳定(即 $\mathrm{Re}\lambda(A(t))<-\delta<0$) 的苛刻要求，只需在某点 t_0, $A(t_0)$ 稳定，且利用积分的平均性质，放宽了 $A(t)$ 缓变的要求；2)利用孤立子系统冻结后的系数矩阵不同稳定度来控制强弱不同的耦合，精估其解的渐近性质；3)改计算高维冻结系统的 Cauchy 矩阵为降维系统的 Cauchy 矩阵，增大了计算的可行性. 这样使“冻结系数法”扩大了应用范围.

二、主 要 结 果

考虑时变线性系统

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X, \tag{1}$$

改写(1)式为

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}=&\operatorname{diag}(A_{11}(t_0),\cdots,A_{rr}(t_0))X+\operatorname{diag}(A_{11}(t)-A_{11}(t_0)),\cdots(A_{rr}(t)\\&-A_{rr}(t_0))X+((1-\delta_{ij})A_{ij})X\end{aligned} \tag{2}$$

这里 $A_{ii}(t), A_{ij}(t)$ 分别为 $n_i\times n_i, n_i\times n_j$ 矩阵，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$, $i,j=1,2,\cdots,r$.

$$X_i=\operatorname{col}(x_1^{(i)},\cdots x_{n_i}^{(i)})\in R^{n_i},\ X=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_r\end{pmatrix}. \tag{3}$$

本文于 1984 年 3 月 26 日收到.

且考虑冻结的孤立子系统

$$\frac{dX}{dt}=\mathrm{diag}(A_{11}(t_0)\cdots,A_{rr}(t_0)). \tag{4}$$

定理 1. 若1°(4)式的 Cauchy 矩阵 $P(t,t_0)=\mathrm{diag}\,(P_{11}(t,t_0),\cdots,P_{rr}(t,t_0))$，有估计式 $\|P_{ii}(t,t_0)\|\leqslant M_ie^{-\alpha_i(t-t_0)}\cdot M_i,\alpha_i$ 为正的常数. (5)

2°$\|A_{ii}(t)-A_{ii}(t_0)\|\leqslant L_{ii}(t),\|A_{ij}(t)\|\leqslant L_{ij}(t)$，其中 $L_{ij}(t)\in C[t_0,+\infty)$ 为已知纯量函数.

3° 存在常数 $\varepsilon,0<\varepsilon<\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\alpha_i$，使

$$b_{ij}(t)\triangleq\int_{t_0}^{t}M_ie^{-(\alpha_i-\varepsilon)(t-t_1)}L_{ij}(t_1)dt_1\leqslant\tilde{b}_{ij}=\mathrm{const}. \tag{6}$$

矩阵 $\tilde{B}(\tilde{b}_{ij})_{r\times r}$ 的谱半径 $\rho(\tilde{B})<1$ (特别地 $\|\tilde{B}(\tilde{b}_{ij})\|<1$). 则(1)式的零解指数稳定.

证. (1)式的非零解 $X(t,t_0,X_0)\triangleq X(t)$ 满足积分方程

$$X_i(t)=P_{ii}(t,t_0)X_{i0}+\int_{t_0}^{t}P_{ii}(t,t_1)\left[(A_{ii}(t_1)-A_{ii}(t_0))X_i(t_1)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}A_{ij}(t_1)X_j(t_1)\right]dt_1,$$

$$i=1,2,\cdots,r. \tag{7}$$

对(7)式用分块的 Picared 迭代:

$$\begin{cases}X_i^{(m)}(t)=P_{ii}(t,t_0)X_{i0}+\displaystyle\int_{t_0}^{t}P_{ii}(t,t_1)\Big[(A_{ii}(t_1)-A_{ii}(t_0))X_i^{(m-1)}(t_1)\\ \qquad+\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}A_{ij}(t_1)X_j^{(m-1)}(t_1)\Big]dt_1,\\ X_i^{(0)}=P_{ii}(t,t_0)X_{i0}.\end{cases} \tag{8}$$

可以用数学归纳法证明对一切自然数m有估计式

$$\begin{aligned}\mathrm{col}(\|X_1^{(m)}(t)\|,\cdots,\|X_r^{(m)}(t)\|)\leqslant(E+B+\cdots+B^m)\mathrm{col}(M_1\|X_{10}\|,\cdots,\\ M_r\|X_{r0}\|)e^{-\varepsilon(t-t_0)},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{col}(\|X_1^{(m)}(t)-X_1^{(m-1)}(t)\|,\cdots,\|X_r^{(m)}(t)-X_r^{(m-1)}(t)\|)\leqslant B^m\mathrm{col}(M_1\|X_{10}\|,\cdots,\\ M_r\|X_{r0}\|)e^{-\varepsilon(t-t_0)}.\end{aligned} \tag{10}$$

从而 $\mathrm{col}(X_1^{(m)}(t),\cdots,X_r^{(m)}(t))\underset{m\to+\infty}{\rightrightarrows}\mathrm{col}(X_1(t),\cdots,X_r(t))$, (11)

$$\begin{aligned}\mathrm{col}(\|X_1(t)\|,\cdots,\|X_r(t)\|)&\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}B^m\mathrm{col}(M_1\|X_{10}\|,\cdots,M_r\|X_{r0}\|)e^{-\varepsilon(t-t_0)}\\ &=(I-B)^{-1}\mathrm{col}(M_1\|X_{10}\|,\cdots,M_r\|X_{r0}\|)e^{-\varepsilon(t-t_0)}.\end{aligned} \tag{12}$$

由(12)式知(1)式零解指数稳定.

推论 1. 若定理 1 中条件 1° 成立;条件 2° 中 $L_{ij}(t)\triangleq L_{ij}=\mathrm{const}$ 且矩阵

$$B\left(\frac{M_iL_{ij}}{\alpha_i}\right)_{r\times r}$$

的谱半径 $\rho(B)<1$(特别 $\|B\|<1$)，则(1)式的零解指数稳定.

定理 2. 若1°定理 1 条件 1°,2° 成立;2°(6)式定义的 $b_{ij}(t)$ 满足

$$\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(t)\mu_j + \sum_{j=i}^{r} b_{ij}(t) \leqslant \mu_i = \text{const} < 1, i = 1、2, \cdots, r, \tag{13}$$

则(1)式零解指数稳定.

证. 对(7)式用下列迭代

$$X_i^{(m)}(t) = P_{ii}(t,t_0)X_{i0} + \int_{t_0}^{t} P_{ii}(t,t_1)\left[\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(t_1)X_j^{(m)}(t_1) + (A_{ii}(t_1) - A_{ii}(t_0))X_i^{(m-1)}(t_1)\right.$$
$$\left. + \sum_{j=i+1}^{r} A_{ij}(t_1)X_j^{(m-1)}(t_1)\right]dt_1, \tag{14}$$

令 $M \triangleq \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} M_i, C \triangleq \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} \|X_{j0}\|, K = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ t\geqslant t_0}}\left\{\sum_{j=1}^{r} b_{ij}(t) + 1\right\}, \mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} \mu_i$. 取如下形式的一次近似

$$\begin{cases} X_1^{(1)}(t) = P_{11}(t,t_0)X_{10}, \\ X_2^{(1)}(t) = P_{22}(t,t_0)X_{20} + \int_{t_0}^{t} P_{22}(t,t_1)[A_{21}(t_1)X_1^{(1)}(t_1)]dt_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_r^{(1)}(t) = P_{rr}(t,t_0)X_{20} + \int_{t_0}^{t} P_{rr}(t,t_1)\left[\sum_{j=1}^{r-1} A_{rj}(t_1)X_j^{(1)}(t_1)\right]dt_1. \end{cases} \tag{15}$$

令 $\sigma = K^{r-1}M$, 易证对一切 m 有

$$\|X_i^{(m)}(t) - X_i^{(m-1)}(t)\| \leqslant \mu^{m-1}\sigma e^{-\varepsilon(t-t_0)}, \tag{16}$$

$$\|X_i^{(m)}(t)\| \leqslant \frac{\sigma}{1-\mu} e^{-\varepsilon(t-t_0)}. \tag{17}$$

从而 $X_i^{(m)}(t) \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} X_i(t)$, $X_i(t)$ 为(1)式的解. 故 $X_i(t)(i = 1,2,\cdots n)$ 有估计式

$$\|X_i(t)\| \leqslant \frac{\sigma}{1-\mu} e^{-\varepsilon(t-t_0)}.$$

从而(1)式零解指数稳定.

同样可证

定理 3. 若 1°(1)式满足定理 1°,2°; 2°(6)式中 $b_{ij}(t)$ 满足

$$\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(t)\rho^{(j)} + \sup_{\substack{t\geqslant t_0\\ i\leqslant j\leqslant r}} b_{ij}(t) \leqslant \rho^{(i)} = \text{const}, \ (i = 1,2,\cdots r), \sum_{j=1}^{r} \rho^{(j)} \triangleq \rho < 1; \tag{18}$$

或者

$$i\left[\sum_{j=1}^{i-1} (b_{ij}(t)V_j)\right]^2 + \sum_{j=i}^{r} (b_{ij}(t))^2 \leqslant V_i^2 = \text{const}, \ (i = 1,2,\cdots,r),$$

$$\sum_{i=1}^{r} V_i^2 = V^2 < 1, \tag{19}$$

则(1)式的零解指数稳定.

对定理 2,3 也有类似于推论 1 的推论,略.

三、例 子

对式(1),专著[1]介绍了冻结系数法定理为:

若 1°$\forall t_1, t_2 \geqslant 0$, 存在 $C > 0$ 使 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t_1) - a_{ij}(t_2)| \leqslant C$;

2°$\mathrm{Re}\lambda(A(t)) < -r < 0$;

3°$\dfrac{dX}{dt} = A(a_{ij}(t_0))X$ 的 Cauchy 矩阵 $(\varphi_{ij}(t))$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\varphi_{ij}(t, t_0)| \leqslant b e^{-\frac{r}{2}(t-t_0)}, \text{且 } bc < \frac{r}{4}, \tag{20}$$

则(1)式的解满足 $\|X(t)\| \leqslant b e^{-\frac{r}{4}(t-t_0)} \|X_0\|$. (21)

从而零解指数稳定.

例 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \left(-4 - \dfrac{1}{2}\sin t\right)x_1 + (3\cos t)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left(-\dfrac{1}{3}\cos t\right)x_1 + \left(-1 + \dfrac{1}{2}\sin t\right)x_2. \end{cases} \tag{22}$$

若在 $t_0 = 0$ 处冻结,易证不满足上述条件(1°—3°),但用本文方法可简便证明它的零解指数稳定. 事实上,改例 1 为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 - \dfrac{1}{2}(\sin t)x_1 + 3(\cos t)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 - \dfrac{1}{3}(\cos t)x_1 + \dfrac{1}{2}(\sin t)x_2, \end{cases}$$

孤立冻结子系统为

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2.$$

于是

$$P_{11}(t,0) = e^{-4t}, \ \|P_{11}(t,0)\| \leqslant e^{-4t}, \ M_1 = 1, \alpha_1 = 4;$$
$$P_{22}(t,0) = e^{-t}, \ \|P_{22}(t,0)\| \leqslant e^{-t}, \ M_2 = 1, \alpha_2 = 1.$$

取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$, $\displaystyle\int_0^t e^{-(4-\varepsilon)(t-t_1)} \left[\frac{1}{2} |\sin t_1| + 3|\cos t_1|\right] dt_1 \leqslant \frac{3\frac{1}{2}}{4-\varepsilon} < 1$,

$$\int_0^t e^{-(1-\varepsilon)(t-t_1)} \left[\frac{1}{3}|\cos t_1| + \frac{1}{2}|\sin t_1|\right] dt_1 \leqslant \frac{\frac{5}{6}}{1-\varepsilon} < 1.$$

故例 1 满足定理 1—3 中任何一条件,从而它的零解指数稳定.

例 2.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & \sin\frac{t}{8} & \frac{1}{8}\cos t \\ -5 & 2 & \frac{1}{7}\sin t & \frac{1}{7}\cos t \\ \frac{t}{1+t^2}, & \frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin t, & 1 \\ \frac{1}{2}\sin t, & \frac{t}{1+t^2} & 1 & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

分解为两个二维孤立子系统，且在 $t_0=0$ 处冻结，可以证明满足定理 1—3 任何一个条件，从而零解指数稳定．略．

参　考　文　献

[1] 钱学森、宋　健，工程控制论，上册，1981 年，科学出版社，109—111.
[2] 廖晓昕 (Liao Xiaoxin), SCIENTIA SINICA (Series A), Vol. XXIX, No. 3. 1986., 225—240.
[3] 廖晓昕，高等学校计算数学学报，1983，1，68—70.

THE IMPROVEMENT OF "FROZEN COEFFICIENT METHOD"

Liao Xiaoxin　Wang Xiaojun
(*Central China Normal University*)

ABSTRACT

In this paper, the "frozen coefficient method" for the stabilization of linear time varying systems are improved and generalized with lumped iteration method. The proposed method can be used to analyze the stability of large-scale systems. The scope of its applications has been expanded.